

横荷重評価の影響を考慮した厚板の変形および応力分布解析

Deformation and Stress Distribution Analyses of Thick Plates with Influence of Lateral Load Effect

末武義崇*

Yoshitaka Suetake

*工博, 足利工業大学教授, 工学部都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

In order to refine plate analyses, many high-order theories have been presented, in which the transverse shear deformation is included. Especially, we have to introduce high-order displacement fields for the analysis of in-plane deformation. However, governing equations of those high-order theories are usually quite complicated. In this paper, we establish a low-order theory for thick plate analyses, in which in-plane deformation can be evaluated. In order to do that, we pay attention to constitution of lateral loads and introduce a transverse normal stress into a two-dimensional constitutive law. It follows from the present numerical examples that the new theory presented here gives us excellent results for in-plane deformation and stress analyses of thick plates.

Key Words: thick plate theory, transverse shear deformation, load effect, transverse stress distribution, body force

キーワード: 厚板理論, 横せん断変形, 荷重効果, 板厚方向応力分布, 物体力

1. はじめに

厚肉の平板については, Reissner¹⁾およびMindlin²⁾以来, 横せん断変形の影響を考慮した曲げ理論が数多く報告されている. 古典的なReissner-Mindlin理論においては, 板中央面の伸縮や面内応力は常にゼロとなることが仮定されている. 従って, 代表的な古典理論に基づく解析の場合, 板厚の増加に伴って, 板厚方向の変位分布や応力分布に関する正確な評価は難しくなる.

解析精度の向上を意図した研究としては, 1970 年代後半から 1980 年代初頭にかけて考案された種々の高次理論が挙げられる. すなわち, 物理量の板厚方向分布を, 板厚方向座標 z の高次項を含む形で仮定した理論である. 例えば, Levinson³⁾あるいはReddy⁴⁾は, z の 3 次項まで考慮した面内変位の分布を仮定している. この結果, Mindlin理論で導入された“せん断補正係数”を用いることなく, より自然な形で板上下面におけるせん断応力ゼロの条件を満足することができる. しかしながら, Levinson³⁾およびReddy⁴⁾は, 板中央面の伸縮を無視し, たわみの分布を板厚方向で一定としたため, 変位や応力の板厚方向分布については, 必ずしも妥当な解析結果が得られていない.

一方, Lo, ChristensenおよびWu⁵⁻⁷⁾は, 面内変位について z の 3 次項, たわみについて z の 2 次項まで考慮して, 高次理論を構築した. Lo-Christensen-Wuの理論⁵⁾ (以下, “LCW理論”) では, 停留ポテンシャルエネルギーの原理を用いて定式化を行い, 支配方程式を誘導している. 特にLCW理論においては, 板中央面の伸縮やたわみの高次

項を含む形で定式化がなされているため, 変位や応力の板厚方向分布についても比較的高精度の解析が可能である. しかしながら, LCW理論では, z の高次項に対応して形式的に定義された合応力の物理的な意味が, 必ずしも明確でない⁸⁾. また, LCW理論は, 11 個の未知量と 11 個の支配方程式からなっており, 古典的な厚板理論に比べて極めて複雑である.

応力仮定に基づく高次平板理論についても, 多くの研究報告がなされている. 代表的な高次理論としては, Ambartsumyanの理論⁹⁾, 修正されたReissnerの理論^{10), 11)}, Voyiadjis-Baluchの理論¹²⁾, Rehfieldらの理論^{13), 14)}などが挙げられる. Ambartsumyanの理論⁹⁾においては, たわみが板厚方向に変化しないものと仮定されているが, その他の理論においては, 結果的に板厚方向のたわみ変化を考慮した形になっている. これらの理論においては, いずれも通常の合応力の釣り合い式を用いて支配方程式が記述されている. 従って, LCW理論と比較して, 物理的な不明確さは伴わないものの, 理論構成の一貫性に問題が残されている. 一方, Reissnerが新たに考案した高次理論¹⁵⁾においては, Reissnerの原理を用いて一貫性のある理論が定式化されている. しかしながら, LCW理論と同様に, 物理的意味の不明確な合応力の導入が避けられない.

さらに平島らは, 上述の高次理論をその特別な場合として抱合する一般化高次理論^{6), 17)}を定式化し, 解析精度について各種平板理論との比較検討を行っている^{18), 19)}. 理論の高次化に伴って, より高いレベルでの合理化が図られ, 解析精度も向上する一方で, 古典理論の持つ理論構成の簡明

さは損なわれている。

平板理論の構築にあたっては、このように高次化によって解析精度の向上を図っていくことが主流である。これに対し、筆者は、古典理論の持つ簡明さをできる限り損なわず、なおかつ比較的高精度の解析が可能となるような平板理論の定式化を模索してきた。そして、板の横荷重に占める物体力および表面力を明確に区別して荷重構成を評価することが、重要な鍵になることを明らかにしてきた^{20), 21)}。

まず、文献20)において、等分布荷重に占める物体力および表面力の構成比率を明示する形で古典理論の修正を図り、せん断補正係数に関する簡易算定式を提案した。さらに、文献21)において、等分布荷重以外の荷重についても、荷重構成を正確に表現し得るように古典的なReissner理論の再修正を図った。そして、得られた修正理論に基づく解析結果を三次元弾性論やLCW理論に基づく解析結果と比較し、横荷重を形成する物体力および表面力の構成が、平板の曲げ解析の精度に著しい影響を及ぼすことを示した。実際、横荷重の構成を明確にすれば、古典理論程度の低次の厚板理論であっても、比較的良好に三次元弾性解析結果を近似し得ることが分かった。一方、筆者が提案した修正理論^{20), 21)}では、面内変位を考慮していないため、幅厚比の大きな平板については、板厚方向の変位分布や応力分布に関し、必ずしも妥当な解析結果が得られない。

そこで本研究では、板の変位場として、中央面の変位を含む3次の変位場を仮定することとした。たわみについては、古典理論の簡明性を保持するために、板厚方向に一定とした。さらに、荷重構成の影響を正確に評価するために、板上下面における表面力と物体力とを明確に区別しつつ、力の釣り合い条件を積分して板厚方向の垂直応力を求めた^{20), 21)}。結果的に、横せん断変形を考慮した最も低次の曲げ基礎方程式だけでなく、面内の伸縮に関する基礎方程式も誘導することができた。

本研究で得られた解析結果と、代表的な高次理論に基づく結果とを比較するために、LCW理論を用いることとした。比較のための解析に当っては、荷重構成の影響を評価し得るように、LCW理論の再定式化を図った。解析例としては、横荷重を受ける矩形板の変形解析を選んだ。得られた数値計算結果から、本研究の修正理論は、板厚方向の変位分布や応力分布についても、三次元弾性解析結果を良好に近似し得ることが明らかになった。特に、LCW理論との比較を通じ、幅厚比がかなり大きな板厚であっても修正理論は代表的な高次理論と同程度の解析が可能であることを示した。

本論文では、続く第2章で、荷重構成に着目し、かつ面内変位を考慮した古典理論の修正について述べる。第3章では、LCW理論について概略を説明した。特に、本論文では、物体力の影響を考慮した解析が可能となるように、LCW理論を再定式化した。第4章では、本研究の修正理論とLCW理論に基づくFourier解析について説明する。第5章においては、解析モデルについて説明した後、板厚方向に沿った変位分布や応力分布に関する数値計算結果を示す。最後に、第6章で本論文の結論を述べる。

2. 面内伸縮を考慮した修正理論

2.1 変位-ひずみ関係

本論文では、変位分布の仮定として、Levinson³⁾およびReddy⁴⁾と同様の式を用いるが、板中央面の伸縮を考慮して、次式を用いることとした。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z - \frac{4}{3t^2} \phi_x z^3; \phi_x \equiv \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ V &= v - \psi_y z - \frac{4}{3t^2} \phi_y z^3; \phi_y \equiv \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \\ W &= w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 U, V, W は x, y, z 3方向の変位、 u, v, w は板中央面におけるそれぞれの方向の変位、 ψ_x および ψ_y は x, y 方向の回転角、 t は板厚である。座標系については、板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向に z 軸を設けることとした。

式(1)の変位分布に対応する面内ひずみは、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} z^3 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} z^3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\quad - \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) z^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

横せん断ひずみについては、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \phi_x \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2 \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \phi_y \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)は、明らかに板上下面におけるせん断応力ゼロの条件を満足している。

2.2 応力-ひずみ関係

古典的Reissner理論を修正する過程で、筆者は、次式で表される応力-ひずみ関係を用いてきた^{20), 21)}。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である。式(4)は、三次元等方体のHookeの法則において、板厚方向垂直ひずみ ε_z を消去することで導くことができる。得られた式

(4) は、板厚方向垂直応力 σ_z を含むから、 σ_z を通じて荷重構成の影響を導入することができる。

式 (4) における垂直応力 σ_z は、 z 方向の力の釣り合い条件を積分することで定められる^{20), 21)}。積分の詳細は省略するが、結果として次式が得られる。

$$\sigma_z = -\frac{\bar{p}}{2}\left(1 - \frac{3}{t}z + \frac{4}{t^3}z^3\right) + \frac{\bar{p}_0}{2}\left(1 - \frac{2}{t}z\right) + \bar{p}_2 \quad (5)$$

$$; \bar{p} \equiv \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2$$

式 (5) は、上下面 ($z = \pm t/2$) における力学的境界条件 $\sigma_z(x, y, -t/2) = -\bar{p}_1(x, y)$ および $\sigma_z(x, y, t/2) = \bar{p}_2(x, y)$ を満足している。また、 $\bar{p}_0(x, y)/t$ は自重のような z 方向の物体力に対応している。

古典的な平板理論では、横荷重は板中央面に作用するものと見なされる。例えば、板上面に表面力として等分布荷重が作用する場合も、物体力を等分布荷重として評価する場合も、共に板中央面に作用する等分布荷重と見なすことが通例である。しかしながら、筆者らの研究^{20), 21)}によって、横荷重に占める物体力と表面力の内訳を明確に区別することは、解析結果に顕著な影響を及ぼすことが明らかになっている。式 (5) を用いれば、物体力に相当する横荷重を $\bar{p}_0$ で、上下面に作用する表面力を $\bar{p}_1$ および $\bar{p}_2$ で、それぞれ明確に区別して評価することができる。後述のように、本論文の数値計算例では、全面等分布荷重を受ける解析モデルを、上面に表面力として等分布荷重を受ける“表面力モデル”と、物体力のみで荷重が構成されている“物体力モデル”とに区別して計算を行っている。

式 (5) を導く過程において、上面 ($z = -t/2$) における境界条件 $\sigma_z(x, y, -t/2) = -\bar{p}_1$ を適用することで、たわみ w と回転角 ψ_x および ψ_y との関係式として、次式が得られる^{20), 21)}。

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \nabla^2 w + \frac{3}{2Gt} \bar{p} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

式 (4) で与えられる垂直応力およびせん断応力 $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ を板厚方向に積分すれば、古典的な平板理論で通常用いられている合応力に関し、以下の表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\nu t}{2(1-\nu)} (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \\ N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\nu t}{2(1-\nu)} (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \\ N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = Gt \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

また、曲げモーメントおよび捩りモーメントについては、垂直応力およびせん断応力に板厚方向座標 z を乗じて積分することで、次の表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \{ \bar{p}_0 + 6(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \{ \bar{p}_0 + 6(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\ &= -\frac{D}{2} (1-\nu) \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性である。

式 (7) において、膜力 N_x および N_y の表示が板上下面における表面力を含む形になっていることに注目したい。これは、応力-ひずみ関係において、式 (4) のように板厚方向垂直応力 σ_z の影響を加味したためである。この結果、後述のように膜力の釣り合い式に表面力を導入することができ、たわみ w の分布を高次化することなく、横荷重の面内挙動に対する影響を考慮することができる。

さらに、式 (3) を参照し、横せん断応力 $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ および $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ を板厚方向に積分すれば、せん断力の表示として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2. 3 厚板解析の基礎方程式

良く知られているように、平板の微小変位問題における膜力あるいは曲げ・捩りモーメントの釣り合い式は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

まず、式 (7) を式 (10) に代入すれば、平板面内の挙動を表す基礎方程式として次の2式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \quad (12)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \quad (13)$$

式(12)および式(13)の右辺に表面力が存在することによって、面内および面外の挙動を分離せずに解析することができる。

これら2つの基礎方程式を変形し、面内変位 u および v について分離した形の表示を求めておく。式(12)および式(13)を、それぞれ y および x で偏微分して辺々引けば、次式が得られる。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (14)$$

今、式(14)があらかじめ満足されるように、 $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$ と仮定すれば、式(12)および式(13)より、板中央面の面内変位 u および v を求めるための基礎式として次式が得られる。

$$\nabla^2 u = \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \quad (15)$$

$$\nabla^2 v = \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \quad (16)$$

式(15)・(16)が、右辺に表面力を含む形になっていることは注目に値する。これは、横荷重が面内変位に影響を及ぼすことを意味しており、古典理論には見られない特徴である。

次に、式(8)を式(11)に代入して整理すれば、たわみ w 、断面回転角 ψ_x および ψ_y に関する基礎方程式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 w = & \frac{1}{D} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ & - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 \{ \frac{12-\nu}{10} \bar{p}_0 + \frac{3}{5} (2-\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \}] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_x = & \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ & + \frac{t^2}{60(1-\nu)} \nabla^2 \{ (3+\nu) \bar{p}_0 + 3(1+2\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_y = & \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial y} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ & + \frac{t^2}{60(1-\nu)} \nabla^2 \{ (3+\nu) \bar{p}_0 + 3(1+2\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \}] \end{aligned} \quad (19)$$

式(17)・(18)および式(19)の誘導過程については、文献21)で詳述したためここでは省略する。

面外挙動に関するこれらの基礎方程式を用いて解析すれば、横荷重を構成する表面力と物体力の影響を区別して評価することができる。

3. Lo-Christensen-Wu (LCW) 理論

3.1 LCW理論⁵⁾の概要

本論文で定式化した修正理論の比較対象の一つとして、文献21)と同様に、Lo-Christensen-Wuの高次理論(LCW理論)⁵⁾を取り上げる。この節では、LCW理論の概要を述べる。LCW理論では、次の変位場が仮定されている。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z + \zeta_x z^2 + \phi_x z^3 \\ V &= v - \psi_y z + \zeta_y z^2 + \phi_y z^3 \\ W &= w + \psi_z z + \zeta_z z^2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

すなわち、11個の未知量が導入されている。

古典理論の場合は、面内変位について1次、たわみについて一定の変位場が仮定される。従って、導入すべき合応力は、物理的な意味の明確な膜力(N_x, N_y, N_{xy})、曲げモーメント(M_x, M_y, M_{xy})およびせん断力(Q_x, Q_y)だけで充分である。一方、LCW理論では、式(20)のような高次の変位場が仮定されるため、通常の場合力を含め、 z の高次項に対応した合応力を定義しなければならない。すなわち次式⁵⁾である。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z & N_{xy} & Q_x & Q_y \\ M_x & M_y & M_z & M_{xy} & R_x & R_y \end{bmatrix} \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \frac{1}{z} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_{xy} \\ \bar{M}_x & \bar{M}_y & \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \frac{z^2}{z^3} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (22)$$

$$[S_x \ S_y] = \int_{-l/2}^{l/2} [\tau_{xz} \ \tau_{yz}] z^2 dz \quad (23)$$

$$M_z = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_z z dz \quad (24)$$

式(20)および三次元等方体のHooke則を用い、停留ポテンシャルエネルギーの原理に従って定式化を行えば、式

(21)～式(24)で定義した合応力に関する11個の釣り合い式を導くことができる。その内4個の釣り合い式は、式(10)および式(11)で与えられる。残り7個の釣り合い式を示すと、次式のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - 2R_x &= 0 \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - 2R_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - 3S_x &= 0 \\ \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - 3S_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} - N_z + \frac{t}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - 2M_z + \frac{t^2}{12}\bar{p}_0 + \frac{t^2}{4}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) = 0 \quad (29)$$

式(27)および式(29)における $\bar{p}_0$ に関する項は、物体力に対応する項で、文献5)では考慮されていない²⁰⁾。なお、釣り合い式においては板上下面におけるせん断応力をゼロとしたが、式(20)で表される変位場については、この条件をあらかじめ満足するように仮定されていない。この影響は、後述の数値計算結果に明確な形で現れてくる。

合応力の定義式、すなわち式(21)～(24)および三次元等方体のHooke則を用いて、全ての合応力を変位の未知量で表わすことができる。さらに、得られた表示を上記の釣り合い式に代入すれば、全ての基礎方程式を変位の未知量で記述することができる。

3.2 LCW理論の基礎方程式

文献5)では明示されていないが、ここでは個々の未知量に関する基礎方程式の一部を示しておく。まず、たわみ W に関する3つの未知量 w , ψ_z , ζ_z については、次式のような基礎式を誘導することができる。

$$\begin{aligned} & \{(1-\nu)t^2\nabla^4 - 120(1-\nu)t^2\nabla^2 \\ & \quad + 8400(1-2\nu)\}\nabla^4 w \\ & = \frac{1}{4D(1-\nu)} \{ \{33600(1-\nu)(1-2\nu) \\ & \quad - 40(180 - 353\nu - 2\nu^2)t^2\nabla^2 \\ & \quad + 10(1-\nu)(7+4\nu)t^4\nabla^4 - \frac{2}{3}(1-\nu)^2t^6\nabla^6\}\bar{p}_0 \\ & \quad + \{33600(1-\nu)(1-2\nu) \\ & \quad - 120(60 - 141\nu + 46\nu^2)t^2\nabla^2 \\ & \quad + 140\nu(1-\nu)t^4\nabla^4 + (1-\nu)^2t^6\nabla^6\}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \{(1-\nu)^2t^4\nabla^4 - 6(4-5\nu^2)t^2\nabla^2 \\ & \quad + 720(1-2\nu)\}\psi_z = \frac{90(1-\nu)}{G}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \left\{ \frac{t^4}{20}\nabla^2 + \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \right\} \zeta_z + \nabla^4 w \\ & = \frac{1}{D(1-\nu)^2} \{ \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \frac{t^2}{6}(1-\nu)\nabla^2 \bar{p}_0 \} \end{aligned} \quad (32)$$

式(30)は文献21)で示した基礎式と同一である。また、式(32)については、式(30)を解いて得られた w を用いて ζ_z を求めることになる。

たわみ W に関する3つの未知量が求められれば、得られた結果を用いて面内変位 U および V に関する未知量を定めることができる。例として、 U に関する4つの未知量を求めるための基礎式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_x & = (1-5\nu) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ & \quad - \left\{ \frac{\nu t^2}{4} \nabla^2 - 10(1-\nu) \right\} \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{t^2}{12D(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \{ 3(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) - 2(1-5\nu)\bar{p}_0 \} \\ \nabla^2 \phi_x & = - \frac{20\nu}{t^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ & \quad - \left\{ \frac{1+3\nu}{3} \nabla^2 - \frac{40}{t^2} (1-\nu) \right\} \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \\ & \quad - \frac{5}{5D(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (2\nu\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\left\{ \frac{t^2}{15} (1-\nu) \nabla^2 - 2(1-2\nu) \right\} \zeta_x = (1-2\nu) \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad (35)$$

$$\nabla^2 u = - \frac{5(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \zeta_x - \frac{5-6\nu}{4(1-\nu)} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad (36)$$

式(30)～(36)より明らかなように、LCW理論に基づく解析においては、極めて複雑な基礎方程式を解く必要がある。また、本論文で示した修正理論の基礎方程式(15)～(19)と比較すれば、LCW理論に基づく解析は、必ずしも実用的とは言えないことがわかる。

4. Fourier解析

4.1 修正理論に基づく解析

周辺単純支持された平板の解析を想定し、面内変位 u および v 、たわみ w 、断面回転角 ψ_x および ψ_y の表示として、次の三角級数を仮定する。

$$\begin{aligned} u & = \sum_n \sum_m U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v & = \sum_n \sum_m V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ w & = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \psi_x & = \sum_n \sum_m \Psi_{mn}^{(x)} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi_y & = \sum_n \sum_m \Psi_{mn}^{(y)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (38)$$

式(37)・(38)を用いれば、式(1)を参照して、板周辺に位置する境界面上で、幾何学的境界条件 $U(x,0)=U(x,b)=W(x,0)=W(x,b)=0$ 、および

$V(0, y) = V(a, y) = W(0, y) = W(a, y) = 0$ が満足されることが分かる。また、加重関数 $\bar{p}_i(x, y)$ ($i = 0 \sim 2$) は、次式のように Fourier 二重級数展開できるものとする。

$$\bar{p}_i = \sum_n \sum_m \bar{P}_{mn}^{(i)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (39)$$

$$; \bar{P}_{mn}^{(i)} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{p}_i(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

ただし、対象とする矩形平板の x および y 方向の長さをそれぞれ a および b とした。

式 (37)・(38) および式 (39) を修正理論の基礎方程式 (15)～(19) に代入すれば、単純な係数比較によって、直ちに5つの未定係数を定めることができる。たわみの未定係数 W_{mn} については、文献21)において具体的な形を示した。面内変位に関する未定係数については、 x, y 両方向共に形が類似している。そこで、本論文では、 x 方向の変位 U に関する U_{mn} および $\Psi_{mn}^{(x)}$ についてのみ示すことにする。すなわち、次式である。

$$U_{mn} = \frac{\nu}{4G\lambda_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} (\bar{P}_{mn}^{(2)} - \bar{P}_{mn}^{(1)}) \quad (40)$$

$$\Psi_{mn}^{(x)} = \frac{1}{D\lambda_{mn}^4} \frac{m\pi}{a} [\bar{P}_{mn}^{(0)} + \bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}]$$

$$- \frac{\lambda_{mn}^2 t^2}{60(1-\nu)} \{(3+\nu)\bar{P}_{mn}^{(0)} + 3(1+2\nu)(\bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)})\} \quad (41)$$

ただし、 $\lambda_{mn}^2 \equiv (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ と置いた。

4.2 LCW 理論に基づく解析

式 (20) で導入した11個の未知量についても、周辺単純支持平板を想定して、式 (37) および式 (38) と同様の三角級数によって表すことにする。すなわち、次式である。

$$\left. \begin{aligned} [u \ \psi_x \ \zeta_x \ \phi_x] &= \\ \sum_n \sum_m [U_{mn} \ \Psi_{mn}^{(x)} \ Z_{mn}^{(x)} \ \Phi_{mn}^{(x)}] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ [v \ \psi_y \ \zeta_y \ \phi_y] &= \\ \sum_n \sum_m [V_{mn} \ \Psi_{mn}^{(y)} \ Z_{mn}^{(y)} \ \Phi_{mn}^{(y)}] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ [w \ \psi_z \ \zeta_z] &= \\ \sum_n \sum_m [W_{mn} \ \Psi_{mn}^{(z)} \ Z_{mn}^{(z)}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式 (42) を用いれば、式 (20) を参照して、やはり前節と同様に、板周辺に位置する境界面上で、幾何学的境界条件 $U(x, 0) = U(x, b) = W(x, 0) = W(x, b) = 0$ 、および $V(0, y) = V(a, y) = W(0, y) = W(a, y) = 0$ が満足されることが分かる。

式 (42) を LCW 理論の基礎式 (30)～(36) に代入すれば、各未定係数を順次決定していくことができる。

個々の未定係数の表示については省略するが、たわみの未定係数 W_{mn} については、文献21)に具体的な形を示した。

容易に推測されるように、比較的単純な問題であっても、LCW 理論に基づいて算定される係数はきわめて複雑な形になる。一方、本論文の修正理論に基づく Fourier 解析のレベルは、Mindlin 理論による解析と同程度であり、Kirchhoff 理論による解析と比較しても付加項を考慮するだけの単純なものである。なお、古典理論では、面内と面外の解析が完全に分離しているために、横荷重の存在だけでは面内変位は求められない。従って、変位や応力の板厚方向分布については、必ずしも妥当な解が得られない場合がある。

5. 数値計算例

5.1 解析モデル

本論文では、周辺単純支持された矩形平板を解析対象とする。解析モデルの形状は正方形、すなわち縦横比を $\gamma = b/a = 1$ とし、幅厚比を $\mu = t/a = 0.2, 0.5, 1.0$ の3通りに変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。横荷重については、全面等分布荷重を想定し、一定の物体力あるいは表面力を作用させた。さらに、荷重構成の違いを明確にし、解析モデルを区別した。等分布荷重の場合、荷重の Fourier 係数 $\bar{P}_{mn}^{(i)}$ は、次式で与えられる。

$$\bar{P}_{mn}^{(i)} = \begin{cases} \frac{16\hat{p}_i}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \quad (43)$$

ここで、 $\hat{p}_i$ ($i = 0 \sim 2$) は一定値を意味しており、 $\hat{p}_0$ が物体力、 $\hat{p}_1$ および $\hat{p}_2$ が表面力に対応している。二重級数の項数については、 $200 \times 200 = 40000$ とした。

荷重を構成する物体力と表面力との内訳については、上面にのみに等分布荷重が作用する“表面力モデル”、一定の物体力のみが作用する“物体力モデル”、表面力と物体力の両者が作用する“混合モデル”の3者を区別して計算を行った。等分布荷重の大きさは、3つの荷重構成に応じて、以下のように設定した。

- ・ 表面力モデル: $\hat{p}_0 = \hat{p}_2 = 0, \hat{p}_1 = \hat{p}^*$
- ・ 物体力モデル: $\hat{p}_0 = \hat{p}^*, \hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0$
- ・ 混合モデル: $\hat{p}_0 = \hat{p}_1 = 0.5\hat{p}^*, \hat{p}_2 = 0$

なお、一定値 $\hat{p}^*$ については、次式で定義される無次元化荷重 $\hat{\chi}^*$ の大きさが、 $\hat{\chi}^* = 1$ となるように定めた。

$$\hat{\chi}^* = \frac{\hat{p}^* a^3}{\mu D} = \frac{12(1-\nu^2)}{E\mu^4} \hat{p}^* \quad (44)$$

数値計算に当たっては、図-1に示した平板の板厚方向の線分 $AA'(x=a, y=b/2)$ 、 $BB'(x=a/2, y=b/2)$ および $CC'(x=a/4, y=b/4)$ 上における変位分布や応力分布を求めた。線分 AA' 上においては x 方向の面内変位 U の分布、線分 BB' 上においては x 方向の垂直応力 σ_x の分布、さらに、線分 CC' 上には横せん断応力 τ_{xz} の分布をそれ

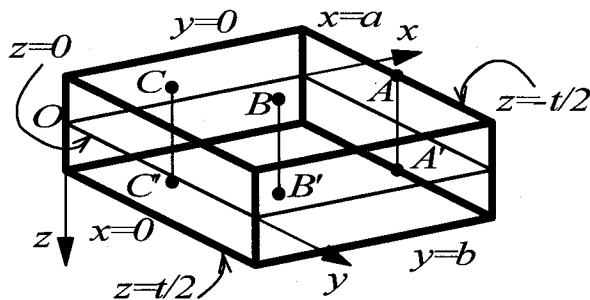


図-1 解析モデル (矩形平板)

それぞれ求めた。

本論文では、LCW 理論に基づく解析結果に加え、三次元弾性論に基づく解析結果についても比較の対象とした。三次元弾性解析の詳細については、文献20)で述べた通りである。三次元解析に際して適用した境界条件については、板の全周面においてたわみがゼロ ($W=0$)、 x 軸を法線とする周面において y 方向の変位がゼロ ($V=0$)、 y 軸を法線とする周面において x 方向の変位がゼロ ($U=0$) とした他、板上下面における荷重条件やせん断応力ゼロの条件を力学的境界条件とした。

5.2 面内変位分布

この節では、 x 方向の面内変位 U に関し、周面中央部における板厚方向分布の解析結果について述べる。結果を図-2～図-4に示す。図は、いずれも図-1における線分 AA' に沿った変位分布を表している。

図中、横軸には無次元化変位 $\alpha = u/a$ を、縦軸には無次元化座標 $\xi = z/t$ をそれぞれとって示した。図の上下が、板の上下面にそれぞれ対応している。また、いずれの図においても、プロットが本論文の修正理論に基づく結果、太線が三次元弾性解析、細線が LCW 理論による結果をそれ

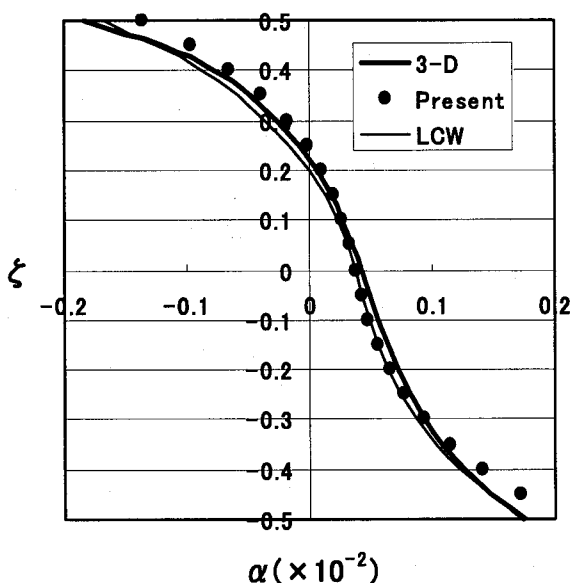


図-2 面内変位分布 ($\mu=0.5$, 表面力モデル)

ぞれ示している。

図-2から明らかなように、解析モデルの幅厚比が比較的大きな $\mu=0.5$ で、等分布荷重が全て上面に作用する“表面力モデル”の場合、3者の結果は概ね一致した分布形状を示している。局所的な分布に着目して比較すれば、上下面近傍において、本論文の解析結果に若干の差異が認められる。しかしながら、板中央面の伸縮については、本論文の結果も良好な近似を与えていることが分かる。“物体力モデル”および“混合モデル”についても、ほぼ同様の解析結果が得られている。

図-3および図-4に示した結果は、幅厚比を極端に大きく設定した $\mu=1.0$ のモデルに関する変位分布である。図-3は“物体力モデル”の結果、図-4は“混合モデル”の結果にそれぞれ対応している。

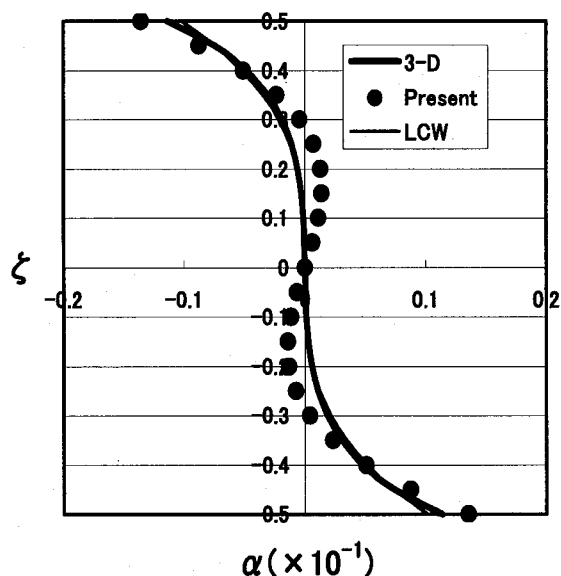


図-3 面内変位分布 ($\mu=1.0$, 物体力モデル)

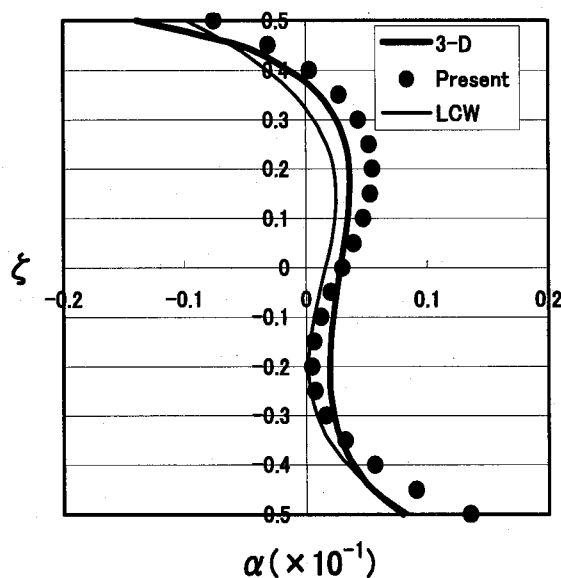


図-4 面内変位分布 ($\mu=1.0$, 混合モデル)

図-3を見ると、LCW 理論の結果がほぼ三次元解析の

結果に一致しているのに対し、本論文の結果は、板中央面と上下面とに挟まれた中間の領域でわずかに誤差を生じていることがわかる。一方、図-4の“混合モデル”の結果については、3者の結果に相違が見られ、LCW理論であっても必ずしも良好な近似を与えていない。

本論文の修正理論では、式(1)から明らかのように、面内変位に関し3次の分布を仮定している。つまり、横せん断応力の分布については、放物線分布で近似することになる。ところが、横せん断応力の分布は、後述のように、幅厚比 μ が増大すると、中央でややつぶれたような形状になり、放物線分布での近似が難しくなる。従って、式(5)で表される板厚方向垂直応力 σ_z の分布も、三次元解析との間にずれを生ずることになる。この結果、幅厚比 μ の大きなモデルについては、図-3のように三次元解析結果との間に差異が生じたものと考えられる。一方、LCW理論も3次の面内変位分布を仮定しているわけだが、上下面におけるせん断応力ゼロの条件を緩和しているために、放物線分布であっても板中央部における横せん断応力の精度は必ずしも低下しない。このため、図-3に示した面内変位分布については、LCW理論の結果と三次元解析の結果がほぼ一致したものと考えられる。

表面力が作用すると、幅厚比 μ の大きなモデルの横せん断応力分布は、放物線分布での近似がより難しくなる。図-4の“混合モデル”の結果について、修正理論・LCW理論ともに良好な近似が見られなかった理由は、この点にあると考えられる。

解析結果は示していないが、中等厚板に相当する幅厚比 $\mu=0.2$ の解析モデルについては、荷重構成によらずほぼ直線的な変位分布を示し、3者とも全く一致した分布形状が得られている。

以上の結果を総合すると、面内変位の板厚方向分布に関しては、本論文の修正理論は妥当な近似解を与えており、代表的な高次理論であるLCW理論と比較しても、それほど遜色のない解析結果が得られていることが分かる。

5.3 垂直応力分布

この節では、図-1における板中央部の線分 BB' に沿った、 x 方向の垂直応力分布に関する解析結果について述べる。図-5～図-7に結果を示す。図-5は、幅厚比 $\mu=0.2$ の“物体力モデル”に関する結果であり、図-6は幅厚比 $\mu=0.5$ の“表面力モデル”，図-7は、幅厚比 $\mu=1.0$ の“物体力モデル”の結果にそれぞれ対応している。図中、縦軸は図-2～図-4と同じく無次元化座標 $\zeta=z/t$ であるが、横軸には無次元化応力 $\sigma^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\}\sigma_x$ をとった。

幅厚比が $\mu=0.2$ の場合は、荷重の構成によらず、図-5に示した“物体力モデル”の結果とほぼ同様の応力分布が得られる。図から明らかのように、中等厚板程度の幅厚比であっても、概ね直線的な分布が得られており、この点については薄板と同様の傾向を示している。幅厚比 $\mu=0.2$ の場合、変位分布に関しては、修正理論、LCW理論、三次元理論、3者に基づく解析結果が全く一致したことと比べると、応力分布にはわずかながら差異が見られる。

いずれにしても、修正理論は、LCW理論と同程度の精度で近似解を与えていることが分かる。

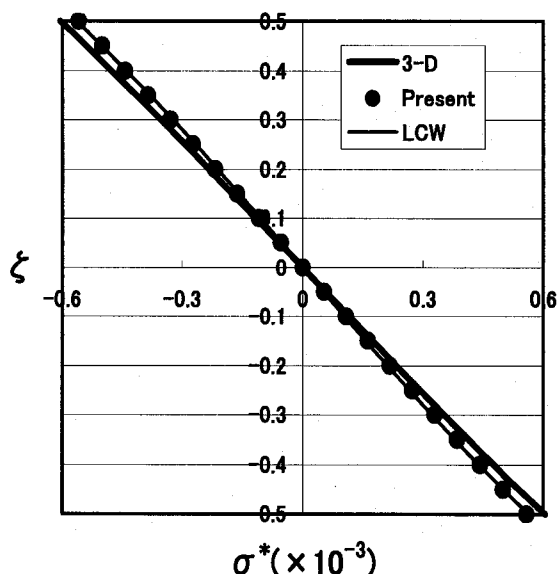


図-5 垂直応力分布 ($\mu=0.2$, 物体力モデル)

図-6に示した幅厚比 $\mu=0.5$ の“表面力モデル”の結果に着目すると、LCW理論に基づく解析結果と三次元解析の結果とがほぼ一致しているのに対し、修正理論によって得られた結果には明確な差異が認められる。特に、板上面に载荷したため、解析モデル上部における差異が著しい。図-2において概ね一致した分布形状が見られたことと比べると、同一モデルであっても、応力解析の精度が低下していることが分かる。この傾向は、幅厚比が増加するほど顕著になる。

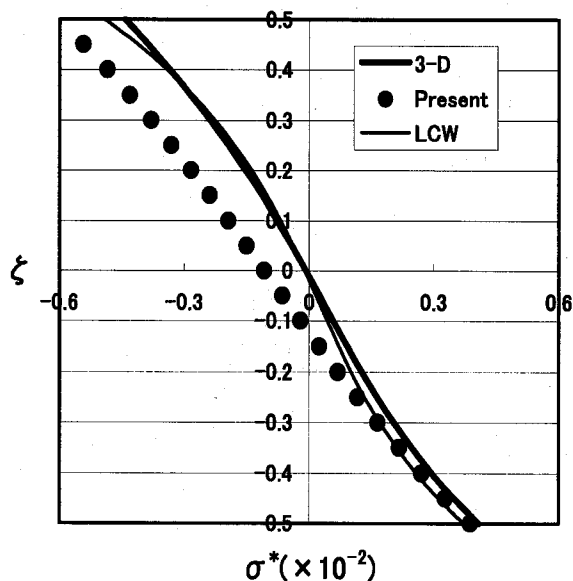


図-6 垂直応力分布 ($\mu=0.5$, 表面力モデル)

本論文では、簡明な平板理論の構築を目的として、板厚方向に関し、できる限り低次の変位場を仮定している。従って、幅厚比が極端に大きくなれば、解析精度の低下は避

けられない。こうした点を考慮すれば、“平板”と見なしうる領域を超えた固体の応力解析に、本論文の修正理論を援用することには注意が必要である。

“混合モデル”の応力分布については割愛したが、幅厚比によらず、“表面力モデル”と“物体力モデル”の中間的な結果を与えている。応力分布の形状については、“表面力モデル”と同様の傾向を示している。

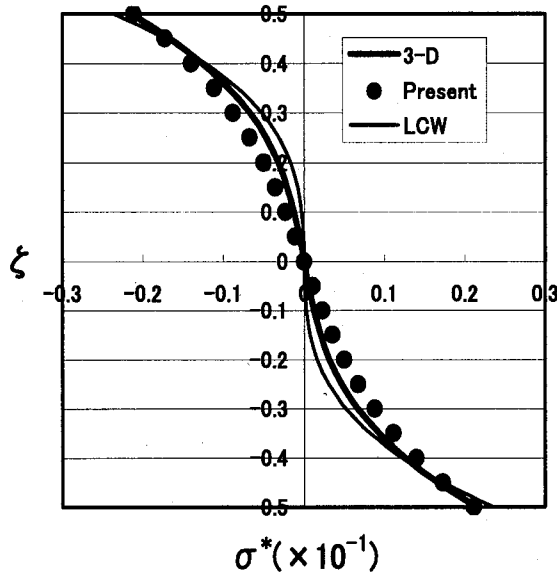


図-7 垂直応力分布 ($\mu=1.0$, 物体力モデル)

一方、“物体力モデル”の応力分布を示した図-7に着目すると、幅厚比が $\mu=1.0$ で極端に大きな値であるにもかかわらず、3つの解析結果がほぼ類似した結果になっていることがわかる。修正理論に基づく解析によって生ずる若干の誤差についても、LCW理論のそれと同程度であることも分かる。

以上の結果を総合すると、垂直応力の板厚方向分布に関しては、変位の解析に比べるとやや解析精度が低下することが分かった。特に、荷重が表面力によって構成されている場合、幅厚比が比較的大きくなると、修正理論によって良好な近似解を得ることは難しくなる。しかしながら、荷重が物体力のみによって構成されていれば、修正理論に基づく解析結果の精度は良好であり、かなり大きな幅厚比であっても、LCW理論と同程度の結果が得られている。

5.4 横せん断応力分布

横せん断応力の板厚方向分布に関する解析結果を図-8～図-10に示す。図は、いずれも図-1における線分CC'に沿った横せん断応力の分布を表している。縦軸は無次元化座標 $\zeta = z/t$ 、横軸は無次元化応力 $\tau^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\}\tau_{xz}$ をそれぞれ表している。

図-8に示した結果は、幅厚比 $\mu=0.5$ の“表面力モデル”の応力分布である。図から明らかなように、修正理論とLCW理論は同一の結果を与えているが、三次元解析の結果とは若干の差異を生じている。修正理論、LCW理論共に、仮定した変位場が面内変位に関して3次であるから、

横せん断応力の分布形状は、必ず2次曲線すなわち放物線の形になる。従って、表面力の作用によって、応力分布が放物線と異なる形状になれば、修正理論およびLCW理論は適切な分布形状を表現し得ない。こうした傾向は、幅厚比が増大すればより顕著になる。

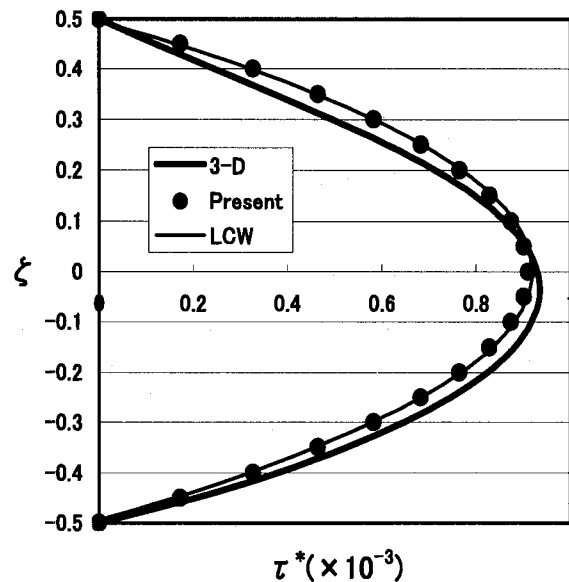


図-8 横せん断応力分布 ($\mu=0.5$, 表面力モデル)

一方、幅厚比が同じ $\mu=0.5$ であっても、“物体力モデル”の場合は、図-9に示したように分布形状がほぼ放物線になる。このため、修正理論およびLCW理論は、共に三次元解析の結果を精度良く近似し、3者の結果は全く一致する。幅厚比が中等板厚程度($\mu=0.2$)の場合は、荷重の構成によらず、図-9と同様の結果が得られる。ただし、応力レベルは低く、幅厚比 $\mu=0.5$ の場合と比べると、オーダーが一桁小さい。

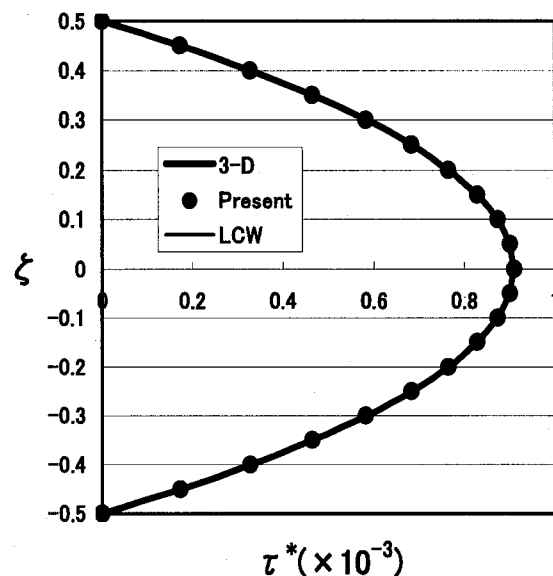


図-9 横せん断応力分布 ($\mu=0.5$, 物体力モデル)

荷重が物体力のみで構成される場合であっても、幅厚比

を $\mu = 1.0$ と極端に大きく設定すると、図-10のように、分布形状の様相はかなり異なってくる。修正理論、LCW理論および三次元弾性論、いずれも類似の結果は与えているものの、三者三様の分布形状になっている。修正理論は比較的良好に三次元解析の結果を近似しているが、放物線が中央でややつぶれたような形状については表現し得ない。さらに、板上下面における結果に着目すると、LCW理論はせん断応力ゼロの条件を満足していないことが分かる。

図-8および図-9においては、LCW理論も見かけ上せん断応力ゼロの条件を満足しているように見えるが、実際には値を生じている。修正理論は、元々せん断応力ゼロの条件を満足するように変位場を仮定しており、三次元弾性解析においては、境界条件として適用しているため、板上下面におけるせん断応力ゼロの条件が厳密に満たされる。これに対し、LCW理論では、条件を満足するような変位場が仮定されているわけではなく、従って、せん断応力ゼロの条件は、元々近似的にしか満足されない。

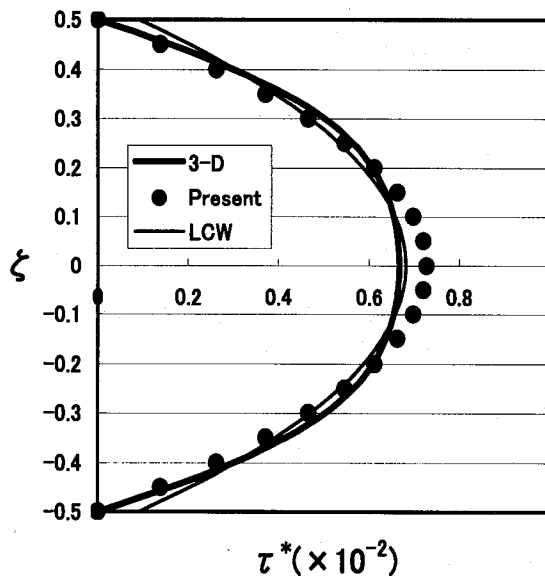


図-10 横せん断応力分布 ($\mu=1.0$, 物体力モデル)

以上の結果を総合すると、横せん断応力の板厚方向分布に関しても、幅厚比の増大に伴って、修正理論の誤差も増大することが分かった。特に、表面力が作用する場合にこの傾向が顕著となる。しかしながら、LCW理論を用いたときに生ずる誤差も、本論文の修正理論の場合と同程度である。さらに、LCW理論の場合には、本質的に板上下面におけるせん断応力ゼロの条件を表現し得ず、幅厚比がかなり大きくなると、妥当な応力分布を表現できなくなる。

6. 結論

本研究の解析結果から、以下の結論が得られた。

- 1) 変位場の仮定を高次化することなく、横荷重の作用下で面内の伸縮が求められる平板理論を定式化した。定式化に当たっては、横荷重の構成に着目し、板厚方向の垂直応力を応力-ひずみ関係に考慮した。

- 2) 本論文の平板理論は、板面内の変位や応力の分布に関し、代表的な高次理論である Lo-Christensen-Wu の理論と遜色のない解析結果を与える。
- 3) 本論文の平板理論では、幅厚比が極端に大きくなった場合や表面力が作用した場合には、解析精度がやや低下するものの、中等厚板程度の解析モデルや荷重として物体力のみが作用する場合には、極めて良好な近似解が得られる。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 2) Mindlin, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 3) Levinson, M.: An Accurate, Simple Theory of the Static and Dynamics of Elastic plates, Mechanics Research Communications, Vol.7, Issue 6, pp.343-350, 1980.
- 4) Reddy, J. N.: A Simple High-Order Theory for Laminated Composite Plates, J. of Appl. Mech., Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 5) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation - I. Homogeneous Plates, J. Appl. Mech., Vol.44, pp.663-668, 1977.
- 6) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation - II. Laminated Plates, J. Appl. Mech., Vol.44, pp.669-676, 1977.
- 7) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: Stress Solution Determination for High Order Plate Theory, Int. J. Solid and Struct., Vol.14, pp.655-662, 1978.
- 8) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: 3次せん断変形理論に基づく spline 要素法を用いた直交異方性厚板の振動解析, 応用力学論文集, Vol.7, No.1, pp.213-224, 2004.
- 9) S. A. アムバシツミヤン (神谷紀生 訳): 異方弾性板の理論, 森北出版, 1975.
- 10) Reissner, E.: On Transverse Bending of Plates including the Effects of Transverse Shear Deformation, Int. J. Solid and Struct., Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 11) Reissner, E.: A Note on Bending of Plates including the Effects of Transverse Shearing and Normal Strains, J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP), Vol.32, pp.764-767, 1981.
- 12) Voyiadjis, G. Z., and Baluch, M. N.: Refined Theory for Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Sound Vib., Vol.76, pp.57-64, 1981.
- 13) Rehfield, L. W., and Murthy, P. L. N.: Tward a New Engineering Theory of Bending: Fundamentals, AIAA Journal, Vol.20, No.5, pp.693-699, 1982.
- 14) Rehfield, L. W., and Valisetty, R. R.: A Simple, Refined Theory for Bending and Stretching of Homogeneous Plates, AIAA Journal, Vol.22, No.1, pp.90-95, 1984.

- 15)Reissner, E.: A Twelfth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates, ZAMM, Vol.63, pp.285-289, 1983.
- 16)平島健一, 村松正重: 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, 土木学会論文報告集, Vol.304, pp.33-46, 1980.
- 17)平島健一, 根岸嘉和: 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 第36回土木学会年次学術講演会概要集・第1部, pp.29-30, 1981.
- 18)平島健一, 根岸嘉和: 板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察, 土木学会論文報告集, Vol.330, pp.1-14, 1983.
- 19)平島健一, 根岸嘉和: 数種の平板理論の動特性(自由振動と分散特性)に関する研究, 土木学会論文報告集, Vol.333, pp.21-34, 1983.
- 20)末武義崇, 友田富雄: 厚板解析における横荷重の影響に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.7, No.1, pp.47-56, 2004.
- 21)末武義崇: 厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響, 応用力学論文集, Vol.8, No.1, pp.25-32, 2005.
- 22)土木学会: 構造力学公式集, 第2版, 1999.

(2007年4月12日 受付)