

面内方向軸力線要素を用いた滑らかな石鹸膜形状の決定手法について

Form-finding of smooth soap film shape using axial force line elements located in tangent plane directions

帯屋洋之*・井嶋克志**・村上卓志***・川崎徳明****・西村裕次*****

Hiroyuki Obiya, Katsushi Ijima, Takashi Murakami, Noriaki Kawasaki and Hirotsugu Nishimura

*博(工) 佐賀大学准教授, 理工学部都市工学科 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

** 工博 佐賀大学教授, 理工学部都市工学科 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

***修(工) 宇部興産株式会社 (〒755-8633 宇部市大字小串1978-96)

****佐賀大学技術職員, 理工学部都市工学科 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

*****佐賀大学大学院 工学系研究科博士前期課程 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

Purpose of the shape analysis is to find the mechanically rational form for many kind of structures, for example, membrane structures, suspended cables, and so on. The perfect equilibrium solutions with isotonic tensile can be obtained by shape analysis using tangent stiffness method. The solutions constitute the polyhedrons which can be similar in curved surfaces of soap film. When we evaluate the polyhedron equilibrium solutions, the approximation performance is depending on their mesh density and mesh distribution. This study proposes a new technique to obtain the polyhedron solutions which can express smooth surfaces by parallel calculation of soap film analysis only to normal direction and axial line analysis in tangent plane of the surface. By using this technique, node distribution becomes more rational and larger compulsory displacement can be adopted when the simultaneous control is used as the incremental method.

*Key Words: form-analysis, soap film, axial force line elements, mesh distribution
polyhedron equilibrium solutions, approximation of curved surface*

キーワード: 形態解析, 石鹸膜曲面, 線長関数軸力線, メッシュ配置
多面体釣合解, 曲面近似

1. まえがき

空間内の閉曲線境界に対して, 最小の表面積を与え, かつ, 曲面全体に亘って等張力の条件を満足する石鹸膜曲面を求める「プラトー問題」は, 1 世紀を超えて多くの数学者, 物理学者, 建築家によって精力的な研究がなされてきた. 計算機が発達した現在においても, 微分幾何学の研究者の間では, 多次元空間における周期極小曲面問題^{1,2)}として, 活発な議論的となっている“古くて新しい”研究対象である.

一方, 吊り構造や空気膜構造といった大空間屋根構造の形状決定のために等張力曲面を求めることを目指した工学的立場からは, 20 世紀後半になって, 計算機性能の著しい進歩とともに有限要素法を始めとする数値計算による形状決定手法^{3,4)}が多く開発され, 形態解析⁵⁾という呼称も定着した. 現在では, 空気膜構造の原型曲面に適用するための石鹸膜形状解析に関しては, 恒久大空間構造として現実的な範囲の低ライズ曲面や, 単純な平面内境界を有する条件のもとでは, 高い精度の解を得ることができるよ

うになった.

しかし, 膜構造物の用途は屋根構造に限定されるものではなく, 軽量で柔軟な材料の特性は, たとえば, 水中構造物や地中構造物, 宇宙構造物などへの応用も期待されている. また, 曲面全体にわたって応力が均一となる石鹸膜の形状は, その均整の取れた美しさから建築意匠としての価値も高い. 任意の曲線境界に適合する石鹸膜曲面を定めることができれば, デザイナーの感性による美しさと力学的合理性を兼備した設計が可能となる. このように, 石鹸膜曲面の様々な用途を前提としたとき,

- ① 一定の空気圧だけでなく, 水圧, 土圧, あるいは天体引力といった位置依存型の各種荷重条件への対応
- ② 複雑な境界形状を有する場合の計算安定性 (確実な収束性) 確保についての問題
- ③ 曲面の形状を滑らかにかつ正確に捉えることができるだけの適切なメッシュ分割手法

などに関する検討が必要となる.

著者らは, これまで要素端節点に離散化された要素座標系表示の要素端力と基準座標系表示の節点力との間の釣

合条件式より導かれる接線剛性方程式を反復使用する接線剛性法を用いて、石鹼膜形態解析を行ってきた⁸⁾⁻¹³⁾。これらの一連の研究では、先行釣合形状にある任意の1節点に強制変位を与え、そのときに現れる不平衡解から算出される平均換算内圧を同時に作用させる増分制御法であるサイマルコントロール法^{10),11),13)}を用いることによって、前述①の位置依存型荷重への対応が可能となった。また、②の問題に対しては、線長関数軸力線要素（以下、軸力線要素と呼称する）によって構成される釣合曲面を石鹼膜形態解析の先攻初期形状として採用することによって、複雑な境界形状を持つ場合でも安定した収束過程のもとに解を得ている。さらに、軸力線要素による釣合曲面は石鹼膜曲面に近い形状となり、且つ節点間距離にばらつきのない合理的な先行初期形状を線形解析によって得ることを確認している^{9),12)}。

ところが、③の問題に関しては、たとえば、初期先行形状とは極端に形の異なった解形状や極端に表面積が大きくなる形状を目的解とする解析においては、たとえ厳密な釣合解が得られたとしても、要素形状が扁平になりすぎたり、要素面積にばらつきが生じたりするなど、曲面を近似した解としての有意性が担保できないこともある。石原ら⁹⁾は、この点について、曲面の法線方向1自由度系への低次元化処理に問題があると指摘し、3自由度系の面積汎関数を用いて内包体積を入力条件とする幾何学的な手法を提案している。

しかしながら、いずれの方法を用いたにせよ、三角形平面要素に等張力条件を付与した要素（三角形等張力要素）を用いることを前提とすれば、得られる解はあくまで「多面体釣合解」であるに過ぎない。よって、本来面内方向に剛性を持たない「等張力」の条件下では、多面体の頂点となる節点の位置は、石鹼膜曲面上であれどこでもよいことになり、三角形等張力要素による釣合解は無数に存在することになる。このことにより、前述の曲面近似の有意性を維持したまま解析を進めるためには、適切な初期メッシュ密度を設定し、均整の取れたメッシュの形状配分を常に確保しておく必要がある。

以上の背景をもとに、本論文では、全節点に対して面外1方向と面内2方向から成る三次元節点座標系を設定し、面外方向には三角形等張力要素による石鹼膜形態解析を、面内2方向には軸力線要素によって自己釣合解を求める解析を、同時進行で並列に行う手法の提案を行い、数値計算によって解の幾何学的特性、解析過程の合理性について検証する。

この手法を用いれば、面外方向解析の収束により、等張力の条件を満たした多面体釣合解であることが担保され、面内方向解析によって合理的な節点配置が可能となる。また、極小曲面を目的解とした解析では、メッシュ分割の細分化によって、表面積最小解と内圧ゼロの自己釣合解が同一に収斂するため、これを以って初期メッシュ分割密度の適否を判定することができる。さらに、増分解析手法としてサイマルコントロール法を適用した場合、軸力線要素の線長平均化作用により、変位増分幅を相当に大きくとるこ

とが可能となり1自由度構造系への低次元化を上回る演算時間短縮効果が得られる結果となった。

2. 接線剛性法による形態解析

2.1 接線剛性方程式

互いに独立な要素端力（線要素の場合は1つ、三角形膜要素の場合は3つ）の組を要素端力ベクトル $\mathbf{S}$ とし、これと三次元空間に固定された基準座標系との間の平衡条件マトリックスを $\mathbf{J}$ とすれば、基準座標系表示の外力としての節点力ベクトル $\mathbf{U}$ は、

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

となり、この釣合条件式の変分をとると以下のように接線剛性方程式を得ることができる。

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{K}_0$ は要素座標系内における要素挙動に起因する接線要素剛性、 $\mathbf{K}_G$ は要素の剛体変位に起因する接線幾何剛性である。また、 $\delta\mathbf{u}$ は基準座標系表示された節点変位ベクトルである。

2.2 要素ポテンシャル関数

接線剛性法では、一般の有限要素法のように基準座標系から直接要素内のひずみを参照し、変位—ひずみ間の幾何学的非線形性を定式化するのではなく、要素端に離散化された互いに独立な要素端力と基準座標系表示の節点力との間の非線形性を線形の接線幾何剛性により収斂させる手法である。よって、要素内の有限ひずみについて煩雑な展開をする必要は無く、変形後の要素端節点座標から要素端力を厳密に計算することが出来れば、要素の挙動を任意に定めて用いることが可能である。たとえば、

- ・ 膜張力一定の三角形石鹼膜要素
- ・ 軸力一定の定軸力線要素
- ・ 軸力が要素長に比例する線長比例軸力線要素

などを同一のアルゴリズム内で用いることが出来、またこれらの要素を組み合わせで解析することも可能である。

ここで、要素座標系内における要素挙動を規定するため、要素ポテンシャルを要素長、面積などの要素に関する幾何学量の関数として定義する。要素ポテンシャルを定義することは、要素に「仮想」の剛性を設定することと等価であり、材料の剛性とは無関係に任意の関数を定義しても、そこで規定された要素挙動に整合する釣合曲面が得られることになる。

いま、要素ポテンシャル P に対して、要素の形状を規定する上で互いに独立となる要素寸法の組を $\mathbf{s}$ とすれば、

$$\mathbf{S} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{s}} \quad (3)$$

のように要素端力が得られる。

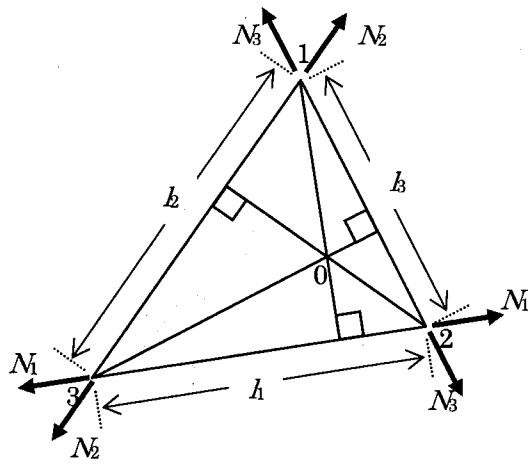


図-1 三角形石鹸膜要素¹⁰⁾

2.3 三角形石鹸膜要素

三角形要素の面積を A , 単位幅膜張力を σt (σ = 膜応力, t = 膜厚) として, 要素ポテンシャルが面積 A に比例するものと定義すれば,

$$P = \sigma t A \quad (4)$$

となる. これに対して, 図-1 に示したように, 独立な要素寸法の組を三角形要素の三つの辺長とした場合, 独立な要素端力は,

$$N_i = \frac{\partial P}{\partial l_i} = \frac{1}{2} \sigma t n_i \quad (i=1,2,3) \quad (5)$$

のように各辺に沿う方向の力となり, これは文献¹⁰⁾における三角形石鹸膜要素の辺張力と同じものになる. ここで, n_i は三角形要素の垂心 (0 点) から各頂点までの距離である. よって, 式(2)における接線幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ は, 三角形トラスブロックの場合と同じになり,

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{G2} + \mathbf{k}_{G3} & -\mathbf{k}_{G3} & -\mathbf{k}_{G2} \\ -\mathbf{k}_{G3} & \mathbf{k}_{G3} + \mathbf{k}_{G1} & -\mathbf{k}_{G1} \\ -\mathbf{k}_{G2} & -\mathbf{k}_{G1} & \mathbf{k}_{G1} + \mathbf{k}_{G2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_{Gi} = \frac{N_i}{l_i} (\mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T), \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

のように表示できる. ここで, $\boldsymbol{\alpha}$ は各辺の方向余弦ベクトル, $\mathbf{e}$ は 3×3 の単位マトリックスである. したがって, 三角形石鹸膜要素の接線剛性方程式は,

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_G^s \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

と書くことができる.

なお, ここでは文献⁸⁾における考察に倣い, 石鹸膜要素の要素力剛性 $\mathbf{K}_0$ は接線幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ に比べて非常に小さいものと考え, 式(2)に $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$ を代入して計算を行うことにする.

2.4 線長関数軸力線要素

ケーブル材やトラス材などの 1 次元部材によって構成される構造系の形態解析に関しては, これまでにも軸力密度を指定する方法¹⁴⁾や滑車節点を用いる方法¹⁵⁾などが提案されている.

いま, 節点 1 と節点 2 を結ぶ線材要素の要素ポテンシャルが線長 l のべき乗に比例すると定義すれば, 要素ポテンシャルの線長による 1 階微分で軸方向の要素端力が得られることになる. たとえば,

$$P = Cl^n \quad (9)$$

となり, これに式 (3) を適用すれば,

$$N = nCl^{n-1} \quad (10)$$

のように軸力線要素の軸力 N が得られる. なお, C は要素力係数であり, 全要素に亘って C および n を一定とした自己釣合系 (節点外力 = 0) では C の値にかかわらず同一の解が得られる. また, この軸力線要素の方向余弦ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}$ とすれば, 式(1)は次式のように書き直すことができる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} N \quad (11)$$

従って, これを式(2)に代入すれば,

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_T^L \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_T^L = nCl^{n-2} \begin{bmatrix} \mathbf{e} + (n-2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T & -\mathbf{e} - (n-2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T \\ -\mathbf{e} - (n-2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T & \mathbf{e} + (n-2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる.

式(5)において, $n=1$ の場合は要素寸法の変化にかかわらず軸力が一定となる定軸力線要素となり, 式(7)は, 通常のトラス部材の接線幾何剛性と一致する. よって, 式(2)に $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$ を代入したことで等価となり, 軸力を指定した形態解析が可能となる.

また, 式(9)において, $n=2$ とした場合は, 要素の長さに軸力が比例する線長比例軸力線要素となり, 式(12)は完全に線形になる. $n>2$ の場合は, 非線形式となり反復計算を要することになるが, n の次数が大きくなるほど, 解曲面における全要素の線長が揃う傾向にあることがわかっている⁹⁾.

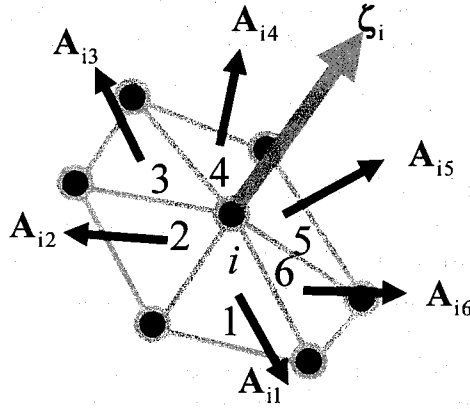


図-2 要素の面積ベクトルと節点の面外方向

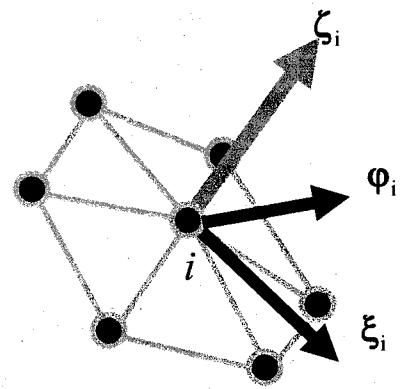


図-3 面外方向とこれに直交する面内2方向により定義された節点座標系

3. 面内外並列計算のための節点座標系の定義

3.1 面外方向の定義と石鹸膜釣合系の投影

石鹸膜曲面は物理的には面内方向への剛性を持たないため、面外方向の不均衡力が収束すれば、石鹸膜の等張力条件を満たした多面体釣合解であると考えて問題ない。したがって、理論上の目的解である石鹸膜曲面上に節点があればよいということになり、節点群としての解は無数に存在すると考えられる。

以上の考察により、鈴木ら⁹⁾は石鹸膜要素によって発生する釣合系を面内方向1自由度系に低次元化処理する手法を提案しており、著者らはさらにこの自由度の方向を常に曲面の面外方向に設定することにより合理的な石鹸膜形態解析を行っている⁸⁾。

ここでは、以下のように面外方向を定義する。図-2に示すように節点*i*に*m*個の要素(*j*=1~*m*)が繋がっているとす(図-2では6個の要素が繋がっている場合を示している)。要素*j*の面積ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とした場合、節点*i*は内圧荷重の1/3を負担するので、これに対応する各要素の面積ベクトルは、次式となる。

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\mathbf{a}_{ij}}{3} \quad (14)$$

また、節点*i*における曲面の面外方向余弦ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_i$ は、

$$\boldsymbol{\zeta}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij}}{\left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right|} \quad (15)$$

と表せるので、式(8)の接線剛性方程式は、

$$\delta \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1^T & & \\ & \boldsymbol{\zeta}_2^T & \\ & & \boldsymbol{\zeta}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_G^S \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1 & & \\ & \boldsymbol{\zeta}_2 & \\ & & \boldsymbol{\zeta}_3 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

のように、1節点1自由度系に投影・変換できる。

3.2 面内方向の定義と軸力線釣合系の投影

前述のように、石鹸膜形態解析においては、面外方向の不均衡力が収束すれば、等張力条件を満たした多面体釣合解と見做せる。よって、常に最適な面内方向の節点配置を計算によって求めることができれば、目的とする解曲面を的確にかつ効率的に表現することが可能となる。

本論文では、要素長を揃える効果が期待できる軸力線要素を、三角形石鹸膜要素の各辺に沿うように配し、これによって発生する釣合系を、各節点の面外方向に直交する平面(これを面内方向と定義する)に投影する手法を提案する。

節点*i*の面外方向 $\boldsymbol{\zeta}_i$ に直交する任意の二方向を $\boldsymbol{\phi}_i$ 、 $\boldsymbol{\xi}_i$ とすれば、式(12)の接線剛性方程式は

$$\delta \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^T \\ \boldsymbol{\phi}_1^T & & \\ & \boldsymbol{\xi}_2^T & \\ & & \boldsymbol{\phi}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_T^L \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^T & \boldsymbol{\phi}_1^T \\ & \boldsymbol{\xi}_2^T & \boldsymbol{\phi}_2^T \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

の変換により面内方向に投影される。これと式(16)の変換によって各節点に追従して移動する節点座標系、

$$\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T \quad (18)$$

に関して、式(16)を全節点に亘って重ね合わせた全体接線剛性方程式と、式(17)を全節点に亘って重ね合わせた全体接線剛性方程式を同時に解き、得られた解によって次段階の不均衡力を算出する反復計算のアルゴリズムとなる。

したがって、面外方向不均衡力がゼロに収束することによって、石鹸膜の等張力条件を満たした釣合解であることが担保される。また、面内方向不均衡力がゼロに収束することによって、目的とする石鹸膜曲面上での自己釣合系が得られ、1自由度系による多面体釣合解に比べて、メッシュの大きさ、形状が揃った、曲面の近似精度が高い多面体釣合形状となる。

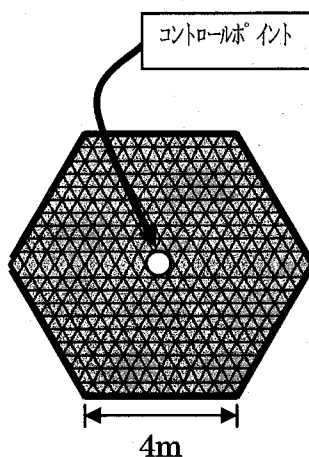


図-4 正六角形初期平面

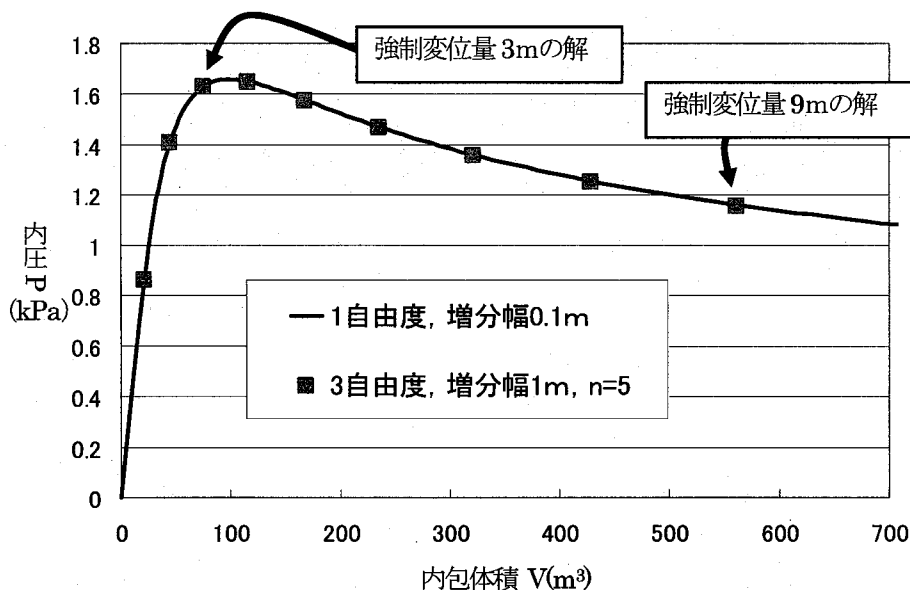


図-5 内圧—内包体積曲線

4. 空気圧によって膨張する石鹸膜曲面の解析

4.1 面外1自由度系と面内軸力線併用3自由度系

正六角形の固定境界を一边10分割した、図-4に示すような初期平面の中央にコントロールポイントを設定し、鉛直上方に強制変位を与える。なお、ここでは三角形石鹸膜要素の単位幅膜張力は3.0kN/m、軸力線の要素端力係数 $C=1$ としている。図-5は、サイマルコントロール法による強制変位の増分幅を0.1mとしたときの面外1自由度系解析と同じく増分幅を1mとしたときの面内軸力線併用3自由度系解析($n=5$)の内圧—内包体積曲線を比較したものである。これによれば、石鹸膜曲面の釣合系での仕事の対である内圧と内包体積の関係においては、両者はほとんど一致している。

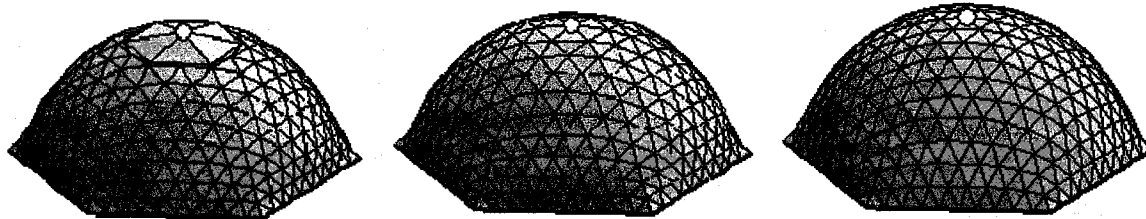
図-6は、増分幅を0.5mおよび0.1mとした面外1自由度系解析(図-6[a], [b])と、増分幅を1m、軸力線の次数 $n=5$ とした面内軸力線併用3自由度系(図-6[c])において、強制変位量が3mとなるまで増分解析したときの解の形状を比較したものである。面内1自由度系では、増分幅を大きくすると、反復計算の1回目においてコントロールポイント付近の要素面積が増分幅に応じて大きくなり、石鹸膜は面内方向に剛性を持たないため、一旦大きくなった要素面積を保持したまま、面外方向の釣合位置に収束しようとする。したがって、増分幅0.5mの場合は曲率の小さなクラウン部付近で極端に大きな要素と極端に小さな要素が隣り合わせになるといった、不合理な形状の解となっている。また、これ以上大きな増分幅を取ると計算不能になってしまう。よって、この場合、面外1自由度系で有意な曲面近似解を得ようとするならば、増分幅は0.1m以下にする必要がある。一方、面内軸力線併用3自由度系の解析では増分幅を1mと比較的大きく設定しても安定に増分解析を進めることが可能である。図-7に示すように強制変位量9mまで解析したときの通常のパソコンによるCPUタイムを

比較すれば、面外1自由度系解析・増分幅0.1m(図-7[b])では約119秒だったのに対し、面内軸力線併用3自由度系解析・増分幅1m・ $n=5$ (図-7[e])の場合では約63秒であった。3自由度系の連立一次方程式の元数は3倍であるにもかかわらず、面内軸力線を配したほうが2倍の計算効率が得られる結果となった。なお、面外1自由度系では、増分幅の違いによって、曲面上の節点配置が異なる無数の多面体釣合解が存在するのに対して、面内軸力線併用3自由度系では、面内方向に面外方向とは独立した軸力線釣合系を持つため、軸力線の次数が同じであれば、変位増分幅によらず同一の節点配置となる。

4.2 軸力線の次数 n の効果について

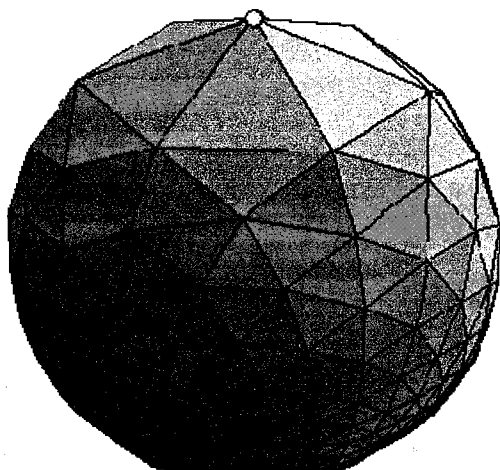
軸力線の次数 n の最適値について検討するため、強制変位量9mまで増分解析を行なったときの解について前述の面外1自由度系の条件に加えて、次数 $n=1\sim5$ までの条件で比較した(図-7)。

表-1は要素面積のばらつきを比較したものであり、要素面積の標準偏差を平均値で除した σ/s をばらつきの指標とした。これによると、 n が大きくなるにつれてばらつきが抑えられていることが明白であるが、 $n=1$ のとき(図-7[c])は、面内軸力線が軸力一定の条件となり、要素としての剛性を持たないため、面外1自由度系の場合とばらつきの度合いはさほど変わらない。しかし、 $n=2$ としたとき(図-7[d])には σ/s の値は $n=1$ のときの約半分となり、解の形状もクラウン部付近の要素形状が揃った滑らかな形状となっている。よって $n\geq 2$ とすれば、面内軸力線併用3自由度系の合理性が反映された、滑らかな曲面を近似した多面体釣合解が得られると考えられる。一般には曲面の曲率に応じた要素分割が合理的と考えられているが、要素面積のばらつきを抑えた図-7[e]の $n=5$ の解でさえも、境界部付近の曲率が急変する部分では細分割されており、その意味での合理性も確保されていると云える。

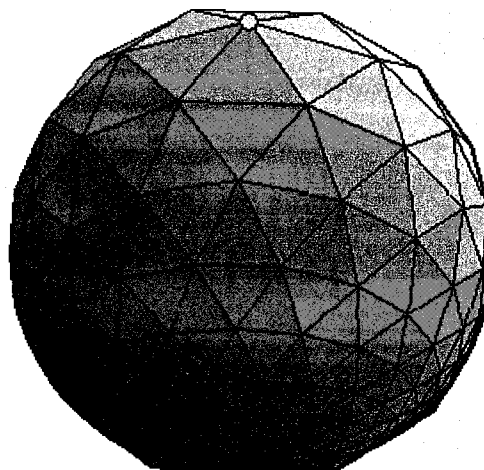


[a] 面外1自由度系,増分幅=0.5m 内包体積=74.6m³ [b] 面外1自由度系,増分幅=0.1m 内包体積=75.3m³ [c] 面内軸力線併用3自由度系,増分幅=1m n=5, 内包体積=75.4m³

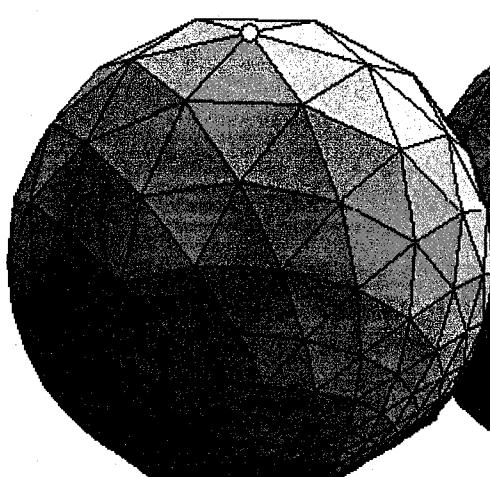
図-6 強制変位量=3mのときの解形状の比較



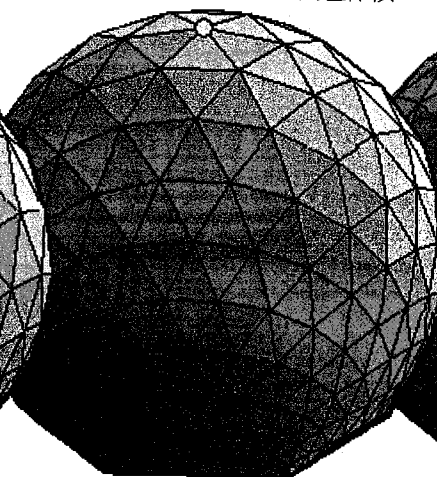
[a] 面外1自由度系 増分幅=0.5m
内包体積=560.8m³



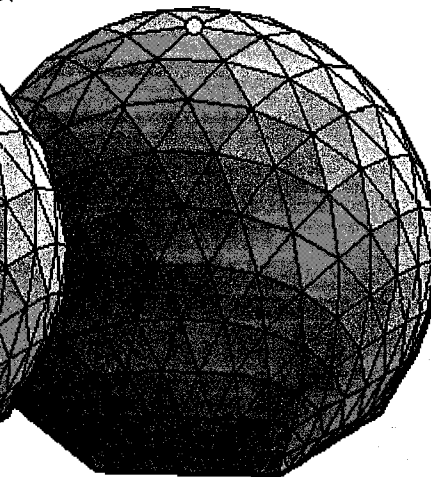
[b] 面外1自由度系 増分幅=0.1m
内包体積=555.1m³



[c] 面内軸力線併用3自由度系
n=1, 内包体積=555.7m³



[d] 面内軸力線併用3自由度系
n=2, 内包体積=560.8m³



[e] 面内軸力線併用3自由度系
n=5, 内包体積=560.7m³

図-7 強制変位量=9mのときの解形状の比較 (3自由度系の増分幅は全て1m)

表-1 強制変位量=9mのときの要素面積のばらつき

解析手法	n	増分幅(m)	要素面積(m ²)		σ/s
			標準偏差 σ	平均値s	
面外1自由度系		0.5	0.790	0.484	1.632
面外1自由度系		0.1	0.634	0.488	1.301
面内軸力線併用3自由度系	1	1	0.605	0.488	1.239
面内軸力線併用3自由度系	2	1	0.311	0.490	0.635
面内軸力線併用3自由度系	3	1	0.254	0.490	0.517
面内軸力線併用3自由度系	4	1	0.229	0.490	0.467
面内軸力線併用3自由度系	5	1	0.215	0.490	0.438

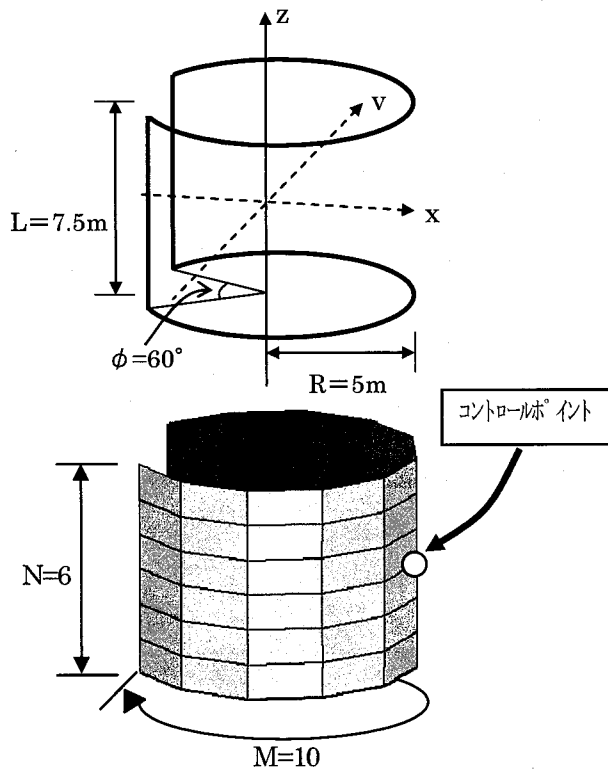


図-8 Wiener 境界の寸法と要素分割

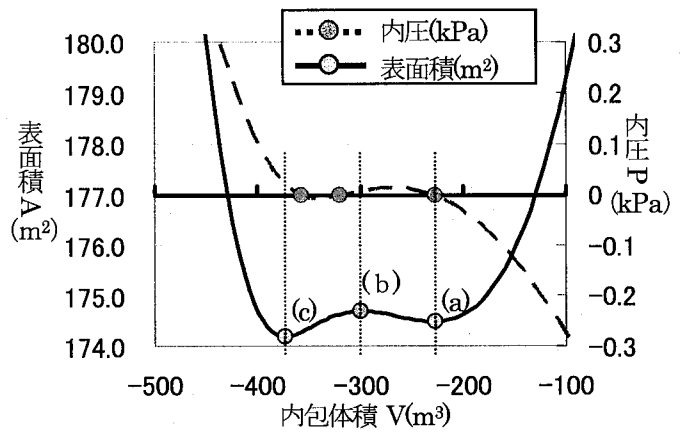


図-9 表面積および内圧と内包体積の関係 ($N=6, M=10$)

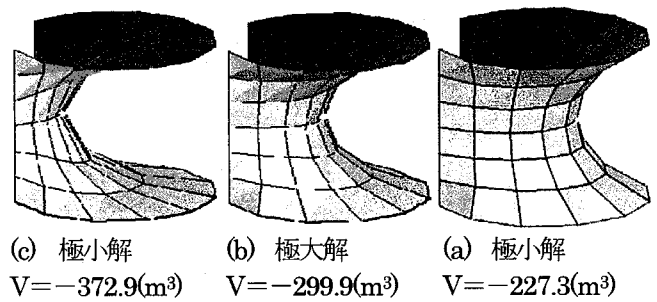


図-10 $N=6, M=10$ のときの多面体約合解形状

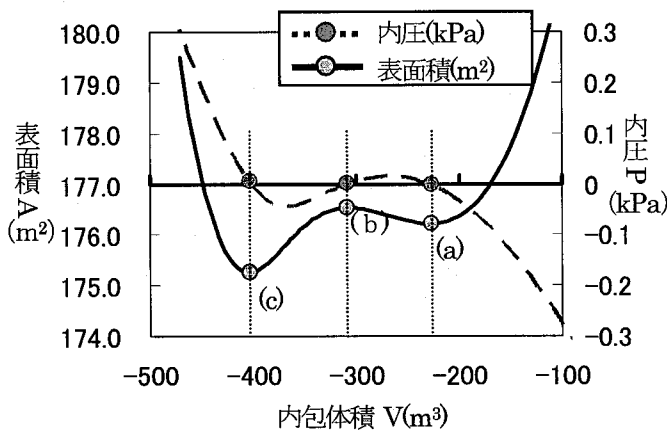


図-11 表面積および内圧と内包体積の関係 ($N=12, M=20$)

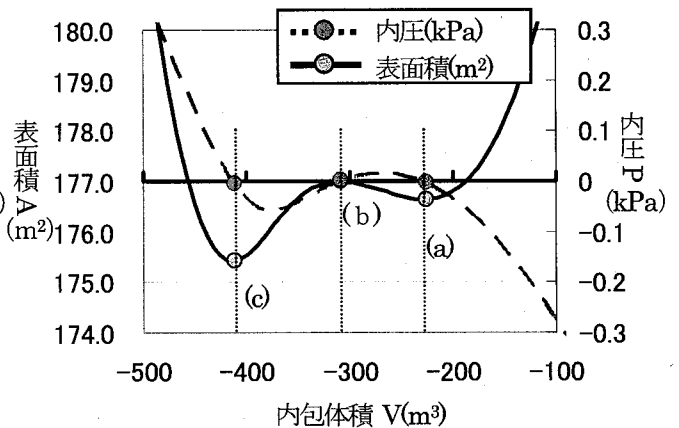


図-13 表面積および内圧と内包体積の関係 ($N=24, M=40$)

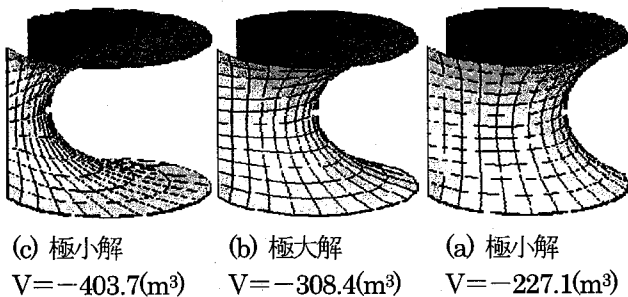


図-12 $N=12, M=20$ のときの多面体約合解形状

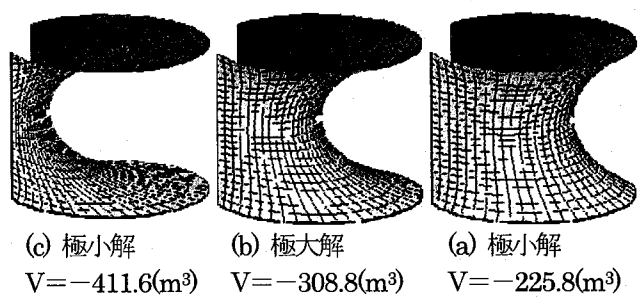


図-14 $N=24, M=40$ のときの多面体約合解形状

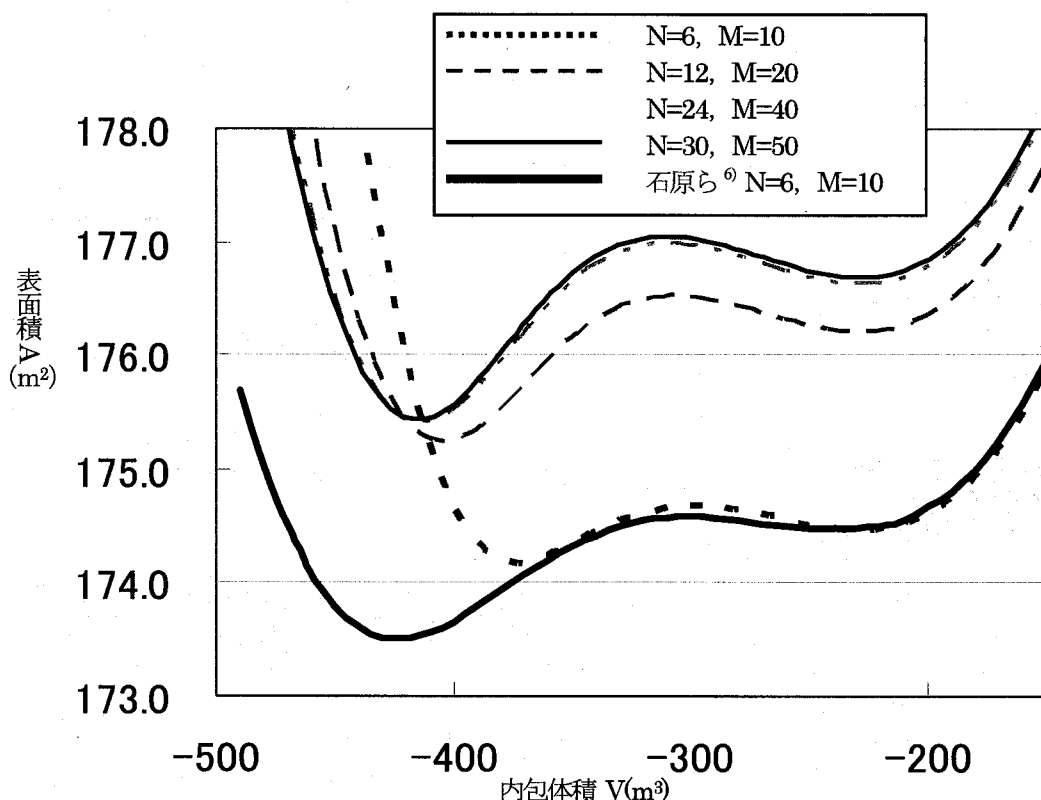


図-15 要素分割数の違いによる表面積-内包体積関係の比較

5. 複雑な境界形状を与えた場合の極小・極大曲面解析

式(4)からも明らかなように、石鹸膜曲面が持つエネルギーはその表面積に比例する。したがって、内圧=0のときに表面積が極値をとるため、石鹸膜曲面のことを数学的には「極小曲面」と呼称される。図-8上図に示す Wiener 境界は二つの極小値と一つの極大値を持つことで知られている。ここでは、面内軸力線を配した図-8下図の初期状態(文献⁹⁾の四辺形石鹸膜要素を使用)から、サイマルコントロール法によって図中(-x)方向に強制変位を与える増分解析を行ない考察する。

なお、この増分解析に面外1自由度系を適用した場合には、要素分割が疎なときには、一つ目の極小解を経た直後に発散する。これは、局所的に曲率が大きくなり要素形状の不均衡が生じることと、エネルギー的に不安定な極大解に向かうことが原因となっていると考えられる。

図-9は縦方向分割をN=6、円周方向分割をM=10としたときの表面積-内包体積の関係および内圧-内包体積の関係を示しており、図-10はこのときの各極値解の形状を示している。同様に、図-11および図-12はN=12、M=20と分割した場合、図-13および図-14はN=24、M=40と分割した場合である。

この結果によれば、図-11、図-13では表面積-内包体積曲線の極値と内圧=0の点が比較的良好に一致しているのに対して、図-9では若干のズレが生じている。面内軸力線の配置は増分段階ごとに全節点を面内移動させて要素形状を修正する効果をもたらすため、図-9の内圧-内包体積

曲線は、無数に存在する多面体釣合解の釣合経路間を増分ごとに「強制的に」飛び移りさせてこれらの解をつなぎ合わせたものと考えることができる。よって、この要素分割密度(N=6,M=10)は十分に曲面を近似できるだけの条件を有していないと云うことになる。図-15は要素分割の違う表面積-内包体積関係の結果を重ね描きして比較したもので、当然のことではあるが、分割を密にすれば一つの曲線に収斂していく様子が判る。

以上により、表面積-内包体積曲線の極値と内圧=0の点の一致が、多面体釣合解が滑らかな石鹸膜曲面を近似しているか否かのひとつの指標になるものと考えられる。また図-15には、面積汎関数を用いて求めた石原ら⁹⁾の結果(N=6,M=10)も併せて示しているが、極大・極小の位置はよく捉えているものの、やはりこの分割数では石鹸膜曲面を精度よく近似しているとはいえない。

6. まとめ

本論文では、滑らかな石鹸膜曲面を近似した多面体釣合解を求めるための一手法として、面外方向には三角形等張力要素による石鹸膜形態解析、面内方向には線長関数軸力線要素解析を、並列に行う方法を提案した。

本手法の特徴と、数値計算結果から得られた石鹸膜多面体釣合解についての知見を以下にまとめる。

- 1) 三角形等張力要素によって構成される多面体釣合解および経路は、同一の要素分割であっても、変位増分などの違いによって無数に存在し、面外1自由度

系として増分解析を行なった結果得られる釣合経路はそのうちのひとつであるに過ぎない。

- 2) サイマルコントロール法による増分解析を行なう際に、面外1自由度系とした場合にはコントロールポイント付近の要素が大きくなりすぎることにより有意な解を得ることが困難となる。またこれを解消するためには変位増分幅を相当に小さく取らなければならず、計算効率が悪くなる。これに対して、面内軸力線解析を併用した3自由度系とした場合には、要素面積のばらつきが抑えられた滑らかな曲面近似解が得られ、かつ、変位増分を比較的大きく取っても着実な増分解析が可能となりトータルでの計算時間短縮に寄与する。また、使用する軸力線要素の次数については $n \geq 2$ であれば、滑らかな曲面近似が期待できる。
- 3) 極大/極小曲面を求める解析においては、面内軸力線解析を併用した3自由度系として計算すれば、エネルギー的に不安定な極大解を超えて経路追跡を行なうことが可能となる。また、表面積-内包体積曲線の極値と内圧=0となる点の一致が、滑らかな曲面近似のためのひとつの指標となると考えられる。

付録

本論文で用いている増分解析手法であるサイマルコントロール法については、著者らの文献^{10),11),13)}で既に詳しく述べているが、ここでは内圧平均化の考え方によるサイマルコントロール法の概略について再録する。

三次元空間内に安定な境界条件とともに設定した初期平面に対して、内圧荷重を載荷して膨張曲面を求める場合や、本論文のWiener境界のように複数の極値曲面が存在する場合には、内包体積の増加とともに内圧および曲率が増大する加圧膨張過程の解は得られても、内圧が極大値をとった後の減圧膨張過程の解を得ることはできない。また、内圧荷重下において、全ての自由節点に対して変位制御解析を適用することもできない。

しかしながら、任意の一節点の座標値と、その点を含む解曲面に対して釣り合うべき内圧を知ることができれば、曲面形状を決定することが可能となる。よって、強制変位を与えると同時に、不平衡釣合形状より算出される平均換算内圧を載荷することにより、全自由節点の不平衡力と変位制御点の反力が収束すれば、変位制御点を含む解としての曲面形状を得ることができる。本論文では、このような増分解析手法をサイマルコントロール法と呼ぶこととし、これによって減圧膨張過程の形態解析を行っている。

変位制御点および全ての自由節点について、その節点に作用する要素端力の合力に対して釣り合うべき内圧(=換算内圧)を算出し、この平均値として平均換算内圧を求める。

いま、図-16に示すように節点 i に m 個の要素が繋がっているとす。要素 j の i 端における要素端力を $\mathbf{S}_{ij}$ とすれば、これの基準座標系への変換は、要素 j に関する平衡条

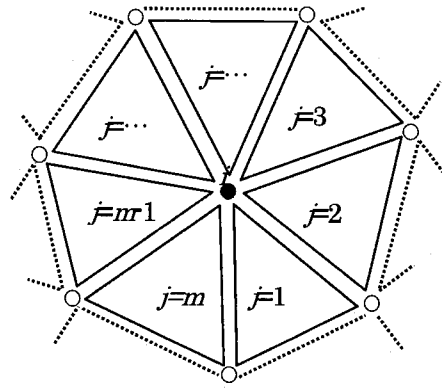


図-16 節点 i に繋がる要素¹⁰⁾

件マトリックス $\mathbf{J}_{ij}$ により次式のように表せる。

$$\mathbf{U}_{sij} = \mathbf{J}_{ij} \mathbf{S}_{ij} \quad (20)$$

よって、 i 点における要素端力の合力は次式となる。

$$\mathbf{U}_{si} = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_{sij} \quad (21)$$

石鹸膜曲面は曲面の法線方向にしか剛性を持たないので、面外方向余弦ベクトルを本文中の式(15)の ζ_i として、要素端力の合力の法線方向成分を取り出せば、

$$\bar{U}_{si} = \zeta_i^T \mathbf{U}_{si} \quad (22)$$

のようになる。ここで、内部から作用する等分布の圧力(内圧)を p とすれば、節点 i において満たすべき、曲面法線方向の釣合条件は、

$$p \left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right| - \bar{U}_{si} = 0 \quad (23)$$

となる。よって、この条件を満たす内圧を節点 i における換算内圧 p_{Ci} ($i=1, 2, \dots, n$) とすれば、以下のように表示できる。

$$p_{Ci} \equiv p = \bar{U}_{si} / \left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right| \quad (24)$$

内圧平均化サイマルコントロール法による石鹸膜形態解析の目的解は、全節点における換算内圧が等しくなることであるので、変位制御点および曲面上の全自由節点について次式のように平均値を計算し、

$$p_{AV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{Ci} \quad (25)$$

これを「平均換算内圧」として反復段階ごとに更新して全節点に再配分する。したがって、この平均換算内圧は通常の内圧荷重の場合に比べ、非常に厳しい条件の追従力荷重となるが、極端に大きな変位制御増分を与えた場合や、物理的に存在し得ないような外部圧力を設定した場合などを除けば、着実に収束し、結果として一定の内圧を受ける釣合曲面が得られることになる。

参考文献

- 1) Fujimori, S.: Minimal surfaces in euclidean 3-space and their mean curvature 1 cousins in hyperbolic 3-space. *An. Acad. Bras. Ciênc.*, vol.75, no.3, pp.271-278, 2003.
- 2) Masatoshi Kokubu, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada: Minimal surfaces that attain equality in the Chern-Osserman inequality, *Contemporary Mathematics* 208, American Mathematical Society, pp. 223-228, 2002.
- 3) Ishii, K., : Analytical shape determination for membrane structures, *Proc. of IASS Congress of Sept., II*, pp.67-74, 1976.
- 4) 石井一夫: 膜構造の形状解析 (形状決定の問題) 概説, 膜構造論文集, No.3, pp.83-108, 1989.
- 5) 鈴木俊夫, 半外裕彦: 極小曲面の変数低減による有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No.425, pp.111-120, 1991.
- 6) 石原競, 八木孝憲, 萩原伸幸, 大森博司: 極小曲面解析による膜構造の形状解析, 日本建築学会構造系論文集, pp.61-70, 1995.
- 7) 半谷裕彦: 構造物の形態解析, 土木学会論文集, No.501/I-29, pp. 11 - 20, 1994.
- 8) 劉磊, 帶屋洋之, シーウエイ, 後藤茂男: 石鹼膜四面体要素による等張力曲面解析, 膜構造研究論文集94, pp.87-92, 1994.
- 9) Ijima K., Obiwa H., Formfinding of single layer structure by measure potential function of element, *Structural morphology*, pp.249-256, 1997.
- 10) 帶屋洋之, 井嶋克志, 後藤茂夫, 荒牧軍治, 川崎徳明: サイマルコントロール法による膨張曲面の形態解析, 日本計算工学会論文集, Vol.4, pp.37-44, 2002.
- 11) 帶屋洋之, 井嶋克志, 井口真一: 形状依存追従力を受ける膜構造物のための等張力曲面形状に関する研究, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.79-86, 2005.
- 12) 帶屋洋之, 井嶋克志, 村上卓志, 西田博之, 井口真一: 軸力線要素置換による任意境界形状最小曲面の形態解析, 膜構造研究論文集 2005, No.19, pp.49-54, 2005.
- 13) 帶屋洋之, 井嶋克志, 西極春幸: 膜張力平均化サイマルコントロール法による石鹼膜構造解析, 応用力学論文集, Vol.9, pp.33-40, 2006.
- 14) Schek, H.J. : The force density method for form finding and computation of general networks. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 3, pp.115-134, 1974.
- 15) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.

(2007 年 4 月 12 日 受付)