

計算力学における高速多重極法の 2,3 の話題

Some Topics on Fast Multipole Methods in Computational Mechanics

西村直志*

Naoshi NISHIMURA

*正会員 工博 京都大学教授 情報学研究科複雑系科学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

Fundamentals of Fast Multipole Method (FMM) and FMM accelerated Boundary Integral Equation Method (BIEM) are presented. Some developments of FMM in computational mechanics related to elasticity, Helmholtz' equation, periodicity, parallelisation, etc. are discussed.

Key Words : FMM, Computational Mechanics, Elasticity, Helmholtz' equation, Periodicity, Parallelisation

1. 始めに

境界積分方程式法 (通常、境界要素法と呼ぶことが多い) は古い歴史を持った数値計算法である。線形定数係数の偏微分方程式の有力な数値計算法の一つであって、考える領域の境界だけで解析を行ない得る特徴がある。数値解法としての系統的な研究は多分 Kupradze らの Tbilishi の group に始まるが (詳しくは、小林ら¹⁾を参照されたい) 計算力学における境界積分方程式法が広く研究され始めたのは 1960 年台後半である。当初は、境界積分方程式法は問題の次元を一つ下げるので、大規模問題に有利であると素朴に信じられていた。その後、「境界要素法」ブームが起きたこともあったが、現在では、少なくともわが国の計算力学の分野では広く支持されているとは言えない状況である。

「境界要素法」の人氣が高まらなかった理由の一つとして、実際に code を動かしてみると、予想外に計算時間がかかり、「境界要素法」は遅いという印象を与えたことを上げることができるかも知れない。実際、得られる係数行列は密であるので、未知数の数が N であるとする、係数行列を作るだけで $O(N^2)$ の計算をしなければならない。しかも、係数は複雑かつ特異性を持つ特殊関数の積分で与えられ、評価に時間がかかる。更に、当時境界積分方程式法のソルバとして主流であった線形方程式の直接解法を用いると、計算量は $O(N^3)$ まで増える。一方差分法や有限要素法は、行列がバンド性を有しているので、係数行列の作成に $O(N)$ 程度の計算時間しか必要とせず、しかも係数は定数であったり、簡単な多項式の積分であったりするので、非常に高速に計算できる。こうして、境界積分方程式法の未知数の数が少ないという利点が活かされるのは、小さい問題だけであることが明らかになってきた。

しかし「境界要素法」ブームの喧騒の影で、新しい動きが起こっていた。それをもたらしたのは Rokhlin

が 1985 年に発表した高速多重極法 (Fast Multipole Method (FMM)) の論文²⁾である。この論文は 2 次元 Laplace 方程式の積分方程式の高速解法に関するもので、今日 FMM と呼ばれている手法のエッセンスをほとんど含んだ画期的なものであった。実際、これまでの境界積分方程式法が、係数行列を作るために $O(N^2)$ の計算をしなければならなかったのに対して、Rokhlin の FMM によれば境界積分方程式法は $O(N)$ の計算を何回か行なうだけで求解可能な手法となる。更に Greengard は Rokhlin の FMM が多体問題において有用であることを見抜き、多粒子系の解法としての FMM の研究を行なった³⁾。この研究は多くの注目を集め、FMM は一躍 20 世紀を代表するアルゴリズムの一つと呼ばれるまでになった⁴⁾。その後、Maxwell 方程式に代表される Helmholtz 系の偏微分方程式における FMM が開発され⁵⁾、波動方程式⁶⁾や、熱方程式⁷⁾へも拡張されるなど 20 世紀の最後の数年から 21 世紀初頭にかけては FMM の理論が急激に発達した期間である。

元来積分方程式の高速解法として提案された FMM であるから、境界積分方程式法を有する計算力学においても FMM の研究が進んだのは言うまでもない。特に 21 世紀に入ってからポテンシャル問題や、線形弾性問題といった基本的な問題は言うに及ばず、積分方程式法が得意とする亀裂問題や、波動問題においては顕著な発展があった。

筆者は、2002 年に高速多重極法に関する review を書く機会を得た⁸⁾。当然、その内容の多くは 20 世紀になされた研究の概観となっている。従って、どちらかというと、計算力学的な応用よりも、FMM の基礎に関わる内容を中心に書かれている。一方この review を書いて以後、我々のグループでは FMM の計算力学への応用に関する多数の論文を書いてきた。そこで本稿では、我々のグループで得た成果を元に、FMM の計算力学への応用について概説する。具体的には、静弾性

学、Helmholtz 方程式、動弾性学 (時間域) および並列化を取り上げ、それぞれの FMM の定式化の概要と代表的な数値結果を示す。なお、本稿では所々に「2002 年以後」と言った表現を用いるが、これは件の review 以後と言う意味である。

2. 多重極法とは何か

本稿は、まず FMM の概説⁸⁾から始めることにしたい。

2.1 基本的な考え方

境界積分方程式法は、考える (初期値) 境界値問題を等価な境界積分方程式に書き換え、これを解くことによって元の問題を解く数値解法である。今、元の問題が次の積分方程式に書き換えられたものとする。

$$f(x) = \int_S K(x, y) \phi(y) dy \quad x \in S \quad (1)$$

ここに f は与えられた S 上の関数であり、 K は核関数、 ϕ は未知関数である。核関数 K は $x = y$ において Dirac の delta 関数を含んでいても良いものとし、(1) の性質は悪くないものとする。

境界積分方程式法においては、未知関数 ϕ を適当に離散化し、(1) を選点法、Galerkin 法などによって、 N 個の ϕ の節点値 ϕ_i ($i = 1, \dots, N$) に関する線形方程式に帰着させ、これを解く。今、得られた線形方程式の解法として GMRES や Bi-CGSTAB などの反復法を用いるものとする。その際、(1) を離散化して解くためには反復法の各ステップにおける解 ϕ の候補と係数行列の積を計算するための道具を用意すれば良い。普通の境界積分方程式法を用いると、このために $O(N^2)$ の計算が必要になり、このままでは有限要素法や差分法に対抗できる算法にはなり得ない。FMM はこの操作を $O(N)$ 程度の計算量で実行することを可能にした。以下では FMM がどのようにして $O(N)$ の算法を実現するかについて概説する。

2.2 FMM の数学的道具

Greengard & Rokhlin の初期型 FMM は、次の数学的な道具から成り立っている。

(1) 核関数の多重極展開

核関数 K を次のように多重極展開する。

$$K(x, y) = \sum_n O_n(x - y_0) I_n(y - y_0) \quad (2)$$

ここに y_0 は展開中心である。(2) は、例えば、 $K(x, y)$ を y について点 y_0 周りに Taylor 展開したものであると考えて良い。そうすると、関数 O_n は原点に特異性を持つ関数になる。また I_n は通常は滑らかな関数であり、例えば Taylor 展開の場合には多項式である。通常、(2) のような展開は条件

$$|x - y_0| > |y - y_0| \quad (3)$$

の下で成り立つ。

境界積分方程式法では K を基本解、ないしはそれに関連した関数に選ぶことが普通であるので、 O_n 、 I_n も場の方程式を満たすように選んでおくことが自然である。 O_n は外側の解、 I_n は内側の解とするのが一般的である。

(2) ポテンシャルの多重極展開

式 (1) の離散版の評価が $O(N^2)$ の計算を要する理由は、点 x を決める毎に積分を新たに実行しなければならないことにある。この点を改善するために、核関数の多重極展開を用いる。 S の部分集合 S_0 と S_0 に含まれない点 x (図-1 参照) に対して、(2) を用いると

$$\int_{S_0} K(x, y) \phi(y) dy = \sum_n O_n(x - y_0) M_n(y_0) \quad (4)$$

が得られる。ここに $M_n(y_0)$ は点 y_0 周りの多重極モーメントで、次式で定義される。

$$M_n(y_0) = \int_{S_0} I_n(y - y_0) \phi(y) dy \quad (5)$$

多数の点 x に対して (1) を評価する時に (4) を用いると計算効率が良くなる。実際、(4) に含まれる積分計算はすべて $M_n(y_0)$ の中に現れ、しかも $M_n(y_0)$ は x によらないので、一旦計算しておくで再利用が効くからである。このことを利用した算法がツリー法であり、 $O(N \log N)$ の算法となる。FMM は、ポテンシャルの多重極展開を更に次節で述べるように局所展開することによって $O(N)$ の計算量を実現している。

(3) ポテンシャルの局所展開

関数 O_n は x の近傍であって y_0 から十分離れている点 x_0 の周りで

$$O_n(x - y_0) = \sum_m I_m(x - x_0) c_{m,n}^S(x_0, y_0) \quad (6)$$

のように展開される。ここに、 $c_{m,n}^S(x_0, y_0)$ は $x_0 = y_0$ で特異性を持つ関数である。

式 (4) と (6) から次のようなポテンシャル関数の局所展開が得られる：

$$\int_{S_0} K(x, y) \phi(y) dy = \sum_n L_n(x_0) I_n(x - x_0) \quad (7)$$

ここに、局所展開の係数 $L_m(x_0)$ は多重極モーメントとは次の M2L 公式によって結ばれている：

$$L_m(x_0) = \sum_n c_{m,n}^S(x_0, y_0) M_n(y_0) \quad (8)$$

なお、関数 I_n は

$$I_n(y - y_1) = \sum_m I_m(y - y_0) c_{n,m}^R(y_1, y_0) \quad (9)$$

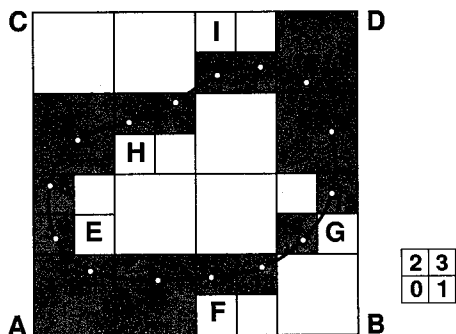
の関係を満たす。ここに y_1 は点であり、 $c_{n,m}^R(y_1, y_0)$ は数である。実際、例えば多重極展開を与えられた微分方程式の解の完全系による展開とすれば、これらは展開中心の変更を表し、Taylor 展開を使っただけであれば、これらは 2 項展開公式に他ならない。

$$M_n(y_1) = \sum_m M_m(y_0) c_{n,m}^R(y_1, y_0) \quad (10)$$
$$L_n(y_1) = \sum_m L_m(y_0) c_{m,n}^R(y_0, y_1) \quad (11)$$

2.3 アルゴリズム

境界積分方程式法における FMM のアルゴリズムは次のようである。

- S を N 個の要素に分割し、 ϕ を通常の境界要素によって離散化する。
- 境界要素の木構造を作る (図-2 参照)。すなわち、 S を含む大きな正方形をとり、これをレベル 0 のセルと言う。レベル l ($l \geq 0$) の親セルの辺を 2 等分することによって 4 個の正方形を得る。それぞれの正方形が境界要素を含んでいればその正方形はレベル $l+1$ のセルとなる。レベル $l+1$ のセルは、ある与えられた数 (M とする) 以上の境界要素を含んでいれば更に 4 等分され、そうでなければ分割を止める。こうするとセルの 4 分木構造ができる。子どものいないセルをリーフと言う。



- (上向きパス): リーフからレベル 2 のセルまで、木構造を上向きにたどりながら、各セルで $M_n(y_c)$ を計算する。ここに、 y_c はセルの中心である。リーフにおいては (5) の定義にしたがって $M_n(y_c)$ を計算し、その他のセルでは子セルのモーメントを M2M で親の中心に移してからこれを加えて親の $M_n(y_c)$ を計算する。この際、(4) に含まれる n に関する無限和は p 項で打ち切る。
- (下向きパス): レベル 2 のセルからリーフ迄、木構造を下向きにたどりながら、各セルで局所展開係数 $L_n(x_c)$ を再帰的に計算する。ここに、あるセルの局所展開係数とは、自分と同レベルで、自分自身と、隣接するセルの、合わせて (最大)9 個のセルを除いた残りに含まれる境界要素からの影響を局所展開した時の展開係数である。

さて、レベル2のセルについては、M2L 公式を使って定義通りに局所展開係数を求める。それ以下のレベルでは、まず親の局所展開係数をL2Lによって自分に移し(ここがFMMのもっとも巧妙な所である)、次にインタラクションリストのセルに対してM2L 公式を使って、これらのセルの影響を加えるとよい。こうすると、(3)が満たされることに注意されたい。

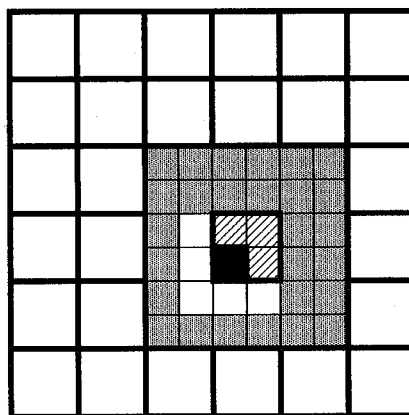


図-3 近接セル、遠方セル、インタラクションリスト

- 最後に、リーフにおいて、近接するセルの影響を直接計算で評価する。遠方のセルの影響は、求めた局所展開係数を用いて局所展開を評価すれば得られる。これらを加えたものがポテンシャルの値である。

- 5 -

Rokhlin³⁾ の FMM をやや簡略化したものである。

2.4 例

以上の議論より、積分方程式に現れる核関数の多重極展開が得られることが、FMM の成功のための必要条件であることがわかる。以下代表的な 2 例を示す。

(1) 3 次元 Laplace 方程式⁹⁾

3 次元 Laplace 方程式の基本解は次式で書ける。

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

基本解 G は次のように多重極展開される。

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n',m'}(\vec{Oy}) \overline{S_{n',m'}(\vec{Ox})} \quad (|\vec{Oy}| < |\vec{Ox}|) \quad (12)$$

ここに、 $\vec{a}$ は a の複素共役であり、 $R_{n,m}(=I)$, $S_{n,m}(=O)$ は x の原点 O から見た極座標 (r, θ, ϕ) によって

$$\begin{aligned} R_{n,m}(\vec{Ox}) &= \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} r^n \\ S_{n,m}(\vec{Ox}) &= (n-m)! P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \frac{1}{r^{n+1}} \end{aligned} \quad (13)$$

と定義される体調和関数である。また P_n^m は Legendre 陪関数である。 $R_{n,m}$ は実は座標の多項式であり、(12) は基本解の Taylor 展開を整理したものに他ならない。

(2) 2 次元 Helmholtz 方程式⁵⁾

2 次元 Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{in } D \quad (14)$$

の基本解は

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (15)$$

と書ける。ここに、 k と $H_0^{(1)}$ は波数、及び 1 種 0 次の Hankel 関数である。Graf の加法定理により¹⁰⁾

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} O^n(\vec{Ox}) I^{-n}(\vec{Oy}) \quad (16)$$

を得る。ここに、 O^n と I^n は Bessel 関数 J_n を用いて

$$O^n(\mathbf{x}) = i^n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad I^n(\mathbf{x}) = (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (17)$$

と定義される。ここに、 (r, θ) は $\mathbf{x}$ の極座標である。

3. 計算力学への応用

3.1 静弾性学の多重極法

線形静弾性学は計算力学の最も基本的な問題であり、計算力学における FMM の中でも早くから研究が始まった。

3 次元線形弾性学の FMM の研究は Hayami and Sauter¹¹⁾ によって始められた。しかし、実用性の高

い 3 次元解析で数値結果の伴う研究は Fu et al.¹²⁾、吉田他¹³⁾ 福井他¹⁴⁾ などが最初である。

これらの定式化は大きく 2 つに分けられ、Fu et al.¹²⁾ が Laplace 方程式の FMM をブラックボックス的に使うことを前提にしているのに対して、吉田他¹³⁾ や福井他¹⁴⁾ は 3 次元静弾性問題の基本解の多重極展開

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \{ \overline{F_{ij,n,m}^S(\vec{Ox})} R_{n,m}(\vec{Oy}) \\ &\quad + \overline{G_{i,n,m}^S(\vec{Ox})} (\vec{Oy})_j R_{n,m}(\vec{Oy}) \} \end{aligned} \quad (18)$$

に基づいている。ここに、

$$\begin{aligned} F_{ij,n,m}^S(\vec{Ox}) &= \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} S_{n,m}(\vec{Ox}) - \\ &\quad \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\vec{Ox})_j \frac{\partial S_{n,m}}{\partial x_i}(\vec{Ox}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$G_{i,n,m}^S(\vec{Ox}) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial S_{n,m}}{\partial x_i}(\vec{Ox}) \quad (20)$$

である。この多重極展開は、基本解の Neuber Papkovich の表現に Laplace 方程式の基本解の多重極展開を代入したものに他ならない。従って、Neuber Papkovich の表現に現れる調和関数と同数の 4 個のモーメントを持つ多重極展開が得られる。

(1) 複雑な境界値問題

最近 FMM による解析は適用範囲を広げ、実問題も解けるようになってきている。現実の大規模問題に近い例として自動車のホイールを想定した解析例を示す¹⁵⁾。境界条件はホイールの中央の軸の部分を固定し、ホイールの一部に、図において上向きに表面力を作用させた。曲げの卓越する問題であるので、変位には区分線形、表面力には区分一定要素を用い、Galerkin 法で離散化した。

得られたホイールの形状を図-4 に示す。なお、図中のグレースケールは表面における J_2 の大きさを表している。

(2) CNT 複合材料への応用 (超巨大問題)

Liu et al.^{16),17)} はカーボンナノチューブ (CNT) 複合材料のモデルとして、弾性体中に棒状の剛体インクルージョンが多数埋め込まれた問題を考えた。具体的には無限弾性中の一部分に多数の棒状の領域を考え、その境界を S_α とする。次の問題を考える。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad S = \bigcup_{\alpha} S_\alpha$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^\infty \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{u} = \text{剛体変位} \quad \text{on } S_\alpha$$

$$\int_{S_\alpha} t dS = \int_{S_\alpha} \mathbf{x} \times t dS = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n$$

n : インクルージョンの数

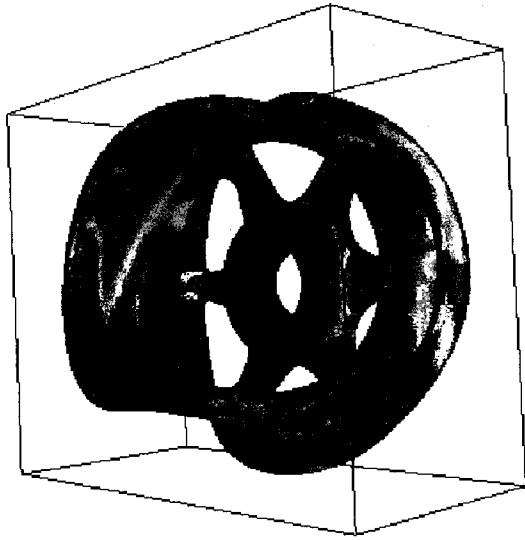


図-4 ホイールの変形

この問題の解は次のように書ける。

$$u(x) = \int_S \Gamma(x-y)t(y)dS_y + u^\infty(x) \quad (21)$$

上式と境界条件より積分方程式

$$d_\alpha + \omega_\alpha \times x = \int_S \Gamma(x-y)t(y)dS_y + u^\infty(x) \quad \text{on } S \quad (22)$$

が得られる。ここに t は S_α 上の未知の表面力、 d_α 、 ω_α は未知定数である。Liu らはこれを前節の高速多重極法で解き、多数のインクルージョンのある領域の周辺の変位や応力から複合材料の巨視的弾性定数を求めた^{16),17)}。図-5 は使用したモデルの一例で、自由度は約 300 万である。図-6 は求められた見かけの弾性定数 (軸方向) を volume fraction の関数として plot したもので、分子動力学に基づいた解析 (一番上の曲線) と本解析の結果 (他の曲線。3 種類あるのは異なるインクルージョンの配置による) は概ね一致している。

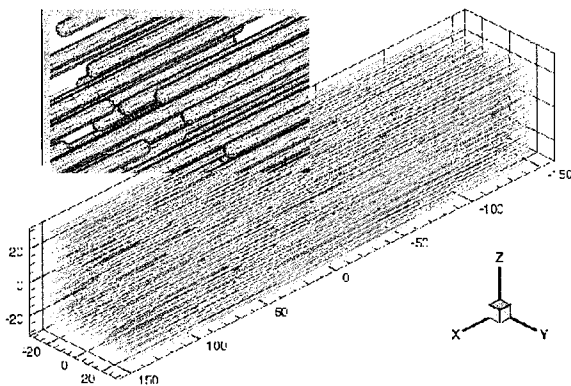


図-5 CNT 複合材料のモデル

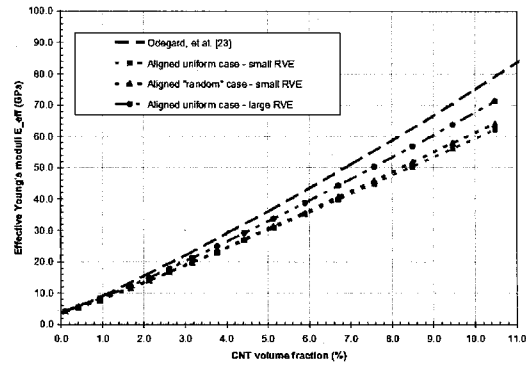


図-6 巨視的弾性定数の決定

なお、この計算は京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータ HPC2500 の 1 node を用いて実行しており、このシリーズの計算で最大規模のものは、約 3000 万自由度であった。

(3) 静弾性学の周期境界値問題

前節の解析は、FMM の強力さを示してはいるが、均質化法を用いるともう少しエレガントな方法で巨視的弾性定数を決めることができる。

均質化法は、周期的なマイクロ構造 (ユニットセル) を有する非均質体を、物質の平均的な挙動を記述するマクロスケールと、マイクロ構造内の挙動を記述するミクロスケールを導入して、等価な均質体に置き換えるための方法論の一つであり、標準的なアプローチにおいては、微視構造における周期境界値問題を解く必要がある。その際、CNT 複合材料などの応用を考えると、微視構造の解析もかなり大規模なものとなる事が想定される。そこで、周期境界値問題の FMM を開発した。

実は、周期境界値問題の FMM は古くから研究されており、Laplace 方程式の周期境界条件下での高速多重極法については、Greengard & Rokhlin³⁾ の最初の論文に既に記述がある。しかし、そこではいわゆる繰り込みの方法が用いられており、発散級数を物理的考察により有限な項に置き換えるなど、数学的にはやや不明瞭な点が残されている。そこで、まず対応する 2 次元 Laplace 問題を考え、3 次元問題の手がかりを探った¹⁸⁾。

まず弾性学の (21) に相当する Laplace における解表現

$$u(x) = \int_S G(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS_y + u^\infty(x) \quad (23)$$

から出発する。ここに G は基本解で、 $x_1 + ix_2 = z$ 、 $y_1 + iy_2 = \zeta$ とすると

$$G(x-y) = -\Re \frac{1}{2\pi} \log(z-\zeta)$$

となる。式 (23) に現れるポテンシャル (積分項) を周期化することを考える。

今、ユニットセルは一辺の長さが 1 の正方形だとする。周期境界条件はユニットセルと同じ構造をしたセ

ルが無限に並んでいるものとして与えることにする。

さて、無限に並んだユニットセルからの影響を考慮する際、一見

$$\sum_{\omega \in N_0} \log(z - \omega) \quad (24)$$

という級数が現れる様に思われる。ここに N_0 は

$$N_0 = \{\omega = m + in | m, n : \text{整数}\} \quad (25)$$

である。しかし式 (24) は発散列であるので、式 (24) から Laplace 方程式の斉次解を差し引き (負のものを引くので符合は + である)、次の絶対収束級数を得る。

$$\log \sigma(z) = \log z + \sum_{\omega \in N} \left[\log\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right] \quad (26)$$

ここに、 N は

$$N = \{\omega = m + in | m, n : \text{整数}, \omega \neq 0\} \quad (27)$$

なる複素数の集合である。実は、ここで差し引かれた項は、Laplace 方程式の基本解の多重極展開の最初の 3 項である。 $\sigma(z)$ は Weierstrass の楕円関数の一つであり、周期関数ではないが、

$$\log \sigma(z+1) = \log \sigma(z) + \pi\left(z + \frac{1}{2}\right) \pm \pi i \quad (28)$$

$$\log \sigma(z+i) = \log \sigma(z) - \pi i\left(z + \frac{i}{2}\right) \pm \pi i \quad (29)$$

の性質を有する¹⁰⁾。このことを利用すると、周期化された一重層ポテンシャルが次のように得られる。

$$-\frac{1}{2\pi} \text{Re} \left[\int_S \log \sigma(z - \zeta) \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} dS_\zeta + \pi z \int_S \bar{\zeta} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} dS_\zeta \right] \quad (30)$$

ここに $\bar{\zeta}$ は ζ の共役複素数である。

こうして周期境界値問題の解を絶対収束する級数で書くことができると、周期境界値条件を、ユニットセルの回りにそれと同様の形をしたレプリカセルが無限に並んでいるものとして実現できる。周期境界値問題における高速多重極積分方程式法では、ユニットセルをレベル 0 のセルとして解析を行う。通常の FMM とは異なり、upward pass ではレベル 0 のセル (= ユニットセル) まで多重極モーメントを求める。次に、レベル 0 でユニットセルに隣接していないレプリカセルからの影響は、ユニットセルの中心に関する局所展開係数として評価し、ユニットセルとそれに隣接する 8 つのレプリカセルに対して通常の downward pass を実行する。

レベル 0 の M2L 公式は、Lattice 和

$$\sum_{w \in N'} O_k(w), \quad k \geq 3 \quad (31)$$

を含んだ形で求まる。ここに、 N' は原点と、その周りの格子点 (合計 9 点) を除いた格子点の集合であり、 O_k

は 2 次元 Laplace の場合

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}$$

となる。級数 (31) は絶対収束するので計算は容易な上、対称性から多くがゼロである。

同じことを利用すると、3 次元弾性体の周期境界値問題を解くことができる¹⁹⁾。実際、剛体介在物を含む弾性体に均質化法を適用して巨視的な弾性定数は次のようにして求まる。

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{|Y|} \int_S t_i^{kl}(y) y_j ds$$

ここに、 Y はユニットセル、 t_i^{kl} は (22) を周期化した積分方程式

$$-\delta_{pi} x_q + c_{Ii}^{pq} + e_{ijk} w_{Ij}^{pq} x_k = \int_S [\gamma_{ij}(x-y) + x_s A_{sr}^{ij} y_r] t_j^{pq}(y) ds_y \quad (32)$$

の解である。また γ_{ij} は

$$\gamma_{ij}(x-y) = \Gamma_{ij}(x-y) + \sum_{w \in N''} \Gamma_{ij}(x-y-w) + \sum_{w \in N'} \{\Gamma_{ij}(x-y-w) - D_{ij}(x-y, w)\} \quad (33)$$

であり、 N'' 及び N' は

$$N'' = \{(x, y, z) = (l, m, n) | l, m, n \in \{-1, 0, 1\},$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}, \quad N' = N \setminus N'',$$

$$N = \{(x, y, z) = (l, m, n) | l, m, n \in \mathbb{Z}, (x, y, z) \neq \mathbf{0}\}$$

である。また、 $D_{ij}(x-y, w)$ は

$$D_{ij}(x-y, w) = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \sum_{n=0}^2 \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}(\overline{Ow})} F_{ij,n,m}^R(\overline{y\vec{x}}) + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}(\overline{Ow})} (\overline{Ow})_j G_{i,n,m}^R(\overline{y\vec{x}}) \right\}$$

である。 D_{ij} は Laplace 方程式の場合と同様に、基本解 Γ_{ij} の多重極展開の最初の数項に他ならない。また A_{kl}^{ij} は弾性定数と、収束する格子和で書ける定数である。式 (33) は絶対収束であることに注意する。

一旦このように解が書けると、多重極化は Laplace の場合と同様に行なうことができる。数値例として、図-7 のようなメッシュとモデルを用いた微視構造の解析から、均質化法により軸方向の見かけの弾性定数を決めた例を示す。図-8 は求められた見かけの軸方向の弾性係数を剛体介在物の体積比の関数として示している。

3.2 Helmholtz 方程式

周波数域の動弾性学や電磁気学 (Maxwell 方程式) を含む Helmholtz 方程式系は、FMM の全研究の中でもとくに多くの研究がなされた分野である。最初に研究



図-7 長い繊維の配置 ($m = 5$)

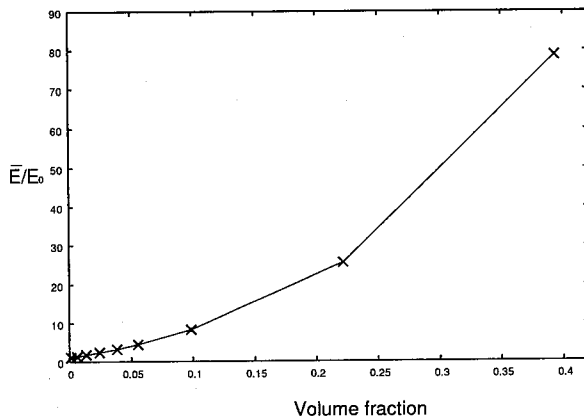


図-8 巨視的ヤング率対ファイバーの体積率

を行なったのは Rokhlin⁵⁾ であるが、質、量ともに他を圧倒する研究成果をあげたのは Illinois 大学の Chew のグループである²⁰⁾。わが国では福井のグループがいち早く研究に着手し、その成果は例えば小林ら¹⁾などに紹介されている。

Helmholtz 方程式の FMM には低周波 FMM と高周波 FMM がある。ここでは 2 次元 Helmholtz 方程式の場合を簡単に示しておく。低周波 FMM は (16) に基づいて展開される従来型の FMM である。それに対し

て、高周波 FMM は diagonal form

$$G(x-y) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik \cdot k \cdot (x-X)} \nu(q; \xi) e^{-ik \cdot k \cdot (Y-y)} dq \quad (34)$$

の積分を離散化して得られる。ただし、

$$\nu(q; x) = \sum_{n=-p}^p e^{-inq} O^n(x) \quad (35)$$

$$k(q) = (\cos(q), \sin(q)) \quad (36)$$

$$\xi = X - Y \quad (37)$$

であり、 X, Y はそれぞれ x, y の近傍の点である。低周波 FMM は低周波域で $O(N)$ の算法であるが、高周波域では $O(N^2)$ になり、一方高周波 FMM は高周波域では $O(N) \log^{\alpha} N$ ($\alpha \geq 1$) であるが、低周波域ではブレークダウンする⁸⁾。

2002 年の時点では低周波 FMM と高周波 FMM はあたかも全く異なった算法であるかのように捉えられていた。一方、いわゆる new FMM²¹⁾ が研究されつつあり、低周波でもブレークダウンせず、diagonal なので、高周波でも高速な解法になるのではないかと期待されていた。しかし、実際の 2002 年以後の展開はこれとは多少異なっていた。new FMM の系統の解法を最初に完成させた Darve は、確かに new FMM だけですべての周波数をカバーしようとしている²²⁾。しかし他の group は、セルのサイズがある限界より小さい問題には低周波 FMM を、大きい問題に対しては高周波 FMM を用いる道を選んだ。

このような方法の萌芽はすでに福井の研究に現れているが¹⁾、これをよりはっきりした形で用いたのは大谷・西村²³⁾であり、2 次元 Helmholtz 方程式において、セルのサイズを d とする時、 kd がある限界値より大きなレベルでは diagonal form を、小さいレベルでは級数展開を用いることを提案し、これを切替え diagonal form の方法と呼んだ。このような方法が必要になったことの背後にあるのは、実は、それまでの diagonal form の研究において、精度コントロールが十分にできていなかったことが次第に明らかになってきた事情がある。同じころ、Chew のグループでも精度の問題が顕在化し、これに対応するために Ohnuki らの一連の研究が行なわれた²⁴⁾。以下大谷・西村²³⁾に基づいてそれを説明する。

まず、diagonal form の精度を検討する。精度的に

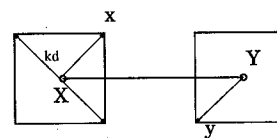


図-9 x, y, X, Y の位置関係

最も厳しいのは、点 x, y, X, Y が図-9 のような配置に

なっている時である。ここに $|X - Y| = 2d$ である。この時、種々の kd の値に対して、式 (34) による高周波 FMM の相対誤差と、低周波 FMM (16) を用いた時の相対誤差を、項数 p を横軸にとり、プロットすると図-10 を得る。同図には精度の推定にしばしば用いられる Song、Chew の式²⁵⁾、および Rokhlin²⁶⁾ の式を併せて示した。図-10 からわかるように、項数 p が小さ

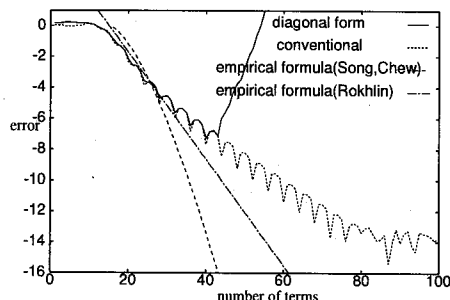


図-10 数値実験例 ($kd = 15$)

いうちは diagonal form と低周波 FMM の結果は一致するが、 p が大きくなると桁落ちが顕在化し、diagonal form の精度が悪化する。従って、diagonal form が使えるのは、従来法が所望の精度に達する p よりも大きな p で桁が落ち始める場合である。数値実験によれば桁の落ち始める p は kd とともに増大し、所望の精度を得るためには diagonal form はある kd の限界値以上で使わなければならないことがわかる。それ以下の kd に対しては低周波 FMM などの別の方法を使わなければならないこともわかる。以上が切替え diagonal form の方法が導入された経緯である。

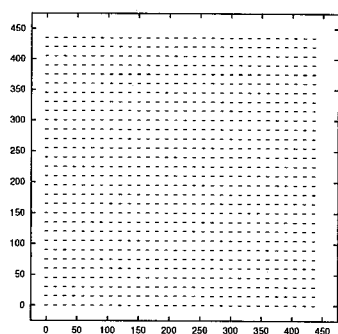


図-11 クラック配置 (lv0, lv5, lv7)

次に、切替え diagonal form の方法の有効性を示す。一例として、図-11 のような無限領域中のクラック群を考える。ただし、波数が $k = 1$ となるように長さの単位を選び、全長 5 のクラックがクラック中心間隔 15 で縦 30 列、横 30 列に並んでいる場合を考える。入射波は同図において下から入射する平面波である。

全く diagonal form を用いないケース (lv0)、レベル 5 から diagonal form に切替えたケース (lv5)、レベル 7 (最深レベル) から diagonal form を用いたケース (lv7)

の 3 通りを解析し (括弧内は問題名を表す)、結果を表 1 に示した。lv0 と lv5 は計算が収束し解が一致したのに対し、lv7 は計算が収束しなかった。これは桁落ちが起こったからであると考えられる。反復 1 回当たりの計算時間では、lv7、lv5、lv0 の順に短かった。diagonal form により高速化が実現したことが分かる。

表-1 切替え diagonal form の数値解析結果

問題	切替えレベル	切替えレベルのセル直径	計算時間 $\times 10^4$ (s)	反復回数	反復一回当たり計算時間 (s)
lv0	-	-	3.78	495	76.4
lv5	5	19.4	1.39	501	27.8
lv7	7	4.87	収束せず	収束せず	10.5

なお、我々のグループ以外でも、Chew らは 3 次元問題において高周波 FMM と 低周波 FMM を切替えて使うことを提案している²⁷⁾、Greengard らも new FMM は単独で使うことはせず、基本的には高周波 FMM と 低周波 FMM の切替としながらも、低周波 FMM の M2L の部分に new FMM を使って独自の方法を提案している²⁸⁾。

しかし、こうして切替え方式を用いて高速性を追求するならば、低周波 FMM と高周波 FMM の精度をそろえる必要がある。これについても図-9 のような位置関係について、 kd の値毎に数値実験を行ない、検討すると良い。一般に、 $|X - Y| = N_B d$ とすると ($N_B \geq 2$)、以下ようになる。

- N_B が小さいうちは N_B の値によって同一の p に対する精度は異なるが、 N_B が少し大きくなると、 p と誤差の関係は N_B によらなくなる。
- 一般に、同一の精度のために低周波 FMM が要する p は diagonal form のそれより小さい。

低周波 FMM の場合、 N_B によって p を変えることも難しくないで、これを利用して更に高速化を追求することもできる。

このようにして Helmholtz 方程式の FMM の精度コントロールの問題はほぼ解決した。

(1) 周期境界値問題

周期的な構造における Helmholtz 方程式系の境界値問題は、特に光学に関わる種々の応用を有し、非常に興味深い問題である。特に、近年ナノテクノロジーの発展にともない、光の波長オーダー、ないしは更に小さい周期を持った構造を作ることが可能になってきたので、未来の光学デバイスの基礎技術と目されるフォトニック結晶や、負の屈折率といった奇妙な挙動を示すメタマテリアルなど、周期構造の波動問題の解析需要は高い。土木工学においても、道路、鉄道の振動、騒音問題や群杭、浮体など、周期構造の波動に関連する

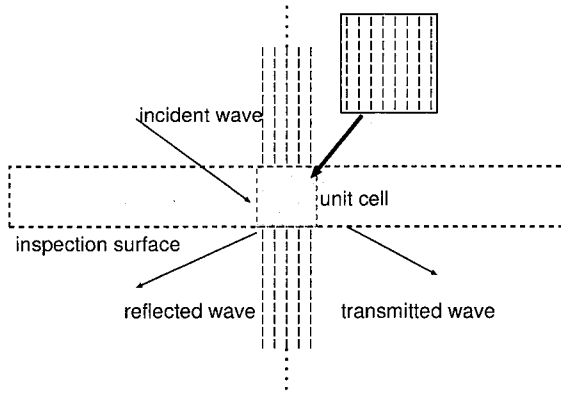


図-12 周期クラック群

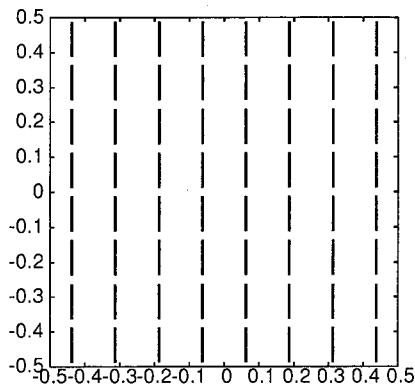


図-13 ユニットセル内のクラック配置 (ユニットセル内に 8×8 本)

と考えられる問題はいくつかある。それゆえ周期構造の波動問題の FMM を開発することは有意義であると考えられる。

前節で紹介した静弾性学の周期境界値問題と類似の方法で、Helmholtz 方程式系の FMM を定式化することが可能である。実際、静的な問題と違い、Helmholtz 系では周期境界値問題の Green 関数が存在するので、周期問題の解を書き下すことは容易である。しかし、Green 関数は基本解の格子和で書かれ、直接計算することは収束が悪いので不可能である。Otani & Nishimura²⁹⁾ では、この格子和を Fourier 積分に変形することによって効率良く評価した。

ここでは 2,3 の数値計算結果を紹介するにとどめる。

(2) 複数列のクラック群による散乱問題

ここでは、2次元 Helmholtz 方程式を考え、図-12で示されるように、層状に配置されたクラック群による散乱問題を扱う。ユニットセル内には、図-13に示した通り 64 本のクラックを配した。

ここでは入射角 0 の場合を取り扱う。図の左遠方からクラック群に垂直に平面波が入射した時、5 から 30 までの波数 k に対するエネルギー透過率をプロットしたのが図-14 である。

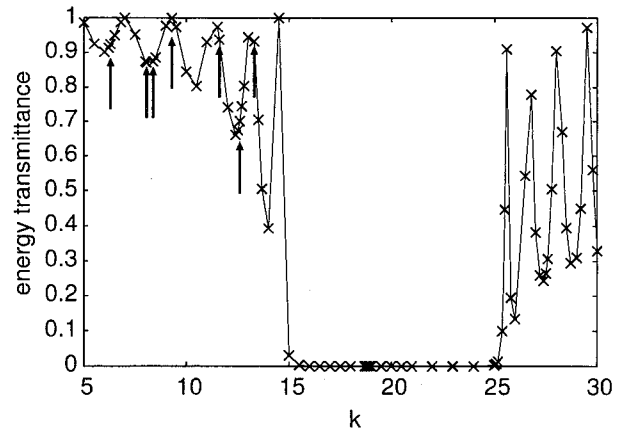


図-14 波数とエネルギー透過率の関係 (ユニットセル内にクラック 8×8 本)

図-14を見ると、 $5\pi \leq k \leq 8\pi$ の範囲で波がほとんど透過しないことが分かる。これはストップバンドと呼ばれる現象である。

次に、類似のクラックの配置で、中央のいくつかのクラックがなく、「穴」が開いている場合を考える (図-15 参照)。入射角が 0 度の場合のエネルギー透過率を波数の関数としてプロットしたのが図-16 である。図-14の場合と同様に、明らかにストップバンドが見えるが、その中の $k = 18.88$ 付近に狭いパスバンドがあるのもわかる。このパスバンドの機構を理解するために、 $k = 18.8$ と $k = 18.88$ における $|u|$ をプロットしたものを図-17に示した。この図からもわかるように $k = 18.88$ において「穴」の周りにフォトニック結晶などで知られている局在モードが発生していることがわかる。

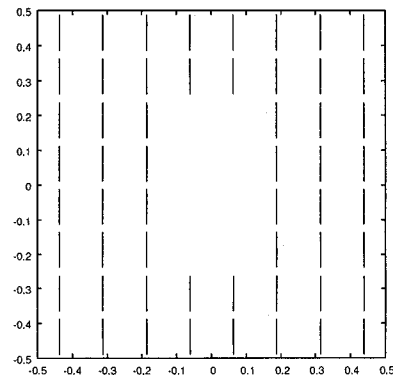


図-15 「穴」を伴ったクラックの配置

3.3 時間域動弾性

FMM は時間依存の問題にも適用することができる。特に波動方程式の系統の問題では、Michielssen らの PWTD (Plane Wave Time Domain) アルゴリズムが知られている⁶⁾。PWTD アルゴリズムの動弾性問題への拡張は Takahashi & Nishimura³⁰⁾ において行なわ

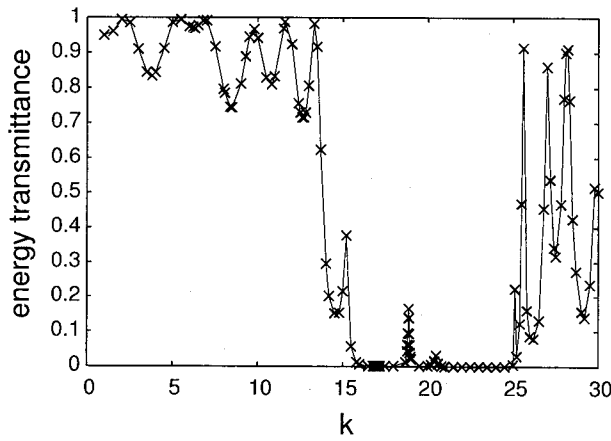


図-16 エネルギー透過率 vs 波数

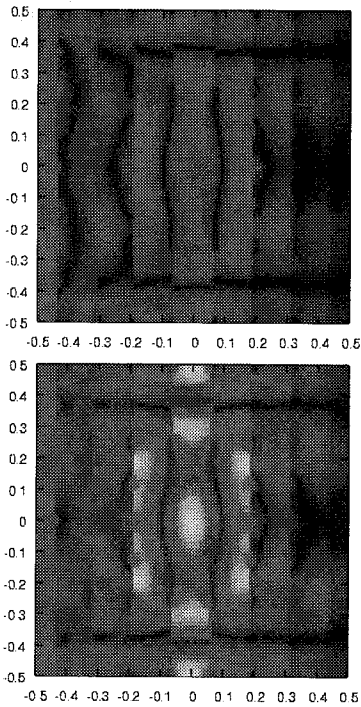


図-17 $|u|$ の分布。上: $k = 18.8$ 、下: $k = 18.88$

れ、大谷・西村³¹⁾において改良された。ここではPWTDアルゴリズムの基本的な考え方について述べることにする。

動弾性学の初期値境界値問題を考える。簡単のため初期条件、物体力を零とすると、領域 D の境界 S で以下の積分方程式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}u_i + \int_S T_{ij}(x, y, t) * u_j(y, t) dS_y = \int_S \Gamma_{ij}(x - y, t) * t_j(y, t) dS_y \quad x \in S \quad (38)$$

ここに、 $\int$ は Cauchy の主値積分を表し、 $*$ は時間に関する畳み込みの意である。 u 、 t は変位、表面力であり、 Γ ならびに T はそれぞれ動弾性学の基本解及び二重層核である。

式 (38) は次のように離散化される。

$$\sum_{J=1}^{N_s} A_{IJ}^{(1)} a_J^\alpha = \sum_{J=1}^{N_s} B_{IJ}^{(1)} b_J^\alpha - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{J=1}^{N_s} \left(W_{IJ}^{(\alpha-\beta+1)} u_J^\beta - U_{IJ}^{(\alpha-\beta+1)} t_J^\beta \right) \quad (39)$$

ここに、現在時刻 t_α の境界要素 S_J における境界密度の未知成分を a_J^α 、境界条件によって与えられる成分を b_J^α と表しその係数 ($W_{IJ}^{(1)}$ 、 $U_{IJ}^{(1)}$ のいずれか。ここに W 、 U は、それぞれ離散化された 2 重層、および 1 重層ポテンシャルである) をそれぞれ $A_{IJ}^{(1)}$ 、 $B_{IJ}^{(1)}$ と書いた。また N_s は空間方向の自由度である。式 (39) は $3N_s$ 元の連立一次方程式である。 $A_{IJ}^{(1)}$ は一般に疎行列であるため、この逆行列はおおよそ $O(N_s)$ で求まる。しかし、式 (39) の第 2 項の $U_{IJ}^{(\gamma)}$ 、 $W_{IJ}^{(\gamma)}$ は時間差 γ の増加とともに密になる。また、行列ベクトル積の回数は時間に比例する。従って時刻ステップ N_t の解 $a_I^{N_t}$ を求めるのに従来法が必要とする計算量は $O(N_s^2 N_t^2)$ である。

解法を高速化するためには式 (39) の右辺の行列・ベクトル積を高速化しなければならない。そこで、基本解の平面波展開を用いた高速解法 (PWTD 法) によりこの演算を高速化する。ここでは PWTD 法の詳細を記す余裕はないが、簡単に概念にふれておく。

離散化された積分方程式の右辺の評価とは、過去の波動場の現在への影響の計算に他ならない。通常の FMM は空間方向の相互作用の評価のために空間的なセルを導入し、遠方の要素の影響はできるだけ大きいセルにまとめて評価するものであったが、PWTD 法は時空におけるセルを導入して、時空において遠い (近い) 要素の影響は大きい (小さい) セルにまとめてその影響を評価する。以上の状況を図示すると図-18 のようになる。PWTD 法の計算量は実装の仕方にもよるが、原理的には $O(N_s \log^2 N_s, N_t)$ 程度にできる。

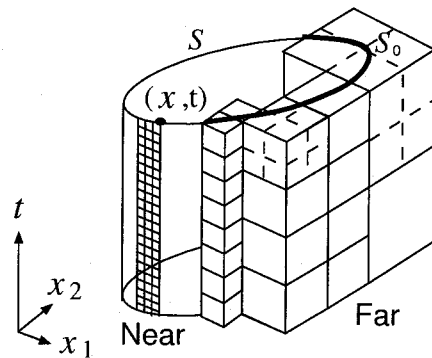


図-18 PWTD 法の考え方

球孔を x_1 、 x_2 方向にそれぞれ 12 個ずつ配し、 x_3 方向には 8 列並べ解析を行った。境界要素数は

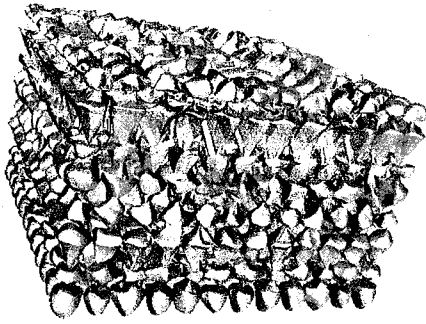


図-19 $t = 200\Delta t$ における空孔群の変形

368640(1105290 DOF)である。P波速度を1、S波速度を $\sqrt{2}$ とした。上方から平面P波が入射したときの球孔表面の変位の一例を図-19に示す³¹⁾。

3.4 並列化

近年、マルチコアCPUが標準的になり、共有メモリ型並列計算機が身近になった。共有メモリ計算機におけるスレッド並列のための仕様としてはOpenMPが標準的である。FMMの並列化は、従来分散メモリ計算機において複雑なアルゴリズムを用いて行なわれてきたが、共有メモリ計算機においてはOpenMPを用いると非常に手軽にある程度の台数効果を得ることができる³²⁾。以下その方針を示す。

(1) upward pass

子から親へM2Mを用いて多重極モーメントを渡す際に、子のセルでループを回すと、スレッド間で競合が発生するおそれがあり、親のセルでループを回すのが良い。以上をFortran風の擬コードで表すと次のようになる。

```
DO level=最下層のレベル-1,1,-1
!$OMP PARALLEL DO
  DO 当該レベルでのセル
    DO 子セル
      if (子セルがリーフ) then
        定義から多重極モーメントを計算
      else
        子セルの多重極モーメント
        を自分のセルに移動 (M2M)
      endif
    ENDDO
  ENDDO
!$OMP END PARALLEL DO
ENDDO
```

(2) downward pass

downward passの並列化は、単に逐次コードに若干の指示行を書き加えるだけで簡単に行なうことができる。

る。具体的には、逐次コードで、レベル毎のセルのループを並列化すれば良い。わずかこれだけの工夫で、ある程度の台数効果が得られる。

更に、MPIを用いて上位のセルをプロセスに割り当て、その下のセルに対して上記のスレッド並列を行なうハイブリッド並列を用いれば、SMPクラスタの性能を最大限に活かした大規模問題の解析が可能になる。

数値計算は京都大学学術情報メディアセンターのHPC2500にて行った。HPC2500は12台の計算ノードからなり、ノード間は高速光インターコネクトを用いて接続されている。各ノードは512GBの共有メモリを有し、ノード当たりのCPU台数は128である。

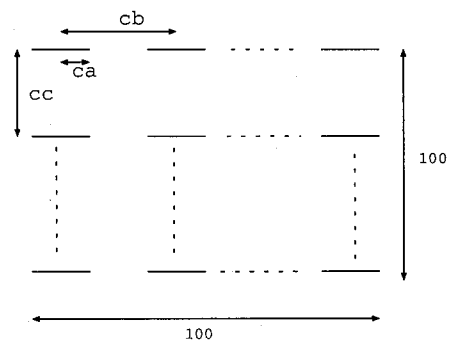


図-20 クラックの配置図

(3) 2次元 Laplace クラック問題

2次元の無限領域にクラックが図-20のように、一様に分布している問題を考える。クラックの外部でLaplace方程式を解く。境界条件はクラック上一定のNeumann dataを与える。クラックの長さと同隔は図-20で $ca:cb:cc=2:5:5$ となるようにした。クラックを縦方向に100個、横方向に100個配置し、未知数の総数は100万である。MPI-OpenMPハイブリッド並列化を行い、プロセス数およびスレッド数を変えて解析を行った。一定のCPU数に対して最適のプロセス数-スレッド数を用いた時のCPU数とspeed upとの関係を図-21に示す。 $(\text{CPU数})=(\text{speed up})$ となるような理想的なグラフを点線で示す。図-21から、良好な台数効果が得られていることが分かる。なお、このような方法で1億円の問題まで解いた実績がある。

4. おわりに

以上、ここ数年我々のグループで行なってきたFMMの研究を概観してきた。

この10数年来の研究によりFMMの計算力学への応用はかなりの部分が完成に近付いていると言うことができるが、まだまだ未解決・未着手の部分や、改善すべき点も多い。例えば、

- 線形方程式の前処理は、解析の効率を大きく左右

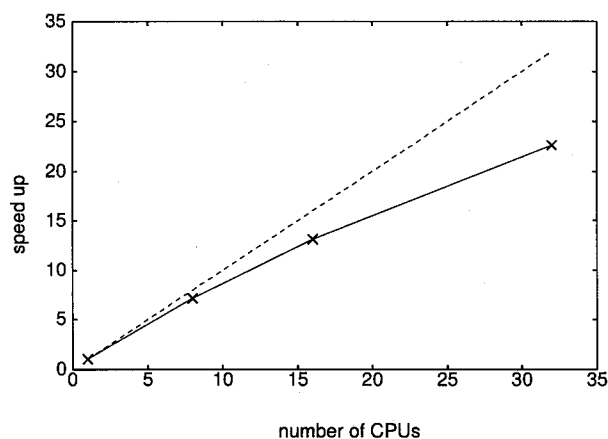


図-21 CPU 数に対する speed up

する重要な技術である。しかしこれまでの多くの努力にも関わらず、いまだに決定版と言えるような方法は現れない。定番とも言える有効な前処理法の開発は急務である。

- FMM は個々の問題毎に異なる定式化を要求するので、個別の問題毎にコードを開発する必要がある。これは開発者にとって大きな負担であるし、ユーザにとっても汎用性が低いものになってしまう。この点の改善を目指した努力として、ACA³³⁾ や direct FMM³⁴⁾ などを挙げることができる。
- これまで開発されてきた FMM の手法は、一部商用コードとなったものもあるが、多くがアカデミックな例題に適用されただけに留まっている。ポテンシャルの高い手法であるから、現実問題への応用例を蓄積する必要がある。
- もちろん個々の問題では多くの未解決な細部がある。例えば動弾性問題の FMM はもう少し効率を改善するための研究がされても良いし、特に時間域の手法は安定性と効率のさらなる改善が必要である。周期構造の非周期問題や、時間域の周期問題なども未着手である。更には半無限や層状領域などにおける波動問題もあまり検討されていない。

元来境界積分方程式法は有限要素法や差分法のような一般解法ではなく、特殊用途に威力を発揮する手法である。特に、波動(中でも高周波)、亀裂問題などにおいては有利である。その特徴を更に強化するのが FMM である。今後境界積分方程式法は FMM とともに、有限要素法や差分法では追求できない極限を追求するために、なくてはならない手法となるものと考えられる。

参考文献

- 1) 小林昭一(編著): 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 2) Rokhlin V: *J. Comp. Phys.*, **60**, 187–207, 1985.
- 3) Greengard L, Rokhlin V: *J. Comp. Phys.*, **73**, 325–348, 1987.

- 4) Board J, Schulten K: *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **2**(1), 76–79, 2000.
- 5) Rokhlin V: *J. Comp. Phys.*, **86**, 414–439, 1990.
- 6) Ergin AA, Shanker B, Michielssen E: *J. Comp. Phys.*, **146**, 157–180, 1998.
- 7) Greengard L, Strain J: *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, **12**, 79–94, 1991.
- 8) Nishimura N: *Appl. Mech. Rev.*, **55**, 299–324, 2002.
- 9) Nishimura N, Yoshida K, Kobayashi S: *Eng. Anal. Boundary Elements*, **23**, 97–105, 1999.
- 10) Abramowitz M, Stegun IA: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1965.
- 11) Hayami K, Sauter SA: *Proc. 13th Japan National Symposium on Boundary Element Methods*, 125–130, 1996.
- 12) Fu Y, Klimkowski KJ, Rodin GJ, Berger E, Browne JC, Singer JK, van de Geijin RA, Vemaganti KS: *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **42**, 1215–1229, 1998.
- 13) Yoshida K, Nishimura N, Kobayashi S: *J. Appl. Mech. JSCE*, **1**, 365–372, 1998 (in Japanese).
- 14) Fukui T, Kutsumi T: *Proc. 15th Japan National Symp. Boundary Element Methods*, 99–104, 1998 (in Japanese).
- 15) 松村知樹・大谷佳広・西村直志: 計算数理工学論文集, **6** No.1, 65–68, 2006.
- 16) Liu YJ, Nishimura N, Otani Y, Takahashi T, Chen XL, Munakata H: *J. Appl. Mech.*, **72**, 115–128, 2005.
- 17) Liu YJ, Nishimura N, Otani Y: *Comp. Materials Sci.*, **34**, 173–187, 2005.
- 18) 法崎健二, 西村直志, 大谷佳広, 吉川仁: 応用力学論文集 **8**, 161–169, 2005.
- 19) Otani Y, Nishimura N: *Int. J. Multiscale Comp. Eng.*, **4**, 487–500, 2006.
- 20) Chew WC, Jin J-M, Michielssen E, Song J (Eds): *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Artech House, 2001.
- 21) Greengard L, Huang J, Rokhlin V, Wandzura S: *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **5**(3), 32–38, 1998.
- 22) Darve E, Havé P: *J. Comp. Phys.*, **197** (1), 341–363, 2004.
- 23) 大谷佳広, 西村直志: 土木学会応用力学論文集, **6**, 283–292, 2003.
- 24) Ohnuki S, Chew WC: *SIAM J. Sci. Comp.*, **25** 1293–1306, 2003.
- 25) Song JM, Chew WC: *IEEE Microwave Wireless Comp. Lett.*, **11**, 311–313, 2001.
- 26) Coifman R, Rokhlin V, Wandzura S: *IEEE Antennas Propag. Mag.*, **35**, 7–12, 1993.
- 27) Jiang LJ, Chew WC: *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **53**, 4145–4156, 2005.
- 28) Cheng H, Crutchfield WY, Gimbutas Z, Greengard LF, Ethridge JF, Huang J, Rokhlin V, Yarvin N, Zhao J.: *J. Comp. Phys.*, **216**, 300–325, 2006.
- 29) Otani Y, Nishimura N: *Int. J. Num. Meth. Eng.* DOI: 10.1002/nme.2077, 2007.
- 30) Takahashi T, Nishimura N.: *Eng. Anal. Boundary Elements*, **27**, 491–506, 2003 (erratum: **28**, 165–180, 2004)
- 31) 大谷佳広, 西村直志: 土木学会応用力学論文集, **7**, 295–304, 2004.
- 32) 池田健二, 西村直志, 吉川仁: 応用力学論文集 **8**, 143–150, 2005.
- 33) Kurz S, Rain O, Rjasanow S: *IEEE Trans. Mag.*, **38** (2 I), 421–424, 2002.
- 34) Martinsson P-G, Rokhlin V: *J. Comp. Phys.*, **205** (1), 1–23, 2005.

(2007年7月17日 受付)