

Boussinesq 方程式を用いた単独突起上の開水路流れの水面形分類について

Classification of Water Surface Profiles in Open Channel Flows over an Obstacle

駒居 優*・細田 尚**・音田 慎一郎***

Yu KOMAI, Takashi HOSODA and Shinichiro ONDA

*京都大学大学院 工学研究科都市社会工学専攻修士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

***工博 京都大学大学院助手 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper describes the classification of the water surface profiles observed in open channel flows over an obstacle. The analytical solution of linearized equation based on the Boussinesq equation is firstly derived theoretically and the water surface profiles of the solution are classified using the non-dimensional hydraulic parameters. It is shown that the profiles are mainly categorized into the patterns such as concave profiles with and without undular part and convex profiles around an obstacle. Using the perturbation method, the second order non-linear solutions are derived to investigate the nonlinearity of Boussinesq equation. It is pointed out that the prominent anti-symmetric profiles with transition from subcritical to super critical flow are observed near the resonance relation between obstacle and water surface.

Key Words: Open channel flows, water surface profile, Boussinesq equation

1. はじめに

本研究は、Boussinesq 方程式を用いて、単独突起上の開水路流れの水面形応答特性について考察することを目的としている。

突起上や路床凹凸上の流れについては、従来より鉛直加速度を考慮した水深積分モデル (Boussinesq 方程式) による 1 次元解析¹⁾、及び鉛直 2 次元解析^{2,3,4)}が行われてきた。例えば、正弦波状路床上の開水路流れについて、鉛直加速度を考慮した Boussinesq 方程式を用いた流れの基本特性の検討が行われている⁵⁾。その中で、波状路床と水面波、及び水深波の応答特性、底面せん断応力分布の評価などの研究が行われており、解析的に得られた解の特性、ならびに実験結果との適合性などが考察されてきた。

本研究では、単独突起上の流れを Boussinesq 方程式を用いて簡易に解析する方法について検討する。実用的観点からは、単独突起上の流れは越流型水制上の流れを模擬したものと考えられる。このような流れに実用的な水深積分モデルを適用する場合、静水圧近似ではなく鉛直加速度を考慮した基礎式を用いる必要性を検討しておくことは、実用計算の際の基礎式の設定や計算結果の考察に有用であり、工学的意義を有すると考えられる。そこで、鉛直加速度を考慮した単独突起上の開水路流れの基礎式 (Boussinesq 方程式) を用いて、水面変動に関する線形解、及び 2 次までの摂動解を導くことで、水面形と水理量の関係を考察する。その際、突起高さが大きくなって、静水圧を仮定した水面

形方程式に特異点が発生する場合としない場合の水面形の定性的相違にも着目している。

2. Boussinesq 方程式を用いた突起上の流れの 1 次元解析

まず、Boussinesq が導いた、鉛直加速度を考慮した路床凹凸上の水面形方程式の導出過程を簡単に記述する。座標系と記号を図-1 に示す。

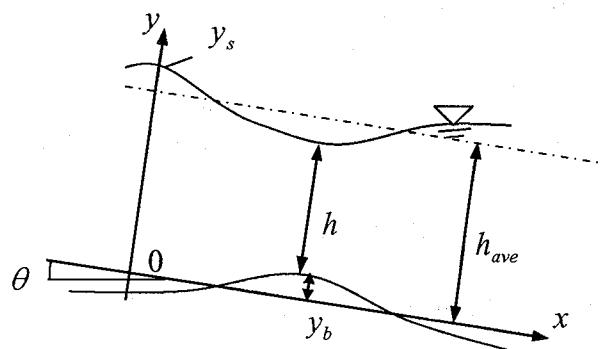


図-1 座標系と記号の説明

2.1 基礎式

x 方向の流速成分の水深方向分布の一様性を仮定すると、流速分布は式(1)と表わすことができる。

$$u(x, y) = U(x) \quad (1)$$

ここに, u は流速ベクトルの x 方向成分, U は水深平均流速を表す。

式(1)を連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

に代入して, y から自由水面 y_b まで積分すると式(3)が得られる。

$$v = nU \frac{dh}{dx} + U \frac{dy_b}{dx} \quad (3)$$

ここに, v は流速ベクトルの y 方向成分, h は水深, y_b は基準面からの路床高さ, n は相対水深を表し, $n = (y - y_b)/h$ で定義される。

式(3)を鉛直方向の運動方程式

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4)$$

に代入し, y から自由水面 y_b まで積分すると圧力分布の表示式(5)が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & gh \cos \theta (1-n) - U^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \frac{1-n^2}{2} - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} (1-n) \\ & + U^2 h \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{1-n^2}{2} + U^2 h \frac{d^2 y_b}{dx^2} (1-n) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)を x 方向成分の運動方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (6)$$

に代入し, 路床から水面まで積分すると次式となる。

$$\frac{d(U^2 h)}{dx} + \frac{dP}{dx} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{dy_b}{dx} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d(-u'^2 h)}{dx} \quad (7)$$

ただし, P は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} P = \int_{y_b}^{y_s} \frac{p}{\rho} dy = & \frac{gh^2}{2} \cos \theta + \frac{hq^2}{3} \left\{ -\frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \right\} \\ & - \frac{hq^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{1}{h} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに, q は単位幅流量を表す。

式(5)に $y = y_b, n = 0$ を代入すると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\rho} \right)_b = & gh \cos \theta - \frac{1}{2} U^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} \\ & + U^2 h \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{1-n^2}{2} + U^2 h \frac{d^2 y_b}{dx^2} (1-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & gh \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{q^2}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{q^2}{h^2} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} \\ & + \frac{q^2}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{1-n^2}{2} + \frac{q^2}{h} \frac{d^2 y_b}{dx^2} (1-n) \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)の右辺最終項は乱れによる運動量輸送項であり, 本研究では簡単のため, 渦動粘性係数 $D = \alpha q$ を用いて次式で評価する。

$$-\overline{u'^2} = D \frac{dU}{dx} = -D \frac{q}{h^2} \frac{dh}{dx} \quad (10)$$

α は係数であり, 波状跳水を対象に 0.05 を用いている研究があり⁶⁾, 本研究でも 0.05 とした。

右辺第2項は底面せん断応力ベクトルの x 方向成分であり, 本研究では次式で評価する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = c_f U^2 \quad (11)$$

ここに, c_f は摩擦係数であり, 本研究では 0.005 を用いる。

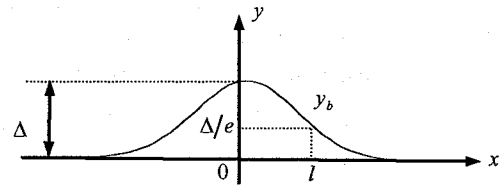


図-2 波状路床の特性量

2.2 単独突起上の水面形に関する線形解の誘導

(1) 基礎式の無次元化

運動量方程式(7)を, 単位幅流量 q を用いて U を消去することで水面形方程式に変形した後, 無次元化する。図-2に示した突起の振幅 Δ , 突起の形状を表す関数に含まれる代表長さ l , 及び河床が平坦な場合の等流水深 $h_0 = (c_f q^2 / g \sin \theta)^{1/3}$ を用いて以下の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} h' = \frac{h}{h_0}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y'_b = \frac{y_b}{\Delta}, \quad Fr_0 = \frac{q}{\sqrt{gh_0^3 \cos \theta}}, \\ \varepsilon = \frac{\Delta}{l}, \quad \lambda = \frac{h_0}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

これらの無次元量を用いて, 式(7)を無次元化すると式(13)となる。

$$\begin{aligned} -\frac{dh'}{dx'} + \frac{1}{Fr_0^3} h'^3 \frac{dh'}{dx'} + \frac{1}{3} \left(\frac{dh'}{dx'} \right)^3 \lambda^2 - \frac{2}{3} \lambda^2 \frac{dh'}{dx'} \frac{d^2 h'}{dx'^2} h' \\ + \frac{1}{3} \lambda^2 h'^2 \frac{d^3 h'}{dx'^3} + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda h'^2 \frac{d^3 y'_b}{dx'^3} - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda h' \frac{dh'}{dx'} \frac{d^2 y'_b}{dx'^2} \\ + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{\varepsilon}{\lambda} h'^3 \frac{dy'_b}{dx'} - \varepsilon^2 \frac{dh'}{dx'} \left(\frac{dy'_b}{dx'} \right)^2 + \varepsilon^2 h' \frac{d^2 y'_b}{dx'^2} \frac{dy'_b}{dx'} \\ = c_f \frac{1}{\lambda} h'^3 - \frac{1}{\lambda} c_f + \alpha \lambda \left(\frac{dh'}{dx'} \right)^2 - \alpha \lambda h' \frac{d^2 h'}{dx'^2} \end{aligned} \quad (13)$$

また、単独突起形状として次式のガウス分布を考える。

$$y_b' = \exp(-x'^2) \quad (14)$$

(2) 線形解

$h' = 1 + \delta h$ において、式(13)の線形方程式を導けば、式(15)となる。

$$\begin{aligned} & -\frac{d\delta h}{dx'} + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{d\delta h}{dx'} + \frac{1}{3} \lambda^2 \frac{d^3 \delta h}{dx'^3} + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \frac{d^3 y_b'}{dx'^3} + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{dy_b'}{dx'} \\ & = c_f \frac{1}{\lambda} 3\delta h - \alpha \lambda \frac{d^2 \delta h}{dx'^2} \end{aligned} \quad (15)$$

δh を、

$$\delta h = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x'^i \exp(-x'^2) \quad (16)$$

とにおいて式(13)に代入し、 $x'^i \exp(-x'^2)$ ($i=0,1,2,3,\dots$) に関して整理すると、式(17)の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{3} \lambda^2 a_{i-3} + 4\alpha \lambda a_{i-2} + \left\{ -2\left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2}\right) + 4i\lambda^2 \right\} a_{i-1} \\ & + \left\{ -\frac{3c_f}{\lambda} - 2(2i+1)\alpha \right\} a_i + \left\{ \left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2}\right)(i+1) - 2(i+1)^2 \lambda^2 \right\} a_{i+1} \\ & + \alpha \lambda (i+2)(i+1) a_{i+2} + \frac{1}{3} \lambda^2 (i+3)(i+2)(i+1) a_{i+3} \\ & = \begin{cases} \frac{2}{Fr_0^2} \frac{\varepsilon}{\lambda} - 6\varepsilon \lambda & (i=1) \\ 4\varepsilon \lambda & (i=3) \\ 0 & (\text{otherwise}, i=0,2,4,5,\dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)に $\alpha=0.05$, $c_f=0.005$, パラメータ $\lambda, \varepsilon, Fr_0$ を代入して解くと $a_0 \sim a_n$ ($i=0,1,2,3,\dots$) が求められる。それらの値を式(18)に代入することで、水深 h が得られる。

$$h' = 1 + \delta h = 1 + \sum_{i=0}^n a_i x'^i \exp(-x'^2) \quad (18)$$

また、自由水面 y_s の無次元量 y_s' は等流水深 h_0 を用いて次式で計算される。

$$y_s' = \frac{y_s}{h_0} = \frac{h}{h_0} + \frac{y_b}{\Delta l} \frac{l}{h_0} = h' + \frac{\varepsilon}{\lambda} y_b' \quad (19)$$

(3) 線形解の分類

上記の線形解を無次元水理パラメータで分類する。図-3は以下の方法で行った分類1を示している。

まず簡単のため、 a_0 以外の係数 $a_1 \sim a_n$ を0と仮定して式(17)を解くと、 a_0 は次式となる。

$$a_0 = \left(\frac{2}{Fr_0^2} \frac{\varepsilon}{\lambda} - 6\varepsilon \lambda \right) / \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} \right) + 4\lambda^2 \right\} \quad (20)$$

このとき $x=0$ での y_s' は次式となる。

$$y_s' = 1 + a_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad (21)$$

式(21)から、 $a_0 + \varepsilon/\lambda$ が正の値 ($a_0 + \varepsilon/\lambda > 0$) のときは上に凸、 $a_0 + \varepsilon/\lambda$ が負の値 ($a_0 + \varepsilon/\lambda < 0$) のときは下に凸として分類される。整理すると以下の様になる。

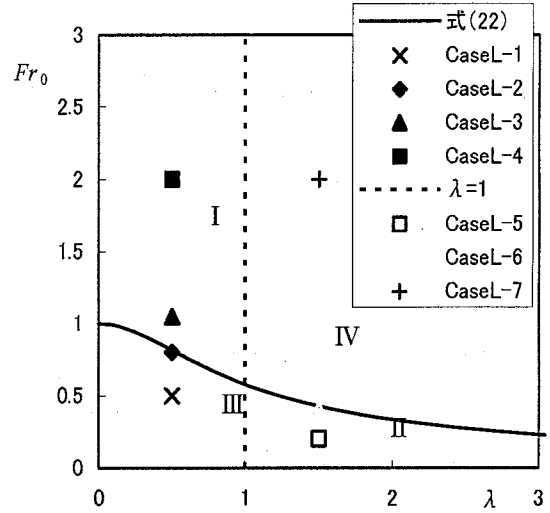


図-3 水面変動パターンの領域区分 (分類1)

(a) 上に凸の場合 ($a_0 + \varepsilon/\lambda > 0$)

$$\text{領域 I : } \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} < Fr_0 \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\text{領域 II : } 0 < Fr_0 < \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} \quad (1 < \lambda)$$

(b) 下に凸の場合 ($a_0 + \varepsilon/\lambda < 0$)

$$\text{領域 III : } 0 < Fr_0 < \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\text{領域 IV : } \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} < Fr_0 \quad (1 < \lambda)$$

これら(a), (b)から領域を区分すると図-3となる。ただし、共鳴関係 ($a_0 \rightarrow \infty$) は式(22)で与えられる。

$$Fr_0 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} \quad (22)$$

表-1 解析条件

Case	λ	ε	Fr_0	区分
L-1	0.5	0.05	0.5	III
L-2	0.5	0.05	0.8	III
L-3	0.5	0.05	1.05	I
L-4	0.5	0.05	2.0	I
L-5	1.5	0.05	0.2	II
L-6	1.5	0.05	0.4	IV
L-7	1.5	0.05	2.0	IV

次に、線形解と上記の分類の関係について考察する。解析条件を表-1、解析結果を図-4～11に示す。図中の y_b' は式(23)、 y_s' は式(24)で表される。ただし、 $n=200$ としている。

$$y_b' = \frac{\varepsilon}{\lambda} \exp(-x'^2) \quad (23)$$

$$y_s' = h' + \frac{\varepsilon}{\lambda} y_b' = 1 + \sum_{i=0}^n a_i x'^i \exp(-x'^2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \exp(-x'^2) \quad (24)$$

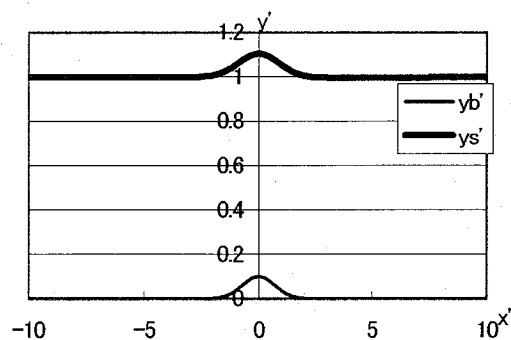


図-7 線形解(CaseL-4)

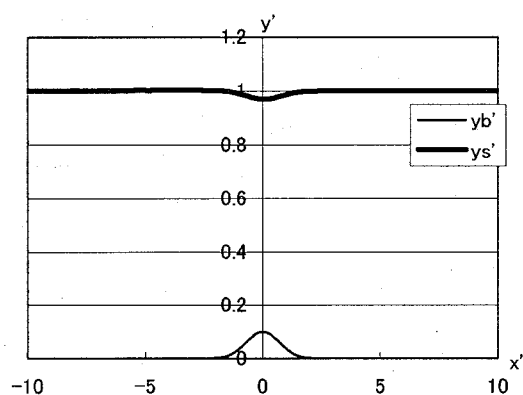


図-4 線形解(CaseL-1)

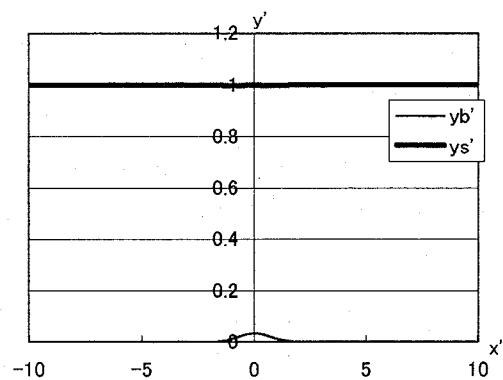


図-8 線形解(CaseL-5)

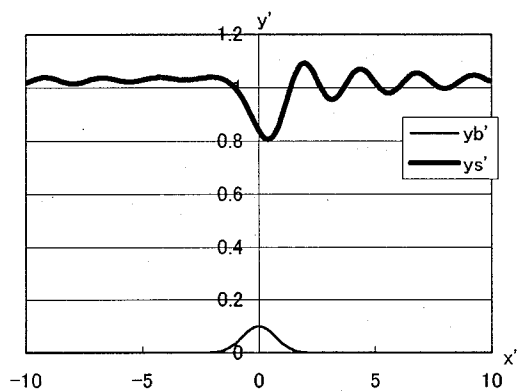


図-5 線形解(CaseL-2)

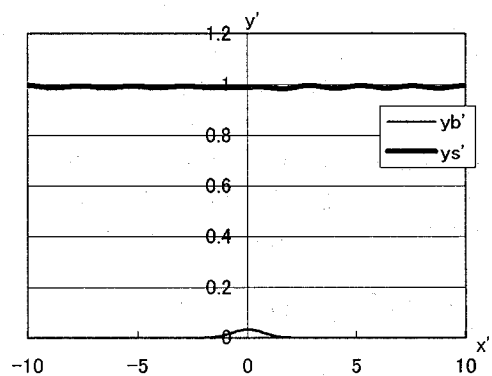


図-9 線形解(CaseL-6)

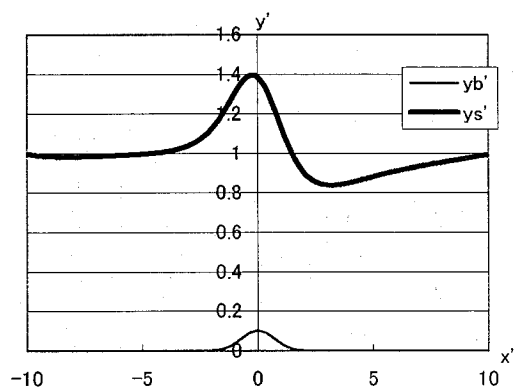


図-6 線形解(CaseL-3)

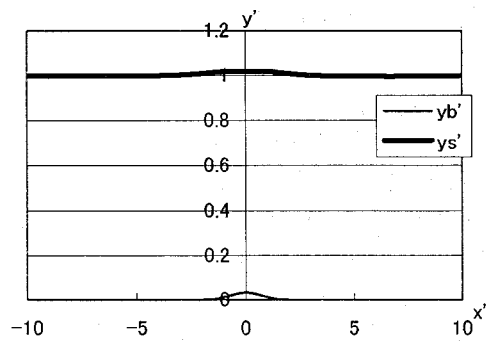


図-10 線形解(CaseL-7)

CaseL-1 は、領域Ⅲに分類されて、図-4では突起の所で水面が下に凸の形状になっている。領域Ⅲである CaseL-2(図-5)は、突起上で水面形が遷移し、下に凸の形状になっていて、突起の上下流、特に下流で波状になり、波状跳水状の水面形が再現されている。CaseL-3(図-6)は、領域Ⅰに分類されて、上に凸であるが、左右非対称となっている。CaseL-4(図-7)も、領域Ⅰに分類されて、突起上で左右対称の上に凸の水面形になっている。

CaseL-5～CaseL-7 もほぼ同様に分類されるが、CaseL-7(図-10)のように原点での凹凸が上記理論と逆になっている場合もある。これについてより詳細に検討すると次のようになる(分類2)。

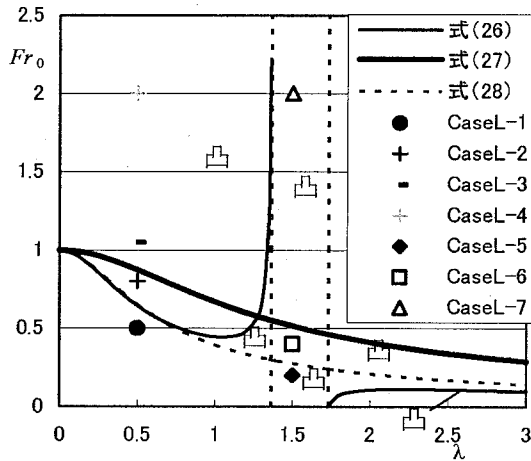


図-11 水面変動パターンの領域区分(分類2)

a_0, a_2 以外の係数を0と仮定して式(17)を解くと、 a_0 は次式となる。

$$a_0 = \frac{-\varepsilon \left(6\lambda - \frac{2}{Fr_0^2} \right) \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} + 6\lambda^2 \right) + 4\varepsilon \lambda \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} + 4\lambda^2 \right)}{2 \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} + 2\lambda^2 \right) \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} + 6\lambda^2 \right) - \frac{8}{3} \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2} + 4\lambda^2 \right)} \quad (25)$$

分類1と同様に考えると領域区分は図-11のようになる。ただし、式(26),(27),(28)は次式で定義される。

$$Fr_0 = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 3}{10\lambda^4 - 17\lambda^2 - 3}} \quad (26)$$

$$Fr_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{3} - \frac{\sqrt{40}}{3} \right) \lambda^2}} \quad (27)$$

$$Fr_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{3} + \frac{\sqrt{40}}{3} \right) \lambda^2}} \quad (28)$$

この区分では、CaseL-7は上に凸の領域になり、理論と一致するようになる。この場合、式(27)が式(22)に対応している。ただし、図-11により図-4、図-5の水面形の定性的違いが理論的に区分されているかどうかはさら

に検討する必要がある。

2.3 摂動解の誘導

非線形解について考察するために、摂動法を用いて水深に関する2次までの摂動解を求める。

突起の振幅 Δ と突起の長さスケール l の比 ε を摂動パラメータとして、水深を次式で表す。

$$h' = 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 + \dots = 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 \quad (29)$$

式(13)に、式(29)を代入して、 ε の次数に応じて整理すると、1次と2次のオーダーに関して式(30)、及び式(31)が得られる。

1次:

$$-\frac{dh_1}{dx'} + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{dh_1}{dx'} + \frac{1}{3} \lambda^2 \frac{d^3 h_1}{dx'^3} - c_f \frac{1}{\lambda} 3h_1 + \alpha \lambda \frac{d^2 h_1}{dx'^2} = -\frac{1}{2} \lambda \frac{d^3 y_b}{dx'^3} - \frac{1}{Fr_0^2} \frac{1}{\lambda} \frac{dy_b}{dx'} \quad (30)$$

2次:

$$-\frac{dh_2}{dx'} + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{dh_2}{dx'} + \frac{1}{3} \lambda^2 \frac{d^3 h_2}{dx'^3} - c_f \frac{1}{\lambda} 3h_2 + \alpha \lambda \frac{d^2 h_2}{dx'^2} = -\frac{1}{Fr_0^2} 3h_1 \frac{dh_1}{dx'} + \frac{2}{3} \lambda^2 \frac{dh_1}{dx'} \frac{d^2 h_1}{dx'^2} - \frac{1}{3} \lambda^2 2h_1 \frac{d^3 h_1}{dx'^3} - \lambda h_1 \frac{d^3 y_b}{dx'^3} + \frac{1}{2} \lambda \frac{dh_1}{dx'} \frac{d^2 y_b}{dx'^2} - \frac{1}{Fr_0^2} \frac{1}{\lambda} 3h_1 \frac{dy_b}{dx'} - \frac{d^2 y_b}{dx'^2} \frac{dy_b}{dx'} + \frac{c_f}{\lambda} 3h_1^2 + \alpha \lambda \left(\frac{dh_1}{dx'} \right)^2 - \alpha \lambda h_1 \frac{d^2 h_1}{dx'^2} h_1 \text{を,} \quad (31)$$

$$h_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x'^i \exp(-x'^2) \quad (32)$$

と式(30)に代入し、 $x'^i \exp(-x'^2)$ ($i=0,1,2,3,\dots$)に関して整理すると、式(33)の漸化式が得られる。

$$-\frac{8}{3} \lambda^2 a_{i-3} + 4\alpha \lambda a_{i-2} + \left\{ -2 \left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2} \right) + 4i\lambda^2 \right\} a_{i-1} + \left\{ -\frac{3c_f}{\lambda} - 2(2i+1)\alpha \lambda \right\} a_i + \left\{ \left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2} \right) (i+1) - 2(i+1)^2 \lambda^2 \right\} a_{i+1} + \alpha \lambda (i+2)(i+1) a_{i+2} + \frac{1}{3} \lambda^2 (i+3)(i+2)(i+1) a_{i+3} = \begin{cases} \frac{2}{Fr_0^2} \frac{1}{\lambda} - 6\lambda & (i=1) \\ 4\lambda & (i=3) \\ 0 & (\text{otherwise, } i=0,2,4,5,\dots) \end{cases} \quad (33)$$

同様に h_2 を、

$$h_2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x'^i \exp(-2x'^2) \quad (34)$$

とおいて式(31)に代入し、 $x^i \exp(-2x^2)$ ($i=0,1,2,3,\dots$)に関して整理すると、式(35)の漸化式が得られる。ただし、右辺については h_1 の関数になっているので $f(h_1)$ とおく。

$$\begin{aligned} & -\frac{64}{3}x^2 b_{i-3} + 16\alpha \lambda a_{i-2} + \left\{ -4\left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2}\right) + 16ix^2 \right\} b_{i-1} \\ & + \left\{ -\frac{3c_f}{\lambda} - 4(2i+1)\alpha \lambda \right\} b_i + \left\{ \left(-1 + \frac{1}{Fr_0^2}\right)(i+1) - 4(i+1)^2 x^2 \right\} b_{i+1} \\ & + \alpha \lambda (i+2)(i+1) b_{i+2} + \frac{1}{3} x^2 (i+3)(i+2)(i+1) b_{i+3} \\ & = f(h_1) \end{aligned} \quad (35)$$

式(33)に $\alpha=0.05$ $c_f=0.005$ 、パラメータ $\lambda, \varepsilon, Fr_0$ を代入して解くと $a_0 \sim a_n$ ($i=0,1,2,3,\dots$)が得られ、 h_1 が求められる。

以上より求められたものを次式に代入すると水深 h' が得られる。

$$h' = 1 + \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i x'^i \exp(-x'^2) + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^n b_i x'^i \exp(-2x'^2) \quad (36)$$

以上より求められる摂動解の特性について考察する。解析条件は表-1、解析結果を図-12～15に示す。また、線形解も図示して比較した。図中の y_b' は式(23)、 y_s' は次式で表される。ただし、 $n=200$ としている。

$$y_s' = 1 + \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i x'^i \exp(-x'^2) + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^n b_i x'^i \exp(-2x'^2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \exp(-x'^2) \quad (37)$$

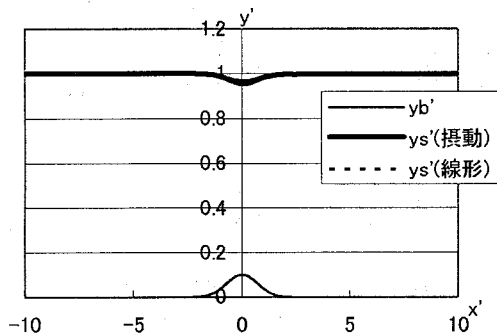


図-12 摂動解と線形解の比較(CaseL-1)

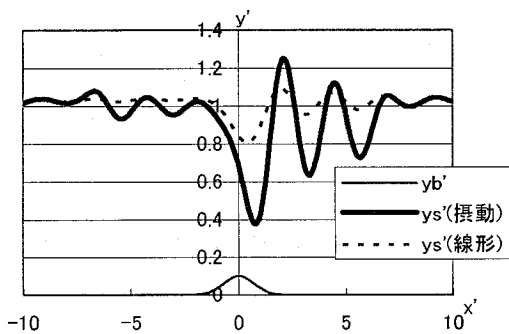


図-13 摂動解と線形解の比較(CaseL-2)

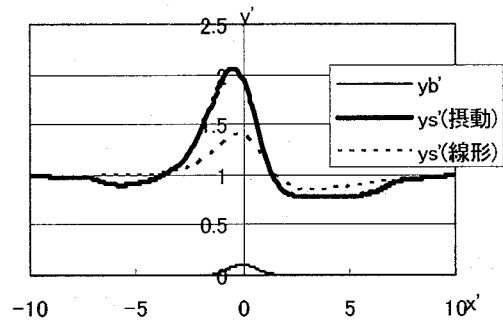


図-14 摂動解と線形解の比較(CaseL-3)

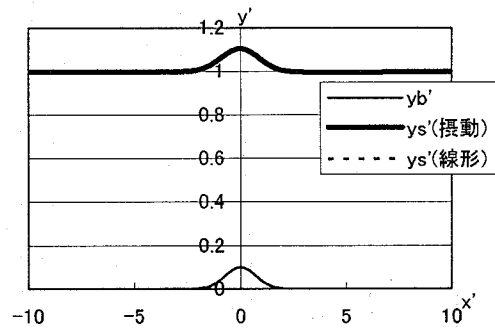


図-15 摂動解と線形解の比較(CaseL-4)

摂動解は、共鳴関係式(22)や(27)から離れている CaseL-1, L-4 は線形解と一致しているが、共鳴関係式に近い CaseL-2, L-3 は非線形性により左右非対称の大きい分布形となっている。

2.4 特異点の生起・非生起との対応

静水圧を仮定した水面形方程式を考えたとき、擬似等流水深と限界水深が交差する点(特異点)が生起する場合がある。突起頂上付近に生じる特異的な鞍形点に分類され、その場合特異点から出発して上流及び下流方向に水面形を追跡する。

(1) 基礎式

静水圧分布を仮定した場合の基礎式は次式で表される。

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{c_f q^2}{gh^3}, E = \frac{q^2}{2gh^2} + (h + \delta_b) \cos \theta + z_b \quad (38)$$

式(38)を水面形方程式に書き表すと式(39)となる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \theta - \cos \theta \frac{d\delta_b}{dx} - \frac{c_f q^2}{gh^3}}{\cos \theta - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)} \quad (39)$$

水面形方程式の分子 $f_1(x, h)=0$ を満たす水深が擬似等流水深 h_0 、分母 $f_2(x, h)=0$ が限界水深 h_c であり式(40)、(41)で表される。

$$\text{擬似等流水深: } h_0 = \left\{ \frac{c_f q^2}{g} \left/ \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{d\delta_b}{dx} \right) \right. \right\}^{1/3} \quad (40)$$

$$\text{限界水深: } h_c = (q^2 / g \cos \theta)^{1/3} \quad (41)$$

(2) 特異点の位置

特異点の位置 x_s は擬似等流水深と限界水深の交点であり、式(40)、(41)、(42)より求められ、整理すると以下の様になる。

$$x' \exp(-x') = \frac{c_f}{2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - Fr_0^2) \quad (42)$$

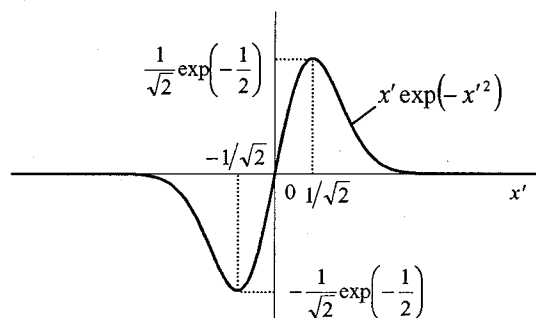


図-16

よって、図-16から特異点が生じる領域は以下の場合である。

(i) $Fr_0 < 1$ (常流) の時

$$\frac{c_f}{2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - Fr_0^2) < \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(1 - \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{c_f} \varepsilon \right)^{1/2} < Fr_0 < 1 \quad (43)$$

(ii) $Fr_0 > 1$ (射流) の時

$$\frac{c_f}{2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - Fr_0^2) > -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$1 < Fr_0 < \left(1 + \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{c_f} \varepsilon \right)^{1/2} \quad (44)$$

これら(i)、(ii)から特異点の生起・非生起を分類すると図-17となる。ただし、式(45)、(46)は次式となる。

$$Fr_0 = \left(1 - \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{c_f} \varepsilon \right)^{1/2} \quad (45)$$

$$Fr_0 = \left(1 + \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{c_f} \varepsilon \right)^{1/2} \quad (46)$$

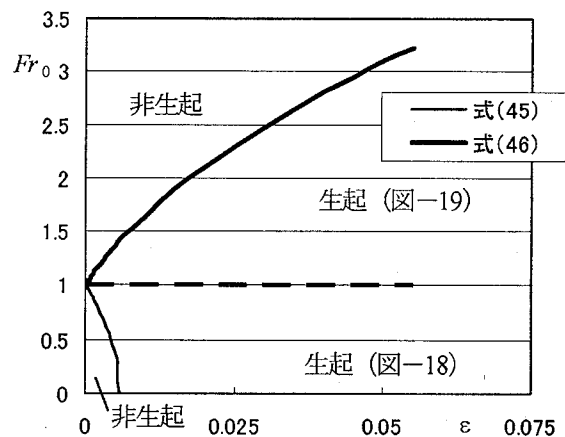


図-17 特異点発生・非発生の領域区分

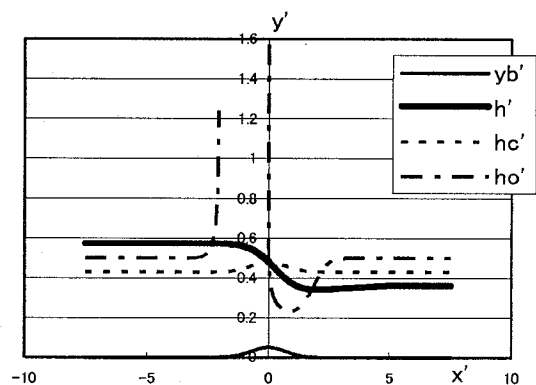


図-18 領域(i)の特異点生起パターンの例

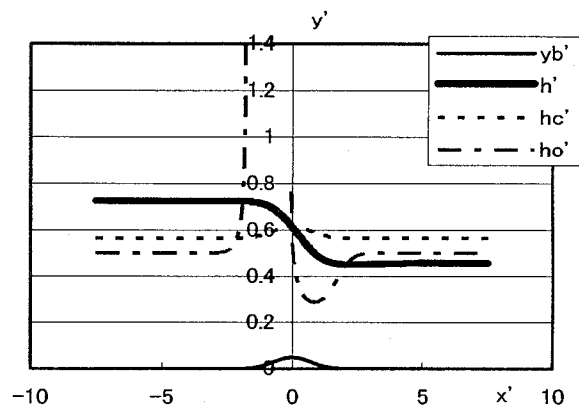


図-19 領域(ii)の特異点生起パターンの例

領域(i)の特異点の発生状況を示した例が図-18であり、領域(ii)の例が図-19である。

表-1の解析条件はすべて図-17の特異点生起の領域にしているにもかかわらず、突起上で常流から射流への遷移が生じているように考えられる水面形は図-13のCaseL-2のみであり、遷移に及ぼす鉛直加速度の効果、強

非線形解析の必要性について検討する必要がある。

3. おわりに

本研究は、単独突起上の開水路流れの水面形特性について、基礎的な考察を行ったものである。すなわち、Boussinesq 方程式を用いた突起上の流れの1次元解析法を用い、基礎式の線形解と摂動解を求め、それらの特性を考察するとともに、無次元水理パラメータを用いて水面形の分類と領域区分を行った。その結果、図-11に示した分類2によって線形解がほぼ分類できることを示すとともに、摂動解により、突起上で常流から射流に遷移しさらに波状跳水に接続する水面形がある程度再現されることを示した。

今後、本研究を強非線形解析に展開するとともに、水理実験を行い理論の検証に努めたい。

謝辞

最後に、本研究をするにあたって、水理実験、データ整理に多大な協力を頂いた京都大学工学部・技官、仙波秀治氏

に謝意を表します。

参考文献

- 1) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F. : Free surface shear flow over a wavy bed, *Proc.ASCE*, Vol.94, HY2, pp.431-454, 1968.
- 2) 日野幹雄, 宮永洋一 : 波状境界をもつ二次元管路流の解析, 土木学会論文報告集, No.264, pp.63-75, 1977.
- 3) 林 泰造, 大西光陽 : せん断流モデルによる2次元河床波発生 of 理論的研究, 第25回水理講演会論文集, pp.85-92, 1981.
- 4) Kobayashi, N. : Turbulent flows over a wavy boundary and formation of bed forms in erodible channels Dissertation for the degree of Ph.D. at MIT, 1979.
- 5) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章 : 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558, II-38, pp.81-89, 1997.
- 6) 細田 尚, 多田彰秀 : 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集, 第38巻, pp.457-462, 1994.

(2006年4月13日 受付)