

浸透層上における流れの不安定性理論

Stability of shallow water flow on permeable beds

大友裕隆*・泉 典洋**

Hirotaka OHTOMO and Norihiro IZUMI

*学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

**正会員 PhD 北海道大学教授 大学院工学研究科環境フィールド工学専攻

The instability of shallow water flow has been studied by a large number of researchers from a variety of viewpoints since a long time ago. It has been found from linear stability analysis that, when the Froude number is large, uniform flow becomes unstable, resulting in the evolution of a train of waves, which are called roll waves. In this study, a linear stability analysis is performed with the use of the Reynolds averaged Navier-Stokes equations and the Darcy's equation extended in order to investigate the instability of flow on permeable river beds. From the analysis, we conclude that the stability of the flow becomes unstable when the wavenumber is from 0.02 to 0.2 and high Froude number. Furthermore, it is found that flow becomes unstable in the range of wavenumber from 0.02 to 0.2 with decreasing permeable layer thickness and with increasing permeation.

Key Words : *instability, the Reynolds-averaged Navier-Stokes equation, Darcy's equation, linear stability analysis*

1. はじめに

急勾配斜面上の浅い流れには転波列と呼ばれる波列が形成されることが知られている。この転波列については流体力学の分野において古くから研究されており、発生初期における線形安定性や十分発達した準定常状態に関する研究などが数多くなされている^{1),2),3)}。それらの研究によるとフルード数が大きい領域において流れは擾乱に対して不安定となり、また実際に発生する転波列の波長領域を部分的に説明できることなどが明らかになっている。

一方、二つの流れが境界面を境にして上層と下層に隣接して存在している状況下では、境界面において流速分布に不連続が存在すると、流れは微小変化に対して不安定となることが知られている^{4),5)}。礫床河川の流れのように、底面が透水性の高い浸透層で構成されているような場合も、流速の大きい河川流と流速の小さい浸透流の間に不安定が発生することが予想される。同時に、フルード数が比較的大きい場合、河川流自体も不安定となり、水面には転波列が発生する。すなわち水面における不安定現象と河川流・浸透流間における不安定現象は相互に影響を及ぼし合うことが予想される。

この河川流・浸透流間の不安定現象の説明のために、著者ら⁶⁾は河川流および浸透流を水深および浸透層厚方向に積分した浅水流方程式を用いた線形安定解析を試みている。その解析結果によれば、浸透層厚および相対水深（限界水深／礫の平均粒径）が大きいほど、波数が大きい領域で臨界フルード数（不安定が生じる最小のフルード数）は1近くまで下がり、波数が大きく波長が短い擾乱に対して流れの不安定性が増加することがわかっている。しかし、波数が大きくなれば不安定

性も単調に増加し、発生初期における卓越波長が無限小となる結果も得られた。浅水流方程式の解析では水平方向スケールが水深スケールに比べて十分大きい現象を記述することは出来るが、水平方向スケールと水深スケールが同程度の現象を十分に説明できない。よってこの解析結果でも、波数が大きくなれば（波長が小さくなれば）不安定性が単調に増加するかについては留意する必要がある。その詳細を明らかにするためには浅水流近似を用いない解析が必要であると考えられる。

そこで本研究では、河川流および浸透流を水深および浸透層厚方向に平均しない方程式を用いて流れを定式化し、河川層-浸透層間の不安定現象についての線形安定解析を試みる。

2. 概念的モデル

礫で構成された透水性の高い浸透層上に河川流が生じている状況を考える。浸透層内には浸透流が生じており、河川流と浸透流は流下方向に等流状態で流れているとする。この等流状態が安定的に維持されれば、水深方向の流速はゼロとなり河川流-浸透流間に不安定は生じないと考えられる。

河川層および浸透層の流れに、流速が速いところと遅いところが発生したとする。すると流量保存（水深の変化）から、河床上の圧力に空間的な分布が生じて、水深が浅いところでは浸透層から河川層に、水深が深いところでは河川層から浸透層に向かって流れが発生する。河川流と浸透流は流速差が大きいため、河川流-浸透流間の境界面を通過する流れにより、河川流および浸透流はそれぞれ加速および減速、または減速および加速されることになる。このような現象は流れを一様にし、与えられた擾乱を減衰させる方向に働く場合

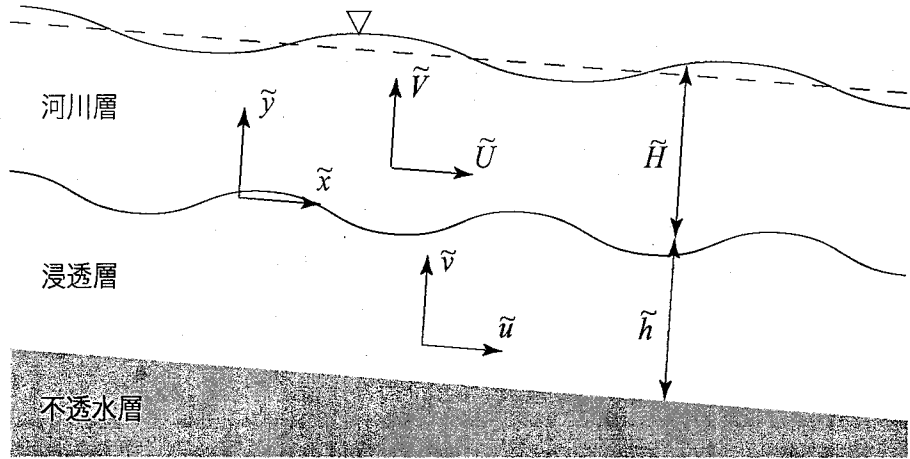


図-1 モデルの概念図

もあるが、一般的に流れには慣性力が働くため、外力に対する反応が遅れる。反応の遅れ（位相の遅れ）が発生すると、流速の速いところはさらに加速され、遅いところはさらに減速されるような力が働く場合がある。このとき流れは不安定になり、河川流-浸透流間を通過する流れは増大していくことになる。

図-1に示すような一様勾配斜面の二層流モデルを考える。流量は流下方向に一定とし、浸透層は水深とほぼ同程度から10倍程度のオーダーの厚さを有するものと仮定する。河川流および浸透流の運動方程式はそれぞれレイノルズ平均を取ったNavier-Stokes方程式およびダルシー則を考慮した方程式を用いる。等流状態にある河川流および浸透流に対し微小な擾乱を与え、その擾乱が発達するか減衰するかを線形安定解析を用いて調べることにする。

3. 定式化

3.1 支配方程式

図-1に示した河川層の流れは、レイノルズ平均を取った二次元のNavier-Stokes方程式を用いて、次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + gS + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} - g + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

ここで $\tilde{t}$ は時間、 $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ はそれぞれ流下方向および河床を原点とし上向きにとった水深方向の座標、 $\tilde{U}$ および $\tilde{V}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向の流速成分、 $\tilde{P}$ は圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 S は河床勾配、 $\tilde{\epsilon}$ は渦動粘性係数である。Engelund⁷⁾およびFredsoe⁸⁾は渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ が次のように表されると仮定している。

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \tilde{U}_f \tilde{H}_n \quad (4)$$

ここで $\tilde{U}_f$ および $\tilde{H}_n$ はそれぞれ等流状態における河川流の摩擦速度および水深であり、次式が成立する。

$$\tilde{U}_f = \left(\frac{\tilde{T}_b}{\rho} \right)^{1/2} = (g \tilde{H}_n S)^{1/2} \quad (5)$$

ここで $\tilde{T}_b$ は等流状態における底面せん断応力である。また本研究ではEngelund⁷⁾およびFredsoe⁸⁾に従い ϵ の値を0.077とする。

一方、河床浸透層内の流れは河床近傍から十分離れたところではダルシー則が成り立つと考えられる。しかし流速勾配が存在し、河川流との運動量輸送が活発な河床近傍においてはレイノルズ応力を考慮しなければならない。すなわち浸透流の運動方程式と連続の式は次のように表される⁴⁾。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + gS \\ &+ \frac{\tilde{\epsilon}_s}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{g}{k_p} \tilde{u} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - g \\ &+ \frac{\tilde{\epsilon}_s}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{g}{k_p} \tilde{v} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (8)$$

ここで $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ は浸透層内における見かけの流速のそれぞれ $\tilde{x}$ 方向および $\tilde{y}$ 方向成分、 $\tilde{p}$ は浸透層内の圧力、 λ は空隙率、 k_p は透水係数、 $\tilde{\epsilon}_s$ は浸透層内の渦動粘性係数である。浸透層内の渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}_s$ は次のように仮定する。

$$\tilde{\epsilon}_s = \epsilon_s \tilde{U}_f \tilde{B} \quad (9)$$

ここで $\tilde{B}$ は河床内の空隙の大きさを示す空隙スケールである。

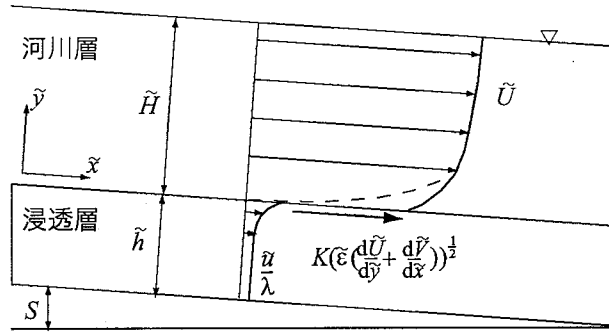


図-2 浸透層上における接線方向流速の接続条件

3.2 境界条件

水面では、水面に対して法線方向および接線方向の応力がどちらもゼロとなり、それぞれ次式で表される。

$$\tilde{e}_{ns} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } \tilde{y} = \tilde{H} \quad (10)$$

$$\tilde{e}_{ts} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } \tilde{y} = \tilde{H} \quad (11)$$

ここで $\tilde{e}_{ts}$ および $\tilde{e}_{ns}$ はそれぞれ水面における接線および法線方向の単位ベクトルであり、次式で表される。

$$\tilde{e}_{ts} = \frac{(1, \partial \tilde{H} / \partial \tilde{x})}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{H} / \partial \tilde{x})^2}}, \quad \tilde{e}_{ns} = \frac{(-\partial \tilde{H} / \partial \tilde{x}, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{H} / \partial \tilde{x})^2}} \quad (12a, b)$$

また $\tilde{\mathbf{T}}$ は応力テンソルであり、次のように表される。

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{xx} & \tilde{T}_{xy} \\ \tilde{T}_{yx} & \tilde{T}_{yy} \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$\tilde{T}_{xx} = -\tilde{P} + 2\rho\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{T}_{yy} = -\tilde{P} + 2\rho\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \quad (13b, c)$$

$$\tilde{T}_{xy} = \tilde{T}_{yx} = \rho\tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (13d)$$

水面における運動学的境界条件は次のように表される。

$$\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \quad \text{at } \tilde{y} = \tilde{H} \quad (14)$$

浸透層上では、浸透層内外の境界面を通過する流量が連続である。すなわち次式が成り立つ。

$$\tilde{V} = \tilde{v} \quad \text{at } \tilde{y} = 0 \quad (15)$$

また浸透層上では圧力が連続であり、次式で表される。

$$\tilde{P} = \tilde{p} \quad \text{at } \tilde{y} = 0 \quad (16)$$

ここで浸透層上における河川流と浸透流の流下方向流速の接続条件について考える。河川流の渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ は式 (4) で表すと、河川層断面内で一定値で仮定することになり、河床近傍の流速分布を精度良く表すことが出来ない。そこでここでは Engelund⁷⁾ および Fredsøe⁸⁾ のスリップ流速の仮定を用いる。彼らは底面近傍にせ

ん断力が一定の薄い層を考え、その層上部におけるスリップ流速とせん断力の関係を次のように仮定した。

$$\tilde{U}^2 = K^2 \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad \text{at } \tilde{y} = 0 \quad (17)$$

また K は次式で表される。

$$K = 1.9 + 2.5 \ln \left(\frac{\tilde{H}_n}{\tilde{k}_s} \right) \quad (18)$$

ここで $\tilde{k}_s$ は粗度高さである。浸透層が存在しない場合の境界条件 (17) を、浸透層が存在する場合に対して拡張することを考え、図-2 のように河川流および浸透流の河床上の流速差がせん断力に比例するものと仮定する。したがって次式が成り立つ。

$$\left(\tilde{U} - \frac{\tilde{u}}{\lambda} \right)^2 = K^2 \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad \text{at } \tilde{y} = 0 \quad (19)$$

次にせん断力が連続となる力学的境界条件が満たされる必要がある。河床上接線方向の応力が連続であることから、次の条件が得られる。

$$\rho\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\rho\tilde{\epsilon}_s}{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad \text{at } \tilde{y} = 0 \quad (20)$$

また浸透層底面では水深方向流速およびせん断力がゼロとなる条件を仮定し、次の境界条件を用いる。

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{at } \tilde{y} = -\tilde{h} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{at } \tilde{y} = -\tilde{h} \quad (22)$$

3.3 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{H}_n (x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\tilde{U}_f}{\epsilon} (U, V, u, v) \quad (23a, b)$$

$$(\tilde{P}, \tilde{p}) = \rho \left(\frac{\tilde{U}_f}{\epsilon} \right)^2 (P, p), \quad \tilde{t} = \frac{\epsilon \tilde{H}_n}{\tilde{U}_f} t \quad (23c, d)$$

上記の無次元化を用いると式 (1)–(3) および (6)–(8) は次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\sigma} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) - \frac{u}{\phi \sigma^{\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\sigma} + \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{\phi \sigma^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

ここで式 (25) および (27), (28) 中に現れる無次元パラメータ σ および γ , ϕ は次のように表される。

$$\sigma = \frac{S}{\epsilon^2}, \quad \gamma = \frac{\epsilon_s \tilde{B}}{\epsilon \tilde{H}_n}, \quad \phi = \frac{\tilde{k}_p}{(g \tilde{H}_n)^{\frac{1}{2}}} \quad (30a-c)$$

σ は正規化された河床勾配であり, γ および ϕ はそれぞれ浸透層の渦動粘性係数および透水係数に関する無次元パラメータとなっている。空隙率 λ については砂礫の大きさ, 形に影響されるが, 透水性の高い浸透層を考慮し 0.3–0.4 程度とする。また浸透層の無次元渦動粘性係数 ϵ_s の値は ϵ と同程度の値とし, 空隙スケール $\tilde{B}$ については空隙率と礫の平均粒径 (本研究では 2–10cm 程度とする) を用いて既往の研究から決定する⁹⁾。透水係数 $\tilde{k}_p$ についても礫の平均粒径を参考に 0.01–1m/s 程度の大きい値を有するものとする。すると γ および ϕ はそれぞれ 0.006–0.03 および 0.003–0.3 程度となる。

また 9 つの境界条件 (10) および (11), (14)–(16), (19)–(22) は次のように無次元化される。

$$e_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot e_{ns} = 0 \quad \text{at } y = H \quad (31)$$

$$e_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot e_{ns} = 0 \quad \text{at } y = H \quad (32)$$

$$V = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{at } y = H \quad (33)$$

$$V = v \quad \text{at } y = 0 \quad (34)$$

$$P = p \quad \text{at } y = 0 \quad (35)$$

$$\left(U - \frac{u}{\lambda} \right)^2 = \kappa^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad \text{at } y = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{at } y = 0 \quad (37)$$

$$v = 0 \quad \text{at } y = -h \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = -h \quad (39)$$

ここで κ は正規化された $K (= \epsilon K)$ である。 κ に含まれる粗度高さ $\tilde{k}_s$ についても礫の平均粒径から決定する。すると κ は 0.45–0.8 程度の値を有する。また e_{ts} および e_{ns} はそれぞれ無次元化された $\tilde{e}_{ts}$ および $\tilde{e}_{ns}$ であり, 次のように表される。

$$e_{ts} = \frac{(1, \partial H / \partial x)}{\sqrt{1 + (\partial H / \partial x)^2}}, \quad e_{ns} = \frac{(-\partial H / \partial x, 1)}{\sqrt{1 + (\partial H / \partial x)^2}} \quad (40a, b)$$

$\mathbf{T}$ は無次元化された応力テンソルであり, 次のように表される。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$T_{xx} = -\frac{P}{\epsilon^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = -\frac{P}{\epsilon^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial y} \quad (41b, c)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (41d)$$

3.4 基本解

線形安定解析を行う前に擾乱を与える前の基本解を求める。基本状態では等流状態が実現している。式 (24) および (25), (27), (28) で t 微分項および x 微分項, V , v を落とすと次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -1 \quad (42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\epsilon^2 \gamma \phi \sigma^{\frac{1}{2}}} u = -\frac{\lambda}{\gamma} \quad (44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma} \quad (45)$$

式 (43) および (45) より次式が得られる。

$$P = p = \frac{1-y}{\sigma} \quad (46)$$

上式中 P および p はそれぞれ $0 \leq y \leq 1$ および $-h \leq y \leq 0$ における圧力であり, 上式は河川層および浸透層で静水圧分布が成立することを意味している。

式 (42) に水面 ($y = 1$) でせん断力がゼロ ($dU/dy = 0$) の条件と浸透層上 ($y = 0$) での接線方向流速の接続条件 (36) を用いることで次式が導かれる。

$$U = \kappa + \frac{u_b}{\lambda} + y - \frac{1}{2} y^2 \quad (47)$$

ここで $u_b (= u(0))$ は浸透層上での浸透流の見かけの流速である。式 (47) を水深方向に積分することで河川流の等流平均流速 U_n が次のように求められる。

$$U_n = \int_0^1 U dy = \kappa + \frac{u_b}{\lambda} + \frac{1}{3} \quad (48)$$

このとき等流状態時における河川流のフルード数 F_r は次のように表される。

$$F_r = \sigma^{1/2} \left(\kappa + \frac{u_b}{\lambda} + \frac{1}{3} \right) \quad (49)$$

また式 (44) に浸透層上 ($y = 0$) のせん断力の条件 (37) および浸透層底面での条件式 (39) を用いることで u の厳密解が得られ、次のように表される。

$$u = \frac{\epsilon \phi^{1/2} \sigma^{1/4}}{2\gamma^{1/2}} \left\{ \lambda^{1/2} \left(1 + \exp \left[\frac{2\lambda^{1/2}}{\epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4}} (h+y) \right] \right) + \epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4} \left(-1 + \exp \left[\frac{2\lambda^{1/2} h}{\epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4}} \right] \right) \exp \left[\frac{\lambda^{1/2}}{\epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4}} y \right] \right\} \left(-1 + \coth \left[\frac{h\lambda^{1/2}}{\epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4}} \right] \right) \exp \left[-\frac{\lambda^{1/2}}{\epsilon(\gamma\phi)^{1/2} \sigma^{1/4}} y \right] \quad (50)$$

4. 線形安定解析

次のような摂動展開を導入する。

$$(U, V, u, v, P, p, H) = (U_0, 0, u_0, 0, P_0, p_0, 1) + A(U_1, V_1, u_1, v_1, P_1, p_1, H_1) \quad (51)$$

ここで A は擾乱の振幅であり、微小と仮定する。式 (51) を支配方程式 (24)–(29) に代入して A のオーダーで整理すると、 $O(1)$ において前節で求めた基本状態の解が得られる。

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = -1 \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\epsilon^2 \gamma \phi \sigma^{1/2}} u_0 = -\frac{\lambda}{\gamma} \quad (53)$$

$O(A)$ では次式が導かれる。

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_0' V_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) \quad (54)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \right) \quad (55)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0' v_1 \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \frac{u_1}{\phi \sigma^{1/2}} \quad (57)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{u_0}{\lambda^2} \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) - \frac{v_1}{\phi \sigma^{1/2}} \quad (58)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

ここで $'$ は y による全微分を表している。

次のような流関数を導入する。

$$(U_1, V_1) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (u_1, v_1) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (60a, b)$$

すると支配方程式 (54)–(59) は次のように書き直される。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} + U_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - U_0' \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (61)$$

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - U_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} - \epsilon^2 \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (62)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - u_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{\phi \sigma^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (63)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - \frac{u_0}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\phi \sigma^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (64)$$

上式から P_1 および p_1 を消去して次式を得る。

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - U_0'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (65)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - u_0'' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} \nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{1}{\phi \sigma^{1/2}} \nabla^2 \psi = 0 \quad (66)$$

流関数 Ψ および ψ は次のような形で与えられると仮定する。

$$(\Psi(x, y), \psi(x, y)) = (\hat{\Psi}(y), \hat{\psi}(y)) e^{i(kx - \omega t)} \quad (67)$$

すると P_1 および p_1 , H_1 も同様な形を有する。

$$(P_1(x, y), p_1(x, y)) = (\hat{P}_1(y), \hat{p}_1(y)) e^{i(kx - \omega t)} \quad (68)$$

$$H_1(x) = \hat{H}_1 e^{i(kx - \omega t)} \quad (69)$$

k は擾乱の無次元波数である。式 (67) を支配方程式 (65) および (66) に代入して整理すると、次式が得られる。

$$(-i\omega + ikU_0)(-k^2 \hat{\Psi} + \hat{\Psi}'') - ikU_0'' \hat{\Psi} - \epsilon^2(k^4 \hat{\Psi} - 2k^2 \hat{\Psi}'' + \hat{\Psi}^{iv}) = 0 \quad (70)$$

$$\left(\frac{-i\omega}{\lambda} + \frac{iku_0}{\lambda^2} + \frac{1}{\phi \sigma^{1/2}} \right) (-k^2 \hat{\psi} + \hat{\psi}'') - \frac{iku_0''}{\lambda^2} \hat{\psi} - \frac{\epsilon^2 \gamma}{\lambda} (k^4 \hat{\psi} - 2k^2 \hat{\psi}'' + \hat{\psi}^{iv}) = 0 \quad (71)$$

また式 (51) および式 (60), 式 (67)–(69) から境界条件 (31)–(39) は次のように線形化される。

$$\frac{i\hat{\Psi}'''(1)}{k} - \left(3ik + \frac{\omega}{k\epsilon^2} - \frac{U_0(1)}{\epsilon^2} \right) \hat{\Psi}'(1) - \frac{U_0'(1)}{\epsilon^2} \hat{\Psi}(1) + \left(\frac{1}{\epsilon^2 \sigma} - 2ikU_0'(0) + \frac{iU_0'''(0)}{k} \right) \hat{H}_1 = 0 \quad (72)$$

$$\hat{\Psi}''(1) + k^2 \hat{\Psi}(1) + U_0''(1) \hat{H}_1 = 0 \quad (73)$$

$$-k \hat{\Psi}(1) + (\omega - k U_0(1)) \hat{H}_1 = 0 \quad (74)$$

$$\hat{\Psi}(0) - \hat{\psi}(0) = 0 \quad (75)$$

$$\begin{aligned} & i k \epsilon^2 \left(\hat{\Psi}'(0) - \frac{\gamma}{\lambda} \hat{\psi}'(0) \right) + U_0'(0) \hat{\Psi}(0) - U_0(0) \hat{\Psi}'(0) \\ & + \frac{\left(u_0(0) \hat{\psi}'(0) - u_0'(0) \hat{\psi}(0) \right)}{\lambda^2} + \frac{\omega}{k} \left(\hat{\Psi}'(0) - \frac{\hat{\psi}'(0)}{\lambda} \right) \\ & - \frac{i \epsilon^2}{k} \left(\hat{\Psi}'''(0) - \frac{\gamma}{\lambda} \hat{\psi}'''(0) \right) - \frac{i \hat{\psi}'(0)}{k \phi \sigma^{\frac{1}{2}}} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & \kappa^2 \left(\hat{\Psi}''(0) + k^2 \hat{\Psi}(0) \right) - 2 U_0(0) \hat{\Psi}'(0) - \frac{2 u_0(0) \hat{\psi}'(0)}{\lambda^2} \\ & + \frac{2}{\lambda} \left(U_0(0) \hat{\psi}_0'(0) + u_0(0) \hat{\Psi}'(0) \right) = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

$$\hat{\Psi}''(0) - \frac{\gamma}{\lambda} \hat{\psi}''(0) = 0 \quad (78)$$

$$\hat{\psi}(-h) = 0 \quad (79)$$

$$\hat{\psi}''(-h) = 0 \quad (80)$$

導かれた摂動方程式を解き擾乱の発達率を求めるために、境界条件をもつ三点境界値問題を解くことを考える。本研究では固有値問題において精度のよい解法として知られている Chebyshev 多項式展開を用いたスペクトル法により求める。

Chebyshev 多項式展開を適用する前に河川層 ($0 \leq y \leq 1$) および浸透層 ($-h \leq y \leq 0$) で変数変換を行う必要がある。Chebyshev 多項式展開の定義域は ($-1 \leq \xi \leq 1$) であるから、次のような変数変換が有効である。

$$y = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (81a)$$

$$y = \frac{h}{2}(\xi - 1) \quad (-h \leq y \leq 0) \quad (81b)$$

$\hat{\Psi}$ および $\hat{\psi}$ を Chebyshev 多項式展開を用いて次のように表す。

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(2y - 1) \quad (82a)$$

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(\xi) = \sum_{n=0}^N b_n T_n\left(\frac{2}{h}y + 1\right) \quad (82b)$$

上式を支配方程式 (70) および (71), 境界条件 (72)–(80) に代入する。またそれらの式を次の点で評価することを考える。

$$\xi_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (83)$$

上式を用いて支配方程式および境界条件を a_i ($i = 0, 1, \dots, N$) および H_1 , b_i ($i = 0, 1, \dots, N$) について整理すると次式が得られる。

$$A\vec{a} = \omega B\vec{a} \quad (84)$$

$$\vec{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N, H_1, b_0, b_1, \dots, b_N]^T$$

A および B は $(2N + 3) \times (2N + 3)$ の行列である。上式は ω を固有値とする一般化固有値問題を構成している。ここで得られた ω の虚部が擾乱の発達率 Ω となり、次のように表される。

$$\Omega = \Omega(k; \sigma, \gamma, \phi, h, \lambda, \kappa) \quad (85)$$

発達率 Ω を決定する無次元パラメータは、擾乱の無次元波数 k , 正規化された河床勾配 σ , 浸透層の渦動粘性係数および透水係数に関するパラメータ γ および ϕ , 浸透層厚 h , 空隙率 λ , スリップ流速の仮定による κ の 7 個である。また本解析では $N = 30$ とした。

5. 結果及び考察

5.1 浸透層厚 h の影響による安定性の変化

発達率 Ω の正規化された河床勾配 σ および無次元波数 k , 浸透層厚 h による変化を等高線図により示したのが図-3 である。図は縦軸を正規化された河床勾配 σ , 横軸を無次元波数 k に取ってある。また太い実線が $\Omega = 0$ の中立曲線, 細い実線が正のコンタ, 破線が負のコンタを示している。中立曲線から正の領域では等流状態の流れは不安定となることを意味している。 γ および ϕ , κ としては, 比較的透水性の高い礫床で標準的と考えられる 0.015 および 0.03, 0.6 とし, 空隙率 λ は 0.3 の値を用いている。

図-3 は (a) $h = 0.5$ および (b) $h = 1$, (c) $h = 5$, (d) $h = 10$ の結果であり, 浸透層厚が等流水深のそれぞれ 0.5 倍および 1 倍, 5 倍, 10 倍の場合である。図-3 より不安定領域は無次元波数 k が 0.02–0.2 程度の限られた領域に存在していることがわかり, 浸透層厚 h を変化させても擾乱が発達する波数領域はほぼ変わらないことが見て取れる。すなわち 0.02–0.2 程度の無次元波数以外の擾乱は安定となり, 発達し得ないことがわかる。また (a)–(d) において擾乱が不安定となる最小の σ はそれぞれ 0.8 および 1.2, 1.8, 1.8 程度であり, 式 (49) により河川流の等流状態時のフルード数はそれぞれ 1.00 および 1.25, 1.55, 1.55 程度となる。すなわち浸透層厚が小さいほど, 臨界フルード数は小さくなり, 波数 0.02–0.2 程度の擾乱に対しての不安定性が増大することがわかる。

ここである波数において発達率 Ω が最大になるとすれば, その波数を有する擾乱が他の波数の擾乱よりはやく発達することになる。その無次元卓越波数により, 有次元の卓越波長は次のように表される。

$$\tilde{L} = \frac{2\pi \tilde{H}_n}{k} \quad (86)$$

無次元卓越波数 k は 0.02–0.2 程度に存在するので, 卓越波長 $\tilde{L}$ は等流水深の 30–300 倍程度である。また卓越波長は σ が大きくなるにつれて減少する傾向にあることがわかる。

5.2 浸透層の透水性パラメータの変化による安定性

図-4 は $\lambda = 0.3$ および $h = 1$ の下で, γ および ϕ , κ の値を変化させたときの σ – k 平面における不安定領域の変化を示したものである。

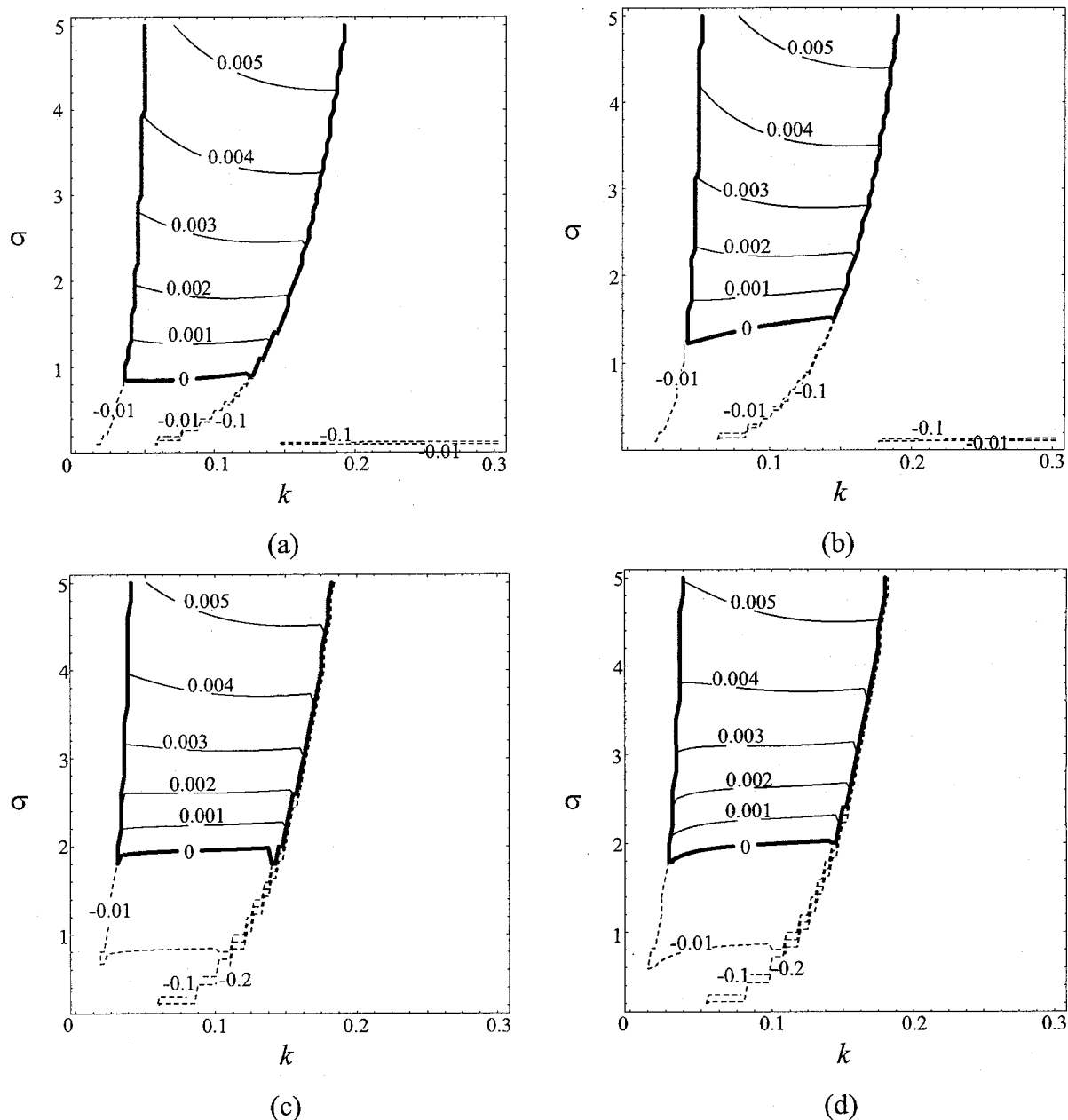


図-3 正規化された河床勾配 σ および擾乱の波数 k , 浸透層厚 h による発達率 Ω の変化. 太実線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し, 細実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す. $\gamma = 0.015$, $\phi = 0.03$, $\kappa = 0.6$, $\lambda = 0.3$, (a) $h = 0.5$, (b) $h = 1$, (c) $h = 5$, (d) $h = 10$.

図-4(a) および (b) はそれぞれ $\gamma = 0.006$, $\phi = 0.003$, $\kappa = 0.8$ および $\gamma = 0.03$, $\phi = 0.3$, $\kappa = 0.45$ の場合における結果である. ここで γ および ϕ の値が大きいほど, また κ の値が小さいほど浸透層の透水性は高いことを示しており, 3つの無次元パラメータは前述した通り, 空隙率と礫の平均粒径により決定している.

図-3(b) の結果を含めて比較すると, γ および ϕ の増加, κ の減少に伴って, σ が小さい領域において擾乱が発達する様子が見られる. 図-4(a) および (b) において擾乱が不安定となる最小の σ はそれぞれ 1.5 および 0.6 であり, 式 (49) によりフルード数は 1.52 および 0.90 である. また γ および ϕ , κ の値を変化させた場

合においても, 擾乱が発達する波数領域は浸透層厚の変化の結果と同様, ほぼ変わらないことが見て取れる. よって浸透層の透水性が高いほど, 波数 0.02-0.2 程度の擾乱に対しての不安定性が増大することがわかる.

6. 結論

河川流および浸透流をレイノルズ平均をとった Navier-Stokes 方程式およびダルシー則を考慮した方程式により定式化し, 河川層-浸透層間の不安定性について線形安定解析を行った. 解析の結果, 0.02-0.2 程度の限られた波数領域において擾乱は発達し, 河川層-

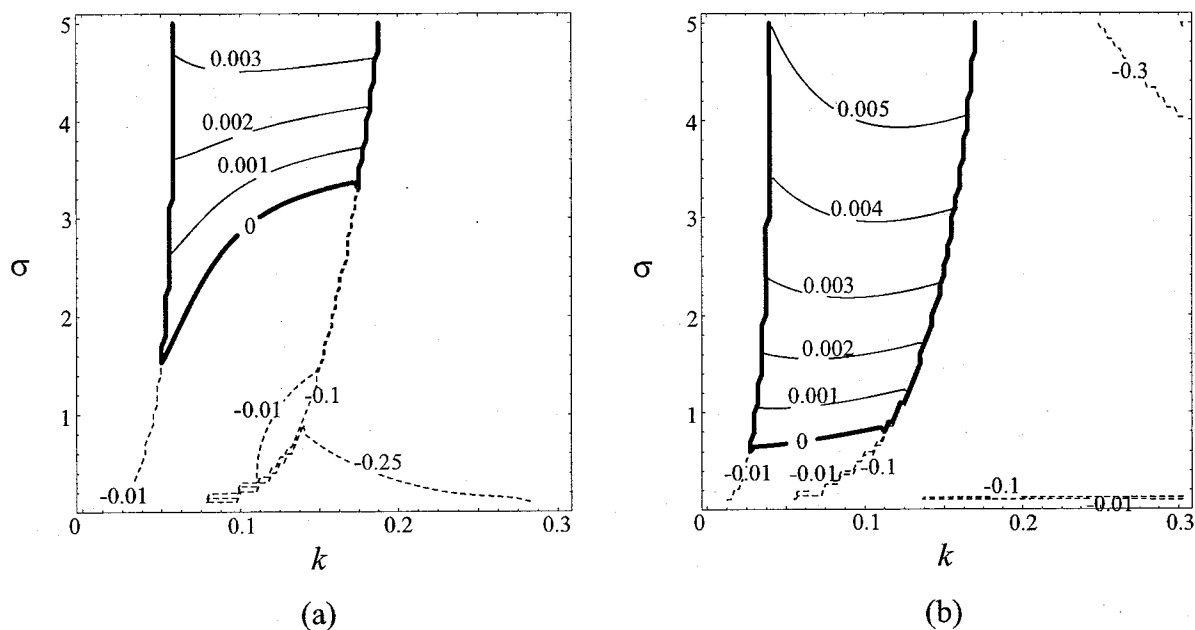


図-4 正規化された河床勾配 σ および擾乱の波数 k , 浸透層の透水性を示す γ , ϕ , κ による発達率 Ω の変化. 太実線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し, 細実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す. $h = 1$, $\lambda = 0.3$, (a) $\gamma = 0.006$, $\phi = 0.003$, $\kappa = 0.8$, (b) $\gamma = 0.03$, $\phi = 0.3$, $\kappa = 0.45$.

浸透層間に不安定が発生することがわかった. また発生初期の卓越波長は等流水深の 30–300 倍程度となることが推測される. さらに浸透層厚が小さいほど, 浸透層の透水性が大きいほど波数 0.02–0.2 程度の擾乱に対しての不安定性が増大することが明らかとなった.

参考文献

- 1) Jeffreys, H.: The flow of water in an inclined channel of rectangular section, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 49, 1925.
- 2) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: A criterion for instability of flow in steep channels, Trans. Amer. Geophy. Union, 1940.
- 3) Dressler, R. F., Mathematical solution of the prob-

lem of roll-waves in inclined open channels, Commun. Pure Appl. Maths 2, 149–194, 1949.

- 4) 日本流体力学会: 流体力学ハンドブック, 丸善, 1987.
- 5) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, 1974.
- 6) 大友裕隆, 泉典洋, 浸透層上における浅水流の安定性について, 応用力学論文集, Vol.8, pp.813–820, 2005.
- 7) Engelund, F., Instability of erodible beds, J. Fluid Mech., Vol. 42, 225–244, 1971.
- 8) Fredsøe, J., On the development of dunes in erodible channels, J. Fluid Mech., Vol. 64, 1–16, 1974.
- 9) 山田正, 川端規之, 浸透層上の流れの抵抗則に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第 325 号, 1982.

(2006 年 4 月 13 日 受付)