

改良レベルセット法による非圧縮性気液二相流のシミュレーション

An Enhanced Level-Set Method
and its Application to Incompressible Gas-Liquid Two-Phase Flows

横嶋 哲*
Satoshi Yokojima

*正会員 博(工) 静岡大学助手 工学部システム工学科 (〒432-8003 浜松市城北 3-5-1)

An enhanced resolution capturing method has been developed for topologically complex, incompressible gas-liquid two-phase flows. The method is based on the level set method to represent the interface combined with two recent advances in the treatment of the interface, a boundary-condition-capturing method [Kang et al., J. Sci. Comput. 15 (2000) 323] to accurately satisfy the jump condition at the gas-liquid interface, and a particle level set method [Enright et al., J. Comput. Phys. 183 (2002) 83] in which massless marker particles are used to enhance the resolution of the interface. We present direct comparisons between computations made with the improved level set method and those with the conventional level set method. Several benchmark flows in two dimensions establish that the present method has clear superiority over the classical method, especially in computations where the spatial resolution is not as high.

Key Words : *gas-liquid two-phase flows, CFD, interface-capturing method, particle level set method, boundary-condition-capturing method*

1. はじめに

気液二相流は自然界や工業装置内に様々な形で現れ、その相間の熱や運動量輸送を正しく見積もることはしばしば重要となる。界面の時空間発展に対して何ら仮定を持ち込まない、界面運動の(乱流の、ではない)直接数値シミュレーションはそのような混相現象を理解・予測する上で非常に有用となる。

本研究では、非圧縮性気液二相流の運動をより正確に、より効率的に予測可能なひとつの直接数値シミュレーション法を提案する。この方法は界面捕獲法のひとつとして既によく知られているレベルセット法^{1),2)}に、最新の二つの手法が導入されたものである。ひとつは境界条件捕獲法 (boundary-condition-capturing method, 以下では BCC 法)³⁾と呼ばれるもので、相界面で不連続となる物性値や諸物理量の分布を数値的にばかすことなく正確に表現するための方法である。もうひとつは界面形状を正確に捕獲し、各相の体積を高精度に保存するための、粒子レベルセット法 (particle level set method, 以下では PLS 法)⁴⁾である。別の表現を用いれば、BCC 法は界面でのジャンプ条件 (動力学的条件) を、PLS 法は運動学的条件を、より正確に満たすための新たな手法と言える。

本論文の構成は以下のようなものである。§2 ではレベルセット法に基づく流体運動と界面の数学上の定式化を行い、その離散化手法を示す。§3 では BCC 法の、§4 では PLS 法の、導入と代表的なベンチマーク・テストを用いた精度検証を行う。§5 では BCC 法と PLS 法の両方を組

み合わせた BCC-PLS 法を、水中を变形・浮上する微小気泡シミュレーションに適用することで、その有用性を実証する。本法で示す計算例は全て空間二次元の流れ場を対象としているが、BCC-PLS 法の空間二次元から三次元への拡張は容易である。§6 で本論文をまとめる。

2. 数学上の定式化と数値計算法

2.1 数学上の定式化

本研究では、互いに混ざらない二種の異なる物性値をもつ流体からなる非圧縮性流れを、物性値が変化するひとつの流体とみなす ‘one-fluid formalism’ (例えば Lakehal et al.(2002)⁵⁾参照) を採用する。そのような流体に対する連続式と運動方程式は以下のように記述される:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{2\mu s_{ij}\}, \quad (2)$$

ここで u_i は流速ベクトル, p は流体圧力, ρ は流体密度, μ は粘性係数, g_i は重力加速度ベクトル, $s_{ij} (\equiv \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i))$ はひずみ速度テンソル, を表す。

ここでは界面捕獲法にレベルセット法を用いる。レベルセット法ではスカラー関数 ϕ (レベルセット関数) のゼロ等値面として界面を表し, $\phi > 0$ の領域は一方の

流体（相）に、 $\phi < 0$ はもうひとつの流体（相）に対応する。流体の物性値が $\rho = \rho(\phi)$ のようにレベルセット関数の値だけで決められるならば、連続式（式 (1)）は

$$\frac{d\rho}{d\phi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

のように書き換えられる。界面近傍を除いて密度が一定な場合を考えれば、式 (3) は以下のように分解できる⁶⁾：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} = 0 \Big|_{\phi=0}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (5)$$

式 (4) はレベルセット関数に対する発展方程式（レベルセット方程式）で、式 (5) は非圧縮性流れに対する連続式である。これよりレベルセット方程式を解く必要があるのは界面近傍のみであることがわかる。実際に本研究では局所化手法のひとつ⁷⁾を用いて、レベルセット方程式（式 (4)）と再初期化方程式（式 (7)）を界面近傍でのみ解いており、界面捕獲に関わる計算コストを抑えている。

同様の手順を踏めば、式 (2) もレベルセット方程式（式 (4)）と運動方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ 2\mu s_{ij} \} \quad (6)$$

に分解される。式 (4)–(6) が本研究の支配方程式を構成する。

2.2 レベルセット関数の再初期化

レベルセット法では、レベルセット関数 ϕ は通常は界面までの符号付き距離関数として定義されるが、移流方程式（式 (4)）によって ϕ の時間発展を追いかけるうちに、この符号付き距離関数としての性質、 $|\nabla\phi| = 1$ 、は損なわれる⁸⁾。そのため、支配方程式（式 (4)–(6)）とは別に、再初期化と呼ばれる、 $|\nabla\phi| = 1$ の性質を取り戻す手続きが定期的に行われる。よく用いられるのは次式（再初期化方程式と呼ばれる）を反復する方法で、本研究でもこの方法を採用した：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + S(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0. \quad (7)$$

S は符号関数と呼ばれ、 S の具体的な表現には様々なものが提案されているが、ここでは

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \Delta^2}} \quad (8)$$

とした。 ϕ_0 は ϕ の再初期化前の値で、 Δ には格子幅 Δx を与えた。本報で示す計算結果は全て一様等方な計算格子を用いて行われたが、そうでない場合には例えば $\Delta \equiv \sqrt{\Delta x \Delta y}$ のように与えればよい。

実際には式 (7) は以下のような移流方程式に変形された上で利用される：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \vec{w} \cdot \nabla\phi = S(\phi_0). \quad (9)$$

$\vec{w} \equiv S(\phi_0)\nabla\phi/|\nabla\phi|$ は移流速度に相当する。重要な点は、この‘移流速度’ $\vec{w}$ は界面法線方向を常に界面から遠ざかる向きに得られることで、このため ϕ の再初期化は界面近傍から始まる⁹⁾。

2.3 界面形状情報の評価

界面捕獲法にレベルセット法を採用することの利点のひとつは、界面法線ベクトル $\vec{n}$ や界面曲率 κ といった界面形状に関わる情報をレベルセット関数から容易にかつ正確に評価できることである：

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad (10)$$

$$\kappa = -\nabla \cdot \vec{n}. \quad (11)$$

2.4 数値計算法

§2.1 で示された系を、デカルト座標・スタガード格子上で有限差分法により離散化した。運動方程式は、拡散項を二次精度 Crank-Nicolson 法で、その他の項を三次精度 Runge-Kutta 法¹⁰⁾で、半陰的に時間積分し、空間微分演算については、移流項のみ五次精度上流補間法¹¹⁾で、その他の項は二次精度中心差分法で離散化した。運動方程式と連続式のカップリングにはフラクショナル・ステップ法を用いた。圧力評価のための Poisson 方程式には ICCG 法（不完全 Cholesky 前処理付き共役勾配法）を適用して収束解を算出した。

レベルセット及び再初期化方程式の移流項の空間微分には五次精度 WENO スキーム¹²⁾を用いた。時間積分は三次精度 TVD Runge-Kutta 法¹³⁾によって陽的にを行った。

3. 境界条件捕獲 (BCC) 法

本節と §4 では、§2 で得られた系をより正確に解くための新たな手法を導入する。

一般に流体密度や粘性係数といった物性値は界面で不連続となる。粘性係数が不連続なこと、及び表面張力の存在によって圧力は界面で不連続となる。粘性係数の不連続性はさらに速度勾配も界面で不連続にする。これらは界面を挟む形で運動量保存則を適用することで得られるジャンプ条件より明らかである。

従来利用されてきたレベルセット法（例えば Sussman *et al.* (1998)⁹⁾）では、密度や粘性係数は例えば

$$\rho(\phi) = \rho^- + (\rho^+ - \rho^-)H(\phi), \quad (12)$$

$$\mu(\phi) = \mu^- + (\mu^+ - \mu^-)H(\phi) \quad (13)$$

のように、数値的にばかされた Heaviside 関数

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi\phi}{\epsilon} & -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon \\ 1 & \epsilon < \phi \end{cases} \quad (14)$$

を用いて、界面近傍で急激にしかし連続的に変化する量として取り扱われた。上付きの添え字 $-$, $+$ はそれぞれ $\phi < 0$, $\phi > 0$ の相内の流体の物性値を表す。 ϵ はバンド幅や界面厚さと呼ばれ、 $\epsilon = 1.5\Delta x$ がよく用いられる。このとき物性値は界面前後の幅 $2\epsilon = 3\Delta x$ の薄い層内で遷移する。

このような不連続分布に対するスムージングの導入はレベルセットに限った話ではない。例えば VOF 系統や CIP 法を界面捕獲に用いる場合、界面を含むセル内の密度は各相の体積による重み付き平均値で与えられるので、やはり界面近傍では非物理的な物性値が用いられる。

界面に作用する面積力である表面張力も、界面形状と計算格子形状が一般に一致しない Euler 法では正確な取り扱いが難しい。CSF (continuum surface force) 法は表面張力のモデルとして、界面捕獲手法によらず Euler 法で広く用いられているもので、表面張力をジャンプ条件から取り除く代わりに運動方程式に新たな体積力を付加する^{14),15)}。この体積力は界面近傍でのみ作用するもので、レベルセット法では例えば

$$\frac{\delta(\phi)\sigma\kappa\vec{n}}{\rho} \quad (15)$$

のように表現される⁸⁾。ここで σ は表面張力係数、 δ は数値的にばかされたデルタ関数で、

$$\delta(\phi) \equiv \frac{dH}{d\phi} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos \frac{\pi\phi}{\epsilon} & |\phi| < \epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

のように与えられる。

このように従来の手法では、物性値と表面張力をスムージングすることで界面での圧力や速度勾配の不連続性が取り除かれた場を解析対象としてきた。このアプローチはこれまで概ね良好な成果を収めてきたが、界面極近傍の現象の素過程を検討するような場合には、スムージングの影響が避けられず、適切でない。

本研究では、そのような界面極近傍の現象も正しく再現できる手法を求めて、境界条件捕獲 (boundary-condition-capturing, BCC) 法³⁾を採用する。界面でのジャンプ条件を変形することで圧力のジャンプ量 $[p]$ 、圧力勾配のジャンプ量 $[\partial p / \partial x_i]$ 、及び粘性応力のジャンプ量 $[\mu \partial u_i / \partial x_j]$ を陽的に評価できるが (ここで $[A] \equiv A^+ - A^-$ は界面でのジャンプ量を表す)、BCC 法とは界面付近での空間離散近似の際にこれらのジャンプ条件を損なわないために工夫された手法である。詳細は Kang *et al.* (2000) を参照されたい。

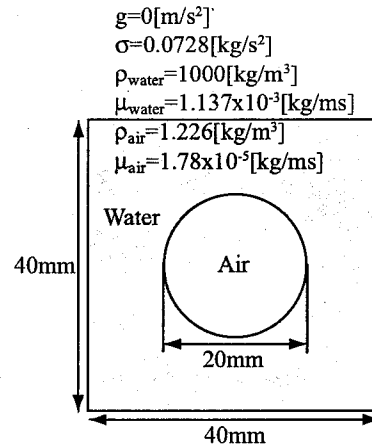


図-1 水中の‘静止’気泡問題の概要。

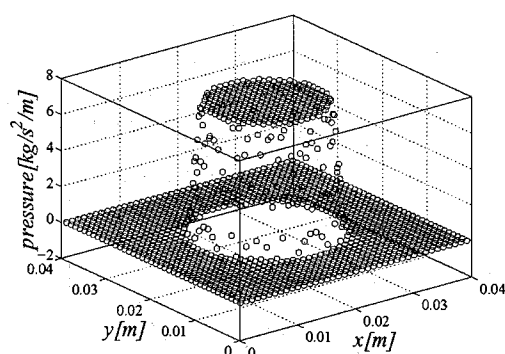
3.1 検証例：水中の‘静止’気泡

辺長が 0.04m の、水で満たされた正方領域内の中央に半径 0.01m の円形気泡が位置する場合を考える。ここでは BCC 法の性能をより明確に示すために、重力加速度をゼロとする。これによって流速は領域内の全ての点でゼロであり続け、気泡は初期の形状を保ち続けるという、厳密解が得られる。対象流れの概要と与えられた物性値を図-1 に示す。

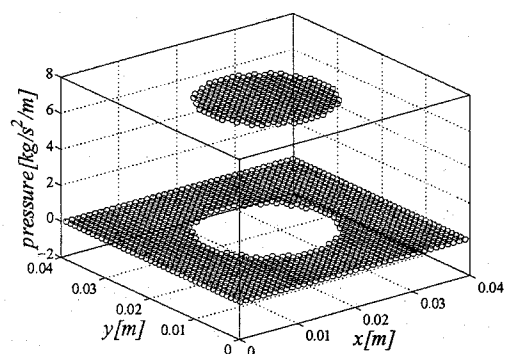
BCC 法と、比較のため物性値のスムージングと CSF 法を用いた従来のレベルセット法により得られた圧力分布を図-2 に示す。BCC 法では気泡内外の圧力差が正確に捉えられているのに対し、従来法では界面近傍で圧力がばやけて連続的に分布している。これは BCC 法が界面に作用する表面張力や粘性係数の不連続分布を正確に評価できていることを示す。図-3 では両者から得られた流速ベクトルを比較する。このように本来は発生しない、しかし数値解析において界面の表面張力の不正確なモデリングのために運動方程式が完全に釣り合わないことに起因する、界面近傍の渦は spurious [parasite] currents と呼ばれる^{16),17),18)}。Spurious currents (の絶対値) の最大値及び rms 値は BCC 法を用いることで従来法の約 1/1000 にまで抑えられている。

4. 粒子レベルセット (PLS) 法

界面捕獲にレベルセット法を用いる利点には、方法論が単純明快なためにプログラムの実装が容易であることや、レベルセット関数からは界面曲率に代表されるような界面形状に関する情報が簡単にかつ正確に求まる点が挙げられよう (§2.3 参照)。その一方でレベルセット法は流体体積の保存性に難があることもよく知られている。レベルセット法の体積保存性を改善する様々な方法がこれまで提案されてきたが (例えば文献^{19),20)})、ここではそれらのうちの粒子レベルセット (particle level set, PLS) 法⁴⁾を採用する。

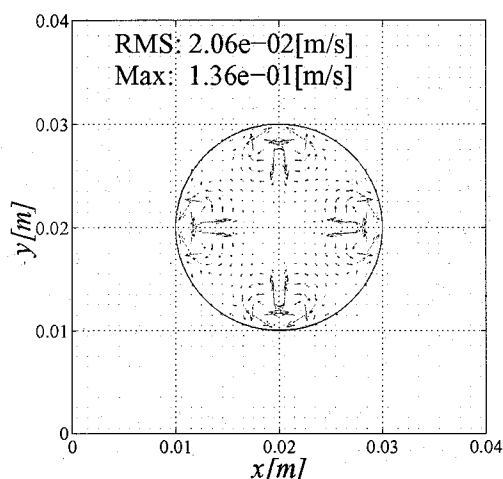


(a) conventional level set method

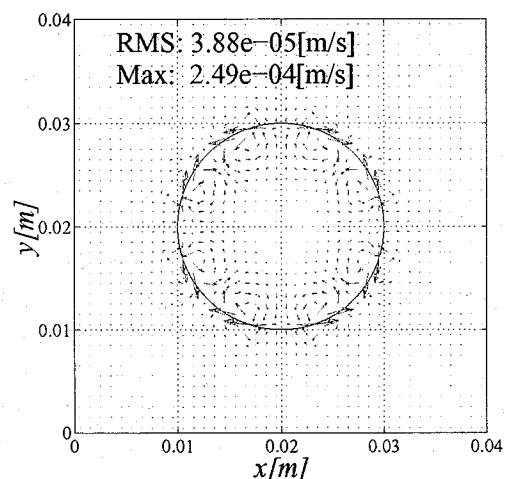


(b) boundary-condition-capturing method

図-2 水中の‘静止’気泡周りの圧力分布の比較.



(a) conventional level set method



(b) boundary-condition-capturing method

図-3 水中の‘静止’気泡周りの流速分布 [spurious currents] の比較.

PLS 法は Euler 法であるレベルセット法に Lagrange 粒子を組み入れることで, Euler 法では解像できない, 格子幅と同程度かそれ以下のスケール (サブグリッドスケール) の界面挙動をも捉えることを目指した, ハイブリッドな手法である. PLS 法では質量を持たない仮想的なマーカー粒子を界面近傍に配置する. マーカー粒子は二組 (正/負) 用意され, 正の粒子は界面近傍の $\phi > 0$ 側に, 負の粒子は $\phi < 0$ 側に初期に配置され, 粒子は局所流速によって流される:

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_p), \quad (17)$$

$\vec{u}(\vec{x}_p)$ はスタガード変数配置位置から粒子位置に補間された流速である. そして正の粒子がゼロ・レベルセットを超えて $\phi < 0$ の領域に, あるいは負の粒子が $\phi > 0$ の領域に現れた場合に, その原因をレベルセット方程式 (式 (4)) の数値解法の不正確さによるとみなし, それら ‘escaped’ 粒子を利用してレベルセット関数 ϕ を修正する. これは Lagrange 法 (マーカー粒子) は Euler 法 (レベルセット法) に比べて, 質量保存性やサブグリッドスケールの界面挙動の捕獲能力において優れていると考えるためである.

粒子位置での流速 $\vec{u}(\vec{x}_p)$ の評価には bilinear 補間 (三次元計算では trilinear 補間に拡張される) を, 式 (17) の時間積分には三次精度 TVD Runge-Kutta 法¹³⁾を用いた. これらをより高精度の手法で置き換えることで PLS 法の精度向上を目指すこともできるが, 以下に示すように現在の離散化手法でも十分に良好な成果がベンチマーク・テストで得られる. PLS 法の詳細は Enright *et al.* (2002)⁴⁾を参照されたい.

4.1 検証例: Zalesak ディスクの剛体回転

辺長 100 ($0 \leq x, y \leq 100$) の正方領域内の (50, 75) に位置する, 切り込みのある半径 15 のディスク (Zalesak’s disk²¹⁾) を考える. 切り込み幅は 5, 長さは 25 である. 速度場は定常・既知で, 次式で与えられる:

$$\begin{aligned} u &= (\pi/314)(50 - y), \\ v &= (\pi/314)(x - 50). \end{aligned}$$

厳密解ではディスクは 628 単位時間毎に 1 回転する.

100×100 の等間隔格子上の初期のゼロ・レベルセット等値線と界面近傍に配置された正/負マーカー粒子を図-4 に示す. マーカー粒子の取り扱い法 (個数・配置

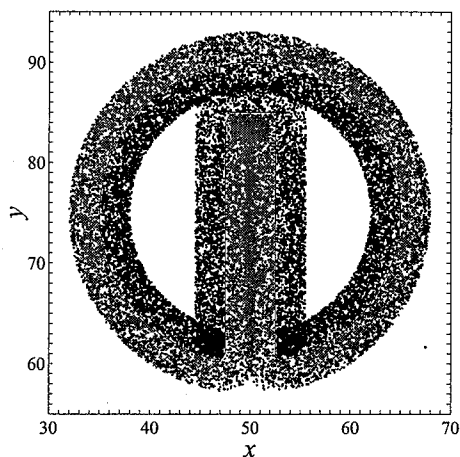


図-4 100×100 の等間隔直交格子上の初期のディスク形状 (ゼロ・レベルセット) とマーカー粒子分布。

等) は Enright *et al.* に従った。図-5 は 1 回転及び 2 回転後のディスク形状を、粒子による修正を施さない、通常のレベルセット法による結果と併せて示す。マーカー粒子を用いることによって、特にシャープな角の形状が初期形状のまま保たれていることがわかる。

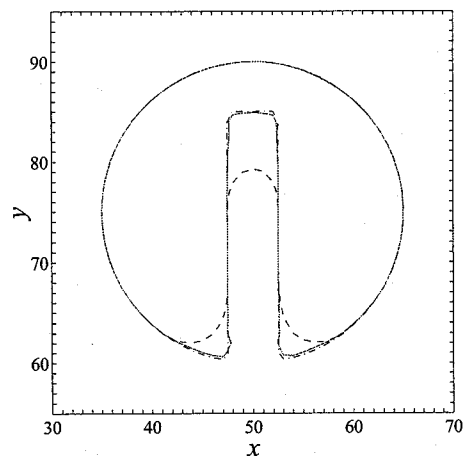
4.2 検証例：旋回運動による変形

§4.1 で取り上げた Zalesak のディスク問題²¹⁾は界面捕獲法の拡散誤差を測る上でよい指標のひとつである。しかしながらディスクは剛体回転をするのみであるから、このテストでは界面の伸縮、特に引き伸ばしによって相厚がある方向に計算格子幅に匹敵する程度にまで薄くなるような状況での界面捕獲能力を測ることはできない。本節では旋回流を利用することで、そのようなより厳しい状況で PLS 法的能力を見定める。速度場は次式で与えられる²²⁾：

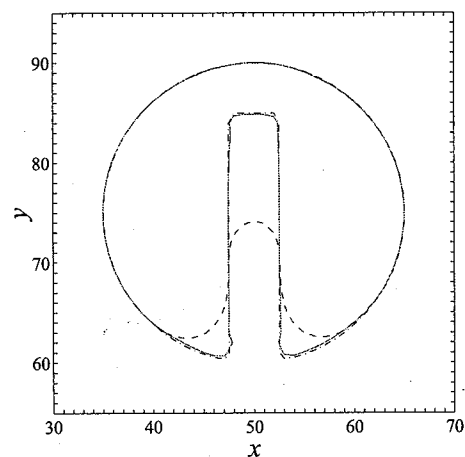
$$\Psi = (1/\pi) \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) g(t).$$

関数 $g(t)$ のため流れは非定常である。ここでは $g(t) = \cos(\pi t/T)$ とする。ただし時刻 t は $0 \leq t \leq T$ の範囲内を考える。関数 $g(t)$ をこのように与えることで、 $t=0$ の初期に時計周りの旋回流は徐々に弱まり、 $t=T/2$ で停止した以後は反転する。つまりこの流れ場は $t=T/2$ で時間軸について対称性 ($q(x, y, T) = q(x, y, 0)$) をもつ。この性質を利用すれば、たとえ初期条件や流れがどんなに複雑であっても $t=T$ における数値解を初期条件と比較することで計算スキームの性能を評価することができる²²⁾。

単位正方領域 ($0 \leq x, y \leq 1$) 内の $(.5, .75)$ の位置に半径.15 の円が位置する場合を考える。この円は旋回流によって計算領域の中心を取り巻くように非常に細長いフィラメント形状に引き伸ばされ ($t < T/2$)、そして初期状態に戻っていく ($t > T/2$)。ここでは $T=8$ とした。



(a) after one revolution



(b) after two revolutions

図-5 Zalesak ディスク形状の比較：レベルセット法(---), PLS 法(—), 理論解(-----)。

図-6, 7 は 256×256 の等間隔格子を用いた場合の、マーカー粒子による修正を施さない場合と施す場合の流体要素の時間発展を示す。さらに $64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256$ の計算格子を用いた場合の $t=T$ での流体要素形状を重ね合わせたものを厳密解と共に図-8 に示す。PLS 法を用いることで、格子点数がたった 16 分の 1 の場合にも通常のレベルセット法に比べてはるかに正確に流体要素の伸縮が捉えられていることがわかる。

PLS 法は VOF 法や CIP-CSL 法のように数学的に体積保存を保証しないが、上述の検証結果に見られるように、Lagrange 法と Euler 法の相互補完によって体積保存を高精度に達成する。この体積保存性に加えて、図-6-図-8 で確認された、優れた形状保存性をも併せ持つことが、PLS 法の、他の Euler 型界面捕獲法に対して有利な点である。

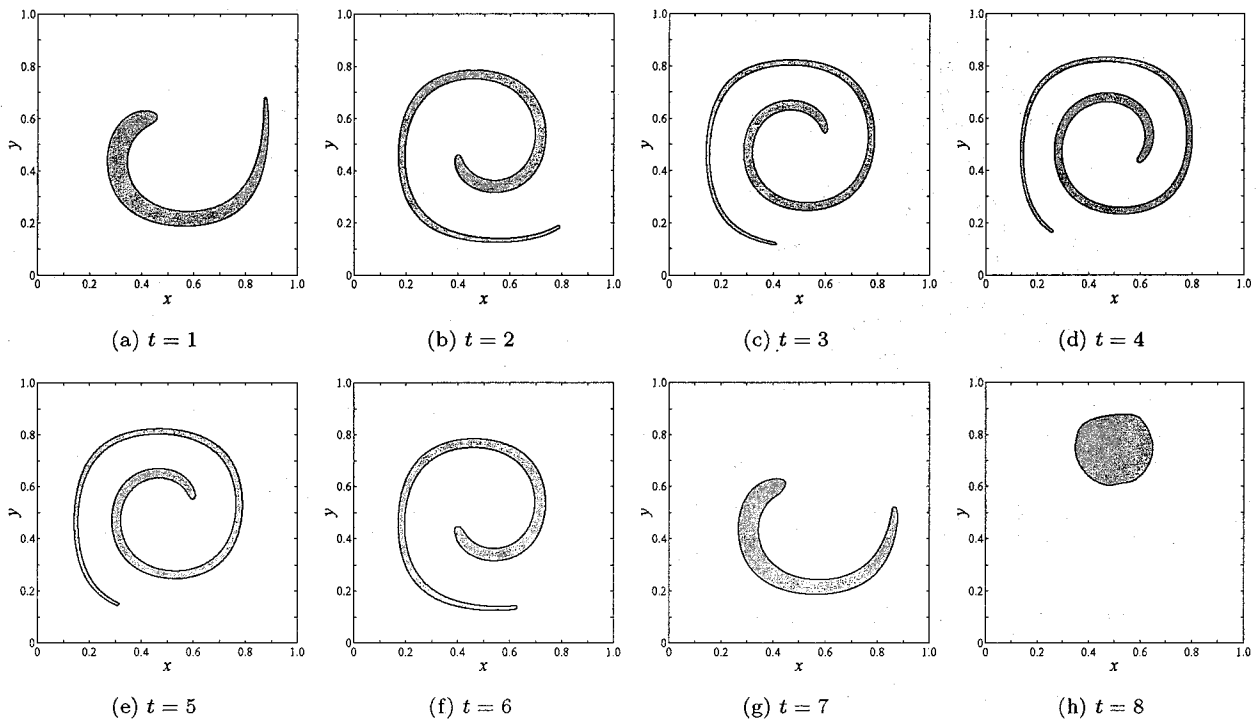


図-6 256×256 の等間隔直交格子上的旋回変形問題における流体要素の時間発展（レベルセット法）.

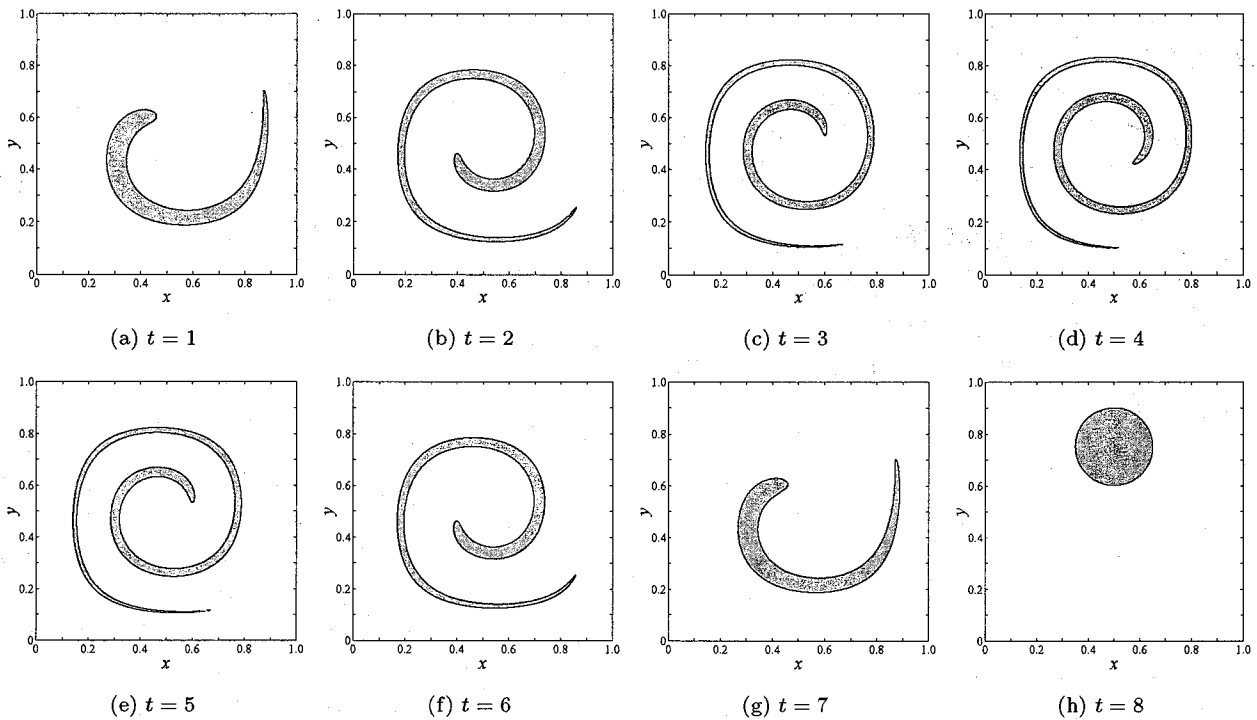


図-7 256×256 の等間隔直交格子上的旋回変形問題における流体要素の時間発展（PLS 法）.

5. 水中を浮上する単一微小気泡

§3 及び §4 では、BCC 法³⁾を用いた非圧縮性二相流ソルバーと、PLS 法⁴⁾により強化された界面捕獲法が別々に導入され、その基本性能が確認された。本節ではこれらを組み合わせた BCC-PLS 法を、水中を界面変形を伴いながら浮上する微小気泡の数値シミュレーションに適用することで、その能力を検証する。微小

気泡とは、ここでは界面張力が強いために気泡が浮上開始後すぐに（少なくともシミュレーション時間内には）分裂することがない程度に小さいことを表す。

$[-.01 \text{ m}, .01 \text{ m}] \times [-.01 \text{ m}, .02 \text{ m}]$ の水で満たされた計算領域内の原点に配置された半径 $1/300 \text{ m}$ の円形気泡を考える。これは Kang *et al.*³⁾ で BCC 法のテスト・ケースのひとつに採用されている。流れの概要を図-9 に示

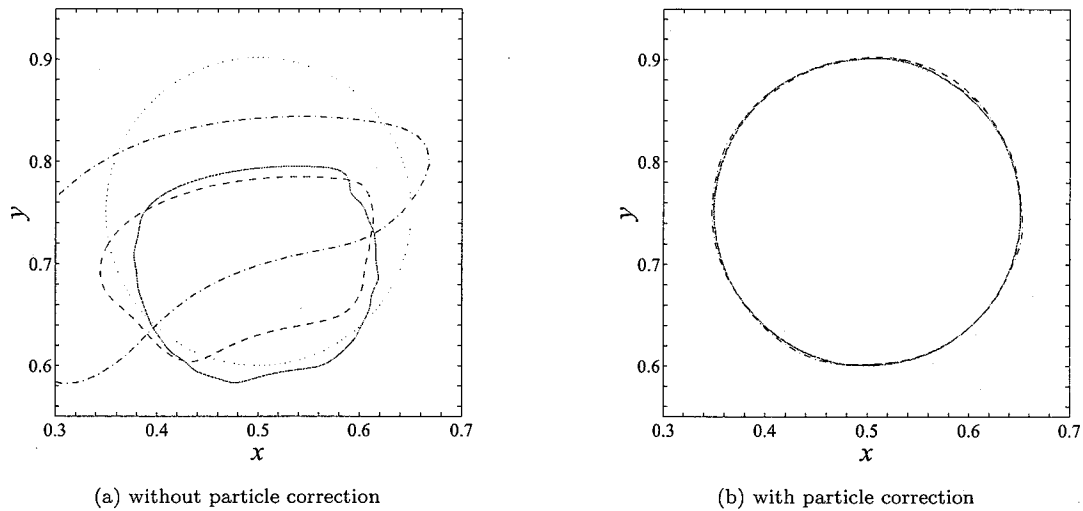


図-8 旋回変形問題の $t = T$ における流体要素形状の比較：理論解 ($\cdots$), 64×64 ($\cdots\cdots$), 128×128 ($---$), 256×256 ($—$).

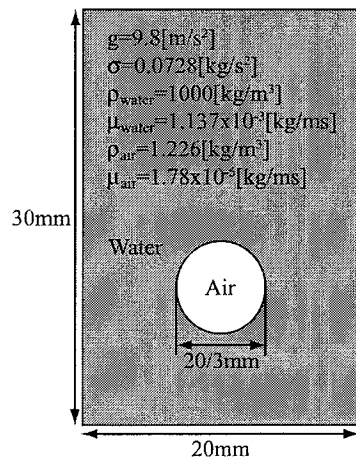


図-9 水中を浮上する単一微小気泡問題の概要。

6. おわりに

非圧縮性の気液二相流を高精度に予測する方法として、境界条件捕獲 (boundary-condition-capturing, BCC) 法³⁾と粒子レベルセット (particle level set, PLS) 法⁴⁾を導入した、改良レベルセット法 (BCC-PLS 法) を提案した。BCC-PLS 法を様々な二次元ベンチマーク流れに適用し、密度比が大きい場合、表面張力が支配的な場合といった一般に正確な数値予測が困難な流れ場においても極めて良好に流況を再現できることが確かめられた。特に高精度な体積保存性と形状保存性を併せ持つ PLS 法を採用することで、空間解像度が十分に確保できないような状況において、通常のレベルセット法を用いた場合に比べてはるかに信頼性の高い予測結果が得られることが確かめられた。この BCC-PLS 法は界面近傍の現象をばかさないことから、界面極近傍での乱れと界面の相互作用のような、従来の界面捕獲法を用いた数値シミュレーションでは正しく再現できない現象の詳細を明らかにすることが期待できる。

す。図-10 及び 11 に気泡の浮上・変形の様子を $t = .02$, $t = .035$, $t = .05$ での界面形状により示す。図-10 は PLS 法の機能をオフにした場合の結果で、図-11 との比較によって PLS 法によって質量保存性がどの程度改善されているかを示す。解の格子解像度依存性をみるために、計算格子数は 40×60 から 160×240 の3段階に変化させている。計算格子数が 80×120 や 160×240 のように空間解像度が高い場合にはマーカー粒子によるレベルセット関数の補正効果はあまり見られないが、 40×60 のケースでは両者の結果に有意な差がある。つまり PLS 法は格子点数に対する解の依存性を弱め、特に空間解像度が十分に用意できないような厳しい状況で、通常のレベルセット法に比べてはるかに信頼性の高い予測結果が得られることを意味する。

参考文献

- 1) Sethian, J.A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- 2) Osher, S., and Fedkiw, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- 3) Kang, M., Fedkiw, R.P., and Liu, X.-D.: A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow, *J. Sci. Comput.* **15**, pp.323–360, 2000.
- 4) Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J., and Mitchell, I.: A hybrid particle level set method for improved interface capturing, *J. Comput. Phys.* **183**, pp.83–116, 2002.
- 5) Lakehal, D., Meier, M., Fulgosi, M.: Interface tracking towards the direct simulation of heat and mass transfer in multiphase flows, *Int. J. Heat and Fluid*

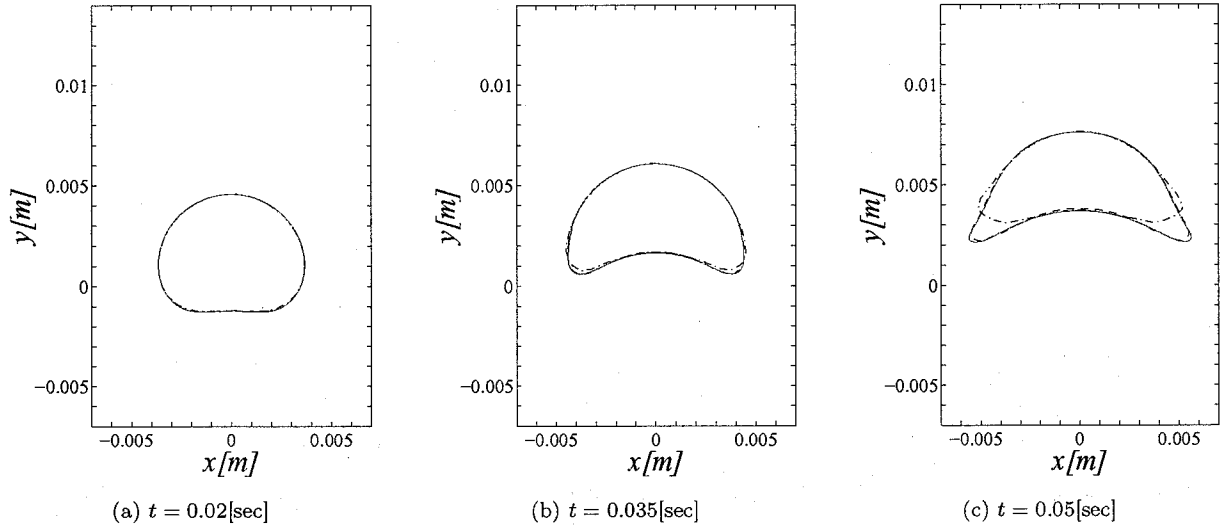


図-10 浮上する単一微小気泡形状の空間解像度依存性の比較（レベルセット法）：---, 40×60; - · -, 80×120; —, 160×240.

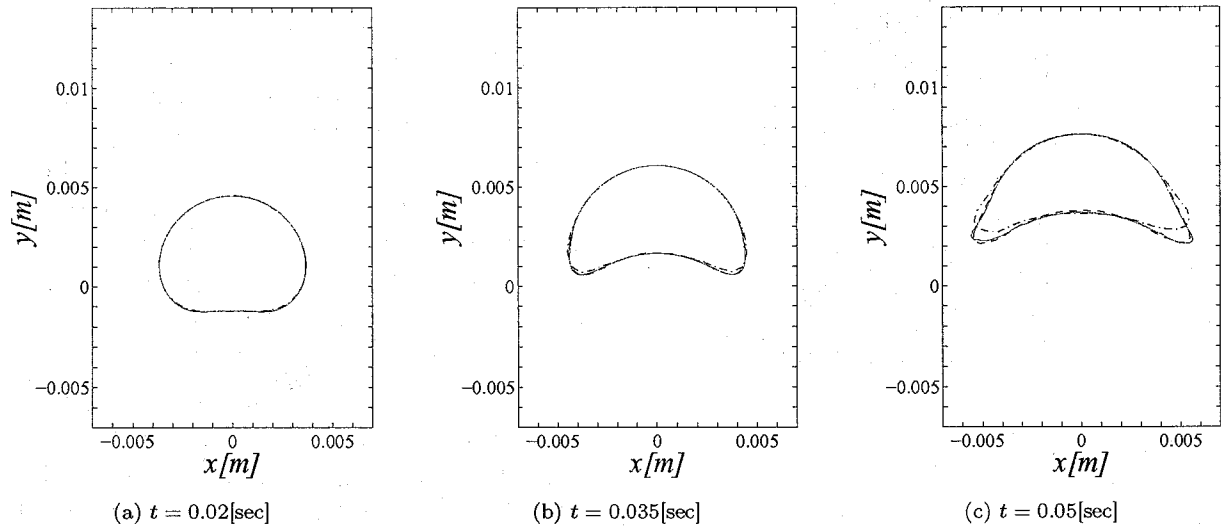


図-11 浮上する単一微小気泡形状の空間解像度依存性の比較（PLS法，凡例は図-10を参照）。

- Flow* **23**, pp.242–257, 2002.
- 6) Ham, F., and Young, Y.-N.: A Cartesian adaptive level set method for two-phase flows, *CTR Annual Research Briefs*, NASA Ames/Stanford, pp.227–237, 2003.
 - 7) Peng, D., Merriman, B., Osher, S., Zhao, H., and Kang, M.: A PDE-based fast local level set method, *J. Comput. Phys.* **155**, pp.410–438, 1999.
 - 8) Sussman, M., Smereka, P., and Osher, S.: A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows, *J. Comput. Phys.* **114**, pp.146–159, 1994.
 - 9) Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P., and Osher, S.: An improved level set method for incompressible two-phase flows, *Comput. Fluids* **27**, pp.663–680, 1998.
 - 10) Spalart, P.R., Moser, R.D., and Rogers, M.M.: Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions, *J. Comput. Phys.* **96**, pp.297–324, 1991.
 - 11) Kajishima, T.: Upstream-shifted interpolation method for numerical simulation of incompressible flows, *Trans. JSME B* **60**(578), pp.3319–3326, 1994 (in Japanese).
 - 12) Jiang, G.-S., and Peng, D.: Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Sci. Comput.* **21**, pp.2126–2143, 2000.
 - 13) Shu, C.W., and Osher, S.: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *J. Comput. Phys.* **77**, pp.439–471, 1988.
 - 14) Unverdi, S.O., and Tryggvason, G.: A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *J. Comput. Phys.* **100**, pp.25–37, 1992.
 - 15) Brackbill, J.U., Kothe, D.B., and Zemach, C.: A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Phys.* **100**, pp.335–354, 1992.
 - 16) Scardovelli, R., and Zaleski, S.: Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, pp.567–603, 1999.
 - 17) Popinet, S., and Zaleski, S.: A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **30**, pp.775–793, 1999.
 - 18) Renardy, Y., and Renardy, M.: PROST: A parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method, *J. Comput. Phys.* **183**, pp.400–421, 2002.

- 2002.
- 19) Chang, Y.C., Hou, T.Y., Merriman, B., and Osher, S.: A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows, *J. Comput. Phys.* **124**, pp.449–464, 1996.
 - 20) Sussman, M., and Fatemi, E.: An efficient, interface preserving level set re-distancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow, *SIAM J. Sci. Comput.* **20**(4), pp.1165–1191, 1999.
 - 21) Zalesak, S.T.: Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids, *J. Comput. Phys.* **31**, pp.335–362, 1979.
 - 22) LeVeque, R.: High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**, pp.627–665, 1996.

(2006 年 4 月 13 日 受付)