

SPH 法による土構造物の弾塑性解析

Elasto-plastic analysis of earth structure using SPH method

小野祐輔*・西田真悟**・清野純史***

Yusuke ONO, Shingo NISHIDA and Junji KIYONO

*正会員 博(工) 京都大学大学院助手 工学研究科都市社会工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**学生員 京都大学大学院修士課程学生 工学研究科都市社会工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

***正会員 博(工) 京都大学大学院助教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

The SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method developed by Lucy(1997) and Monaghan(1977) were employed to analyze elasto-plastic behavior of earth structures. The SPH method has been widely used in the fluid dynamics or astronomical physics. In this paper, the plastic potential theory was newly introduced to the SPH method and its capability to analyze the elasto-plastic behavior of earth structures was shown through several case studies.

Key Words : SPH, Elasto-plastic analysis, earth structure and earthquake

1. はじめに

河川堤防や道路盛土などの土構造物は地震時に大きな被害を受け易い。さらには二次被害を誘引したり、災害対応へ及ぼす影響が大きい。その被害程度を予測することは非常に重要な課題である。現在、土構造物の被害予測では、有限要素法による数値解析が広く用いられている。しかし、有限要素法はメッシュに依存した解析法であるがゆえの欠点を有している。例えば、解析対象が大きく破壊されてしまうような外力を受けた場合、有限要素法では計算の続行が不可能となってしまう。土構造物の地震時挙動解析にとって大きな制約となっている。

土構造物の大変形を取り扱うことのできる解析法として、個別要素法¹⁾が挙げられる。個別要素法では、剛体として分割された要素間のばねの設定に対して、解析対象の特性を精度良く反映することは困難であることが多い。Meguro and Tagel-Din は個別要素法を発展させ、応用要素法²⁾を提案している。応用要素法は構造物の地震時挙動を微小な変形状態から終局状態、さらには完全崩壊状態まで追跡することのできる優れた数値解析手法である。しかしながら、連続体の構成則を適用する際には、要素ばねの特性に変換する必要がある。また、破壊が生じるのは人為的に分割された要素間のばねにおいてのみであり、要素分割が破壊の進展に支配的な役割を及ぼし得るという問題がある。

ところで、流体力学の分野では、連続体の大変形を含む解析に適した数値解析手法として SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法が盛んに適用されている。これは連続体を多数の粒子の集合として考え、その粒子挙動を運動方程式によって求めるという手法である。SPH 法ではメッシュ作成が不要であり、また破壊を含

む大変形問題を容易に取り扱うことができる。SPH 法は、宇宙物理学における星間物質の挙動や惑星衝突問題の数値シミュレーション技法として Lucy³⁾や Gingold and Monaghan⁴⁾⁵⁾によって開発された。SPH 法は特別な工夫もなく大変形解析にそのまま適用可能である。また、有限要素法のようにメッシュを生成する必要がない。宋ら⁶⁾⁷⁾、酒井ら⁸⁾、Belytschko et. al.⁹⁾¹⁰⁾は SPH 法を構造解析分野におけるメッシュレス解析の一手法として位置づけ、その適用性を詳細に検討している。

SPH 法を土構造物に対して適用した事例として Naili et al.¹¹⁾が挙げられる。しかしながら、彼らの論文では液状化を起こした後の地盤をビンガム流体として取り扱っており、弾塑性体としての地盤に SPH 法を適用したものではない。

本論文では、将来、地震によって引き起こされる破壊を伴う土構造物の大変形問題に適用することを目的として、有限要素法による解析で用いられる塑性ポテンシャルの概念を含む弾塑性構成則を SPH 法に導入し、その妥当性を検証する。土構造物の解析において、SPH 法の有限要素法に対する利点は破壊を伴う大変形を容易に取り扱える点である。また、個別要素法や応用要素法に対する利点は、これまで多数提案されている土要素の構成則がそのまま導入できることにある。

2. SPH の理論

2.1 カーネル近似

SPH 法では関数 $f(\mathbf{x})$ をカーネル近似と呼ばれる近似手法によって評価する。まず、関数 $f(\mathbf{x})$ はディラックのデルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ を用いて次式のように表す。

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1)$$

次に、関数 $f(x)$ の近似 $\langle f(x) \rangle$ が次式によって表されるものとする。

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x') W(x - x', h) dx' \quad (2)$$

ここで、 $W(x - x', h)$ はカーネル関数と呼ばれ、

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x') \quad (3)$$

および

$$\int W(x, h) dx = 1 \quad (4)$$

を満足する。ここで、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

今、関数 $f(x)$ は密度 $\rho(x)$ を持つ媒質上で定義されているとすると、(2) 式は、

$$\langle f(x) \rangle = \int \frac{f(x')}{\rho(x')} W(x - x') \rho(x') dx' \quad (5)$$

と書き改めることができ、これをカーネル近似と呼ぶ。

対象とする媒質を N 個の微小な要素に分割し、各要素の質量を $m_1, m_2, \dots, m_N$ 、重心の位置を $x_1, x_2, \dots, x_N$ とすると、要素 k が (5) 式の右辺の積分に与える貢献は、

$$\frac{f(x_k)}{\rho(x_k)} W(x - x_k) m_k \quad (6)$$

となる。したがって、関数 $f(x)$ の離散化したカーネル近似が次式のように得られる。

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{k=1}^N f(x_k) W(x - x_k, h) \frac{m_k}{\rho(x_k)} \quad (7)$$

(7) 式によるカーネル近似では、座標 x_k において密度 $\rho(x_k)$ 、質量 m_k および関数 $f(x_k)$ が定義されていれば、要素の大きさや形状は必要とされない。そこで、SPH では座標 x_k に大きさを持たない粒子を与え、種々の物理量は粒子の移動によって運ばれるとする。

また、(7) 式は全ての要素についての足し合わせを意味しているが、一般的な SPH ではカーネル関数 $W(x, h)$ として、図-1 のように微小要素の中心から距離 h 内でのみ値を持ち、それ以外ではゼロとなる関数を用いるため、実際には対象とする粒子から距離 h 内にある粒子のみの影響を考慮すれば良い。この意味で h は影響半径と呼ばれる。

2.2 微分形のカーネル近似

通常、連続体の解析においては関数 $f(x)$ だけでなく、その微分形 $\nabla \cdot f(x)$ の評価が必要となる。(2) 式より、

$$\nabla \cdot f(x) = \int \nabla \cdot f(x') W(x - x', h) dx' \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(x') W(x - x', h) &= \nabla \cdot \{f(x') W(x - x', h)\} \\ &\quad - f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) \end{aligned} \quad (9)$$

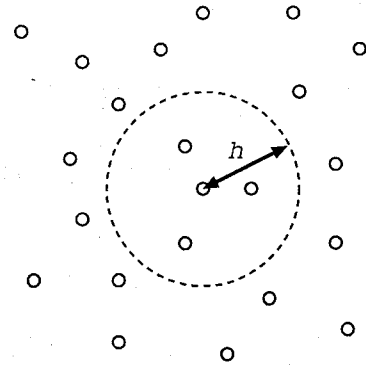


図-1 影響半径にある粒子

であるから、(8) 式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(x) &= \int \nabla \cdot \{f(x') W(x - x', h)\} \\ &\quad - \int f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) dx' \end{aligned} \quad (10)$$

と書き換えられる。ここで、ダイバージェンスの定理より、

$$\int \nabla \cdot \{f(x') W(x - x', h)\} dx' = 0 \quad (11)$$

である。よって、関数 $f(x)$ の微分形 $\nabla \cdot f(x)$ のカーネル近似は、

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(x) \rangle &= \\ &\quad - \int f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) dx' \end{aligned} \quad (12)$$

となる。式(12)を粒子によって離散化することによって、

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(x) \rangle &= \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{f(x_k)}{\rho(x_k)} \cdot \nabla W(x - x_k, h) m_k \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。

2.3 カーネル関数

カーネル近似に用いるカーネル関数 $f(x)$ には様々なものが提案されている。これまでに提案されたもののうち、代表的なものとして3次スプライン関数、Gauss分布関数、三角関数によるものが挙げられる。本論文ではSPH法において最も一般的で、酒井ら⁸⁾によって弾性体の解析において良好な精度と積分の収束性を持つことが確認されている3次スプライン関数を用いる。

2次元の3次スプライン関数は、粒子間の距離を r 、影響半径を h と表すと、 $q = r/h$ ($q > 0$) に対し、 $q \leq 1$ のとき、

$$W(r, h) = \frac{10}{7\pi h^2} \left(1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 \right) \quad (14)$$

$1 < q \leq 2$ のとき、

$$W(r, h) = \frac{10}{28\pi h^2} (2 - q)^3 \quad (15)$$

$q > 2$ のとき

$$W(r, h) = 0 \quad (16)$$

と与えられる。

2.4 SPH 法による弾性体の解析

密度 ρ を持つ弾性体の運動方程式は、(17) 式で与えられる。

$$a^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + g^i \quad (17)$$

ここで、 a^i は i 方向の加速度、 σ^{ij} は応力テンソル、 x^j は j 方向の座標、 g^i は i 方向の物体力を表している。

二次元弾性場では Hooke の法則より応力テンソルとひずみテンソルは次の関係を持つ。

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \epsilon^{kl} \quad (18)$$

ここで、ラメの定数 λ, μ を用いると、

$$D^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (19)$$

である。一方、ひずみ速度テンソルは、

$$\dot{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \quad (20)$$

と表される。

SPH 法による弾性体解析では、まずカーネル近似によって $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ を求めて式 (20) に代入し、各粒子毎にひずみ速度を計算する。得られたひずみ速度から構成式に従って各粒子の応力を求め、式 (17) をカーネル近似した式に代入することで、各粒子位置における加速度 a^i が計算される。

$\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ をカーネル近似する際、通常は計算の安定性の問題から直接速度 v^i を式 (13) に代入するのではなく、恒等式

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \{\rho f(\mathbf{x})\} - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla \rho] \quad (21)$$

によって式 (13) の左辺書き改めたものに対してカーネル近似を適用する。その結果、粒子 a について $\frac{\partial v_a^i}{\partial x^j}$ は次式によって評価される。

$$\frac{\partial v_a^i}{\partial x^j} = - \sum_b \frac{m_b}{\rho_a} (v_a^i - v_b^i) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x^j} \quad (22)$$

ここで、式中の添字 a, b はそれぞれ物理量を求める粒子とその影響半径内に含まれる粒子を意味する。また、

$$W_{ab} = W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h) \quad (23)$$

である。

一方、式 (17) に対しては、恒等式

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \rho \left\{ \nabla \cdot \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} + \frac{f(\mathbf{x})}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right\} \quad (24)$$

を用いて、

$$a_a^i = \sum_b m_b \left(\frac{\sigma_a^{ij}}{\rho_a^2} + \frac{\sigma_b^{ij}}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x^j} + g^i \quad (25)$$

が得られるので、この式に従って粒子 a の加速度 a_a^i を求める。その後、得られた加速度 a_a^i から粒子 a の移動量を求め、密度 ρ_a を次式によって更新する。

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab} \quad (26)$$

2.5 粘性減衰

SPH 法は動的解析法であるため、解に振動が生じる。この振動には連続体を離散化して取り扱うことによる手法上の問題から発生するものと、地震応答解析で対象とするような物理現象としてのものがある⁸⁾。

SPH 法では運動方程式の応力項に人工粘性応力を付加することで、振動を抑制することが行われる。すなわち、(25) 式右辺の

$$\frac{\sigma_a^{ij}}{\rho_a^2} + \frac{\sigma_b^{ij}}{\rho_b^2} \quad (27)$$

を

$$\frac{\sigma_a^{ij}}{\rho_a^2} + \frac{\sigma_b^{ij}}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \delta^{ij} \quad (28)$$

と置き換える。ここで、 Π_{ab} は人工粘性応力であり、

$$\Pi_{ab} = \frac{\zeta \bar{c}_{ab} \mu_{ab} + \eta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}} \quad (29)$$

$$\mu_{ab} = \frac{h \sum_{i=1}^2 (v_i^a - v_i^b) (x_i^a - x_i^b)}{\sum_{i=1}^2 (x_i^a - x_i^b)^2 + \theta h^2} \quad (30)$$

$$\bar{c}_{ab} = \frac{c_a + c_b}{2} \quad (31)$$

$$\bar{\rho}_{ab} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2} \quad (32)$$

である。ただし、 c_a は P 波速度である。

ζ, η, θ は減衰の大きさを支配するパラメータであり、次のような性質を持つ⁸⁾。

- ζ, η が大きくなると粘性減衰も大きくなる。
- θ が小さいほど粘性減衰が大きくなる。

本論文において後に示す解析例ではいずれも $\zeta = 1.0$, $\eta = 1.0$ および $\theta = 10.0$ としている。

3. 弾塑性構成則と塑性ポテンシャルの導入

前節で示した通り、SPH 法による構造解析では理論上、応力とひずみの関係を規定する構成則を直接導入することができる。そこで、酒井ら⁶⁾は、弾塑性構成則に従う材料から構成される構造体を SPH 法で解析するにあたり、有限要素法で用いられている弾塑性マトリクス法による解析を導入した。本論文でも、酒井らに従って、弾塑性マトリクス法を採用した上で塑性ひずみ増分に対して塑性ポテンシャル論を導入する。

まず、本論文では土の破壊規準として次式で与えられる Mohr-Coulomb モデルを用いる。

$$f(I_1, J_2, J_3) = \frac{1}{2} \{ 3(1 - \sin \phi) \sin \theta$$

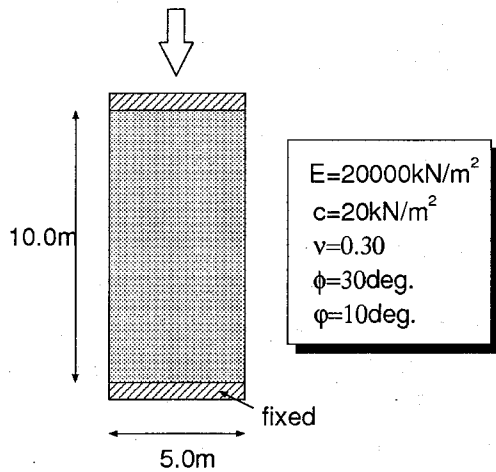


図-2 平面ひずみ圧縮試験の解析モデル

$$\begin{aligned} & + \sqrt{3}(3 + \sin \phi) \cos \theta \} \sqrt{J_2} \\ & - I_1 \sin \phi - 3c \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

ここで,

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3} \right) \quad (34)$$

である。

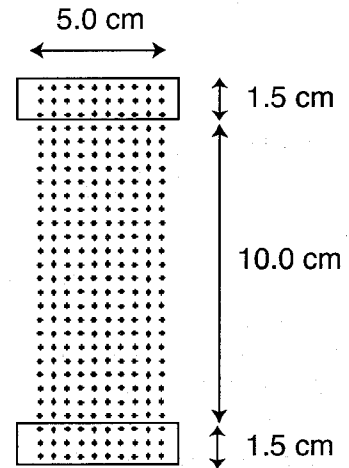
塑性ひずみ増分を規定する塑性ポテンシャルモデルとしても Mohr-Coulomb 式を用いる。すなわち、Mohr-Coulomb モデルによる破壊規準の式 (33) における内部摩擦角 ϕ をダイレイタンシー角 ψ に置き換えたものを用いる。

4. 解析例

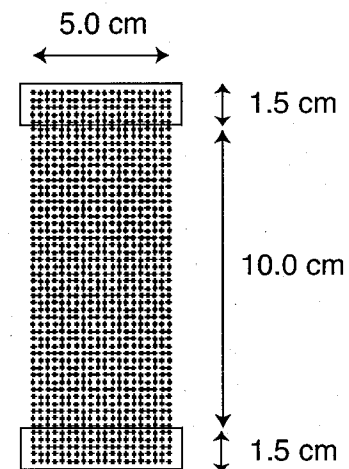
4.1 平面ひずみ状態における圧縮試験

ここでは、SPH 法に塑性ポテンシャルの効果を組み入れることの妥当性を検証することを目的として、図-2 に示した地盤モデルを対象とした平面ひずみ状態における圧縮試験を SPH 法によって解析し、その結果を有限要素法による結果と比較する。

解析対象とした地盤の物性は図-2 中に示したとおりである。図中 E , c , ν , ϕ および ψ は、それぞれヤング率、粘着力、ポアソン比、内部摩擦角、ダイレイタンシー角を意味している。SPH 法による解析は図-3 に示す 2 ケースについて行う。ケース 1 では粒子間隔 0.05m、粒子数 297 個であり、ケース 2 では粒子間隔 0.025m、粒子数 1113 個とする。影響半径はいずれのケースでも粒子間隔の 3 倍とし、解析における時間間隔はケース 1 で 0.00050 秒、ケース 2 で 0.00025 秒、解析ステップ総数はケース 1 で 100,000 回、ケース 2 で 200,000 回とする。圧縮荷重は上端側の要素を毎秒 0.01m の速さで下向きに強制的に変位させることで行う。したがって、解析終了時には高さ 10m の要素が 0.05m ほど圧縮



(a) ケース 1



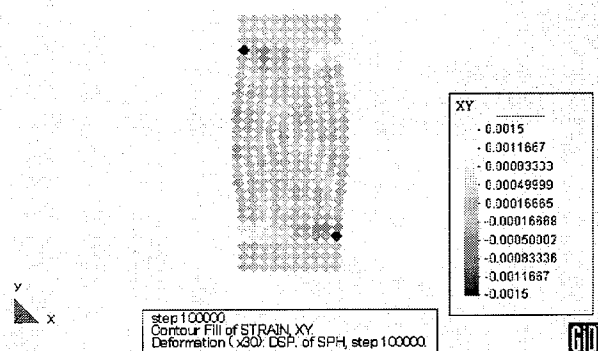
(b) ケース 2

図-3 粒子の初期配置

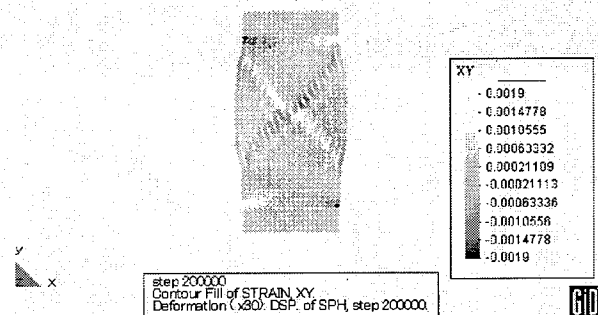
された状態になる。図 3 中の長方形で囲んだ粒子群のうち、上方のものには強制変位を与え、下端のものは固定とした。

SPH 法による解析で得られた荷重終了時の変形状態とせん断ひずみの分布を図-4 に示す。この図において変形量は 30 倍に拡大して示している。いずれのケースでも X 字状にせん断帯が現れており、定性的に妥当な結果が得られている。

次にひずみ増分を規定する塑性ポテンシャルを導入した効果の検証と、解析結果の定量的な評価を目的として、供試体全体の圧縮軸方向の変形量と体積変化の



(a) ケース 1



(b) ケース 2

図-4 せん断ひずみの分布

関係を有限要素法による解析結果と比較する。有限要素法による解析で用いた解析メッシュと境界条件は図-5に示す通りである。有限要素法による解析では、モデルの対称性を考慮して全体の片側半分だけを用いる。

SPH 法による解析と有限要素法による解析から得られた結果を併せてプロットしたものが図-6である。図の横軸は圧縮軸方向の変形量、縦軸は体積変化量で圧縮方向を正としている。圧縮開始当初は、軸方向に圧縮が進むにしたがって体積が減少しているが、途中で体積増加に変化している。これはダイレイタンシー角を 15° としているため、要素がせん断破壊に達した後、せん断変形の進行にしたがって体積の膨張が起こるためである。

ケース 1 に比べると粒子間隔が 2 分の 1 であるケース 2 の方が有限要素法に近い結果が得られていることから、粒子間隔をさらに小さくすることで精度が向上するものと考えられる。

しかしながら、粒子間隔を小さくすること、すなわち粒子数を増やすことは解析時間の増大につながる。特に SPH 法では各粒子毎に影響半径内にある他の粒子の探索を行う必要があるが、この探索に係る演算量は粒

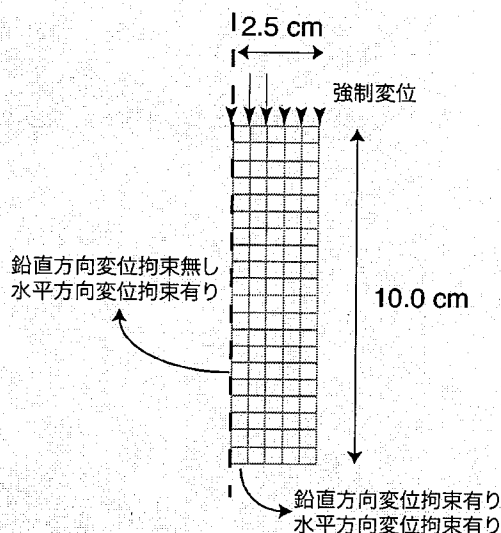


図-5 有限要素法による解析用メッシュ

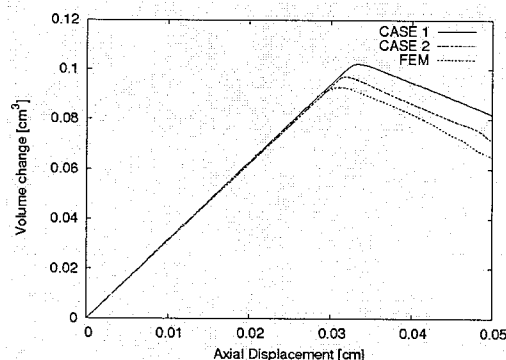


図-6 圧縮軸方向変位と体積変化の比較

子数の 2 乗に比例して増加するため、粒子数の増大は計算時間の爆発的な増大を引き起こし得る。この粒子探索は Screening 法¹²⁾などによって大幅な効率化を実現できるが、実在の土構造物全体を SPH 法によって解析しようとした場合には、やはり解析精度と計算時間のトレードオフを考慮することが必要であろう。そのためには今後、要求される精度に対する粒子間隔の設定法について明らかにされなければならない。

4.2 盛土の崩壊解析

ここでは、図-7 に示した盛土構造物を対象として、1G の重力場において左向きに 1G の慣性力を加えたときの変形状態を SPH 法によって解析する。盛土についてヤング率 $1.44 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 0.30、単位体

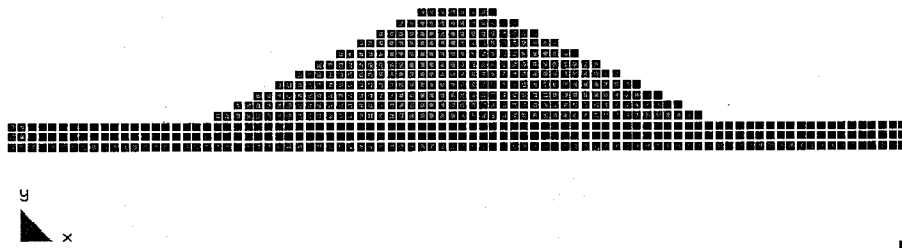


図-8 粒子の初期配置

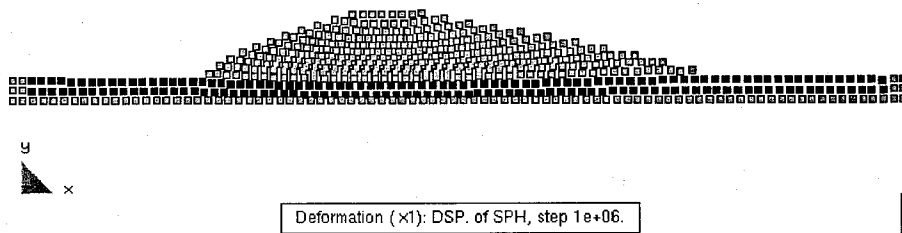


図-9 解析結果

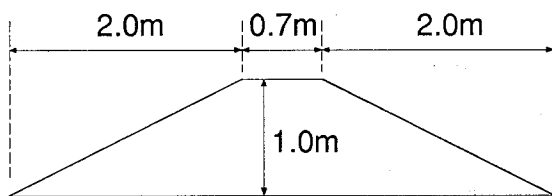


図-7 解析対象とした盛土構造物

積質量 $1.40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，盛土下の基礎地盤についてヤング率 $5.00 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ，ポアソン比 0.30，単位体積質量 $1.40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とする。また，粘着力は破壊規準に達するまでの値を 20000.0 N/m^2 ，破壊後を 1470.0 N/m^2 とし，ダイレイタンス角は 10° とする。盛土下の基礎地盤に関しては，現実の地盤を模擬したものではなく，解析において盛土下端が固定された状況を再現するためにヤング率を大きく設定している。解析時間間隔は 0.4×10^{-6} 秒とし，1000000 ステップの解析を行う。すなわち解析上の継続時間は 4.0 秒になる。

粒子の初期配置を図-8 に，最終的な変形状態（4 秒後）を図-9 にそれぞれ示す。図-9 を見ると，慣性力が作用する左方向に盛土がつぶされるように変形する様子が現れており，SPH 法による解析の妥当性を示す結果が得られている。ただし，ここでは通常の盛土の解析で行うような最初に重力を加えて安定状態に達した

後に水平力を与えるといった手順は行っていない。

ところで，酒井¹³⁾が指摘しているように，このような盛土の崩壊状態を精度良く再現するためには，土の引張り破壊を特別に考慮することが必要である。SPH 法では，粒子間隔が影響半径よりも大きくなった時点で粒子間の相互作用が失われ，引張り破壊が生じた状態が得られる。しかしながら，粒子間隔は引張りひずみが数百パーセントを超えるような状態になって初めて影響半径を超えるため，土のように引張り抵抗力が極めて小さな材料を対象とする場合には，構成則において引張り挙動を考慮することが必要となる。

5. まとめと今後の課題

本論文では，流体力学の分野で大変形を含む問題を取り扱うのに大きな成功を収めている SPH 法に着目し，この手法を土構造物の弾塑性解析に適用した。これまで弾塑性体の解析に対しての適用例は既往の研究に見られたが，本論文では新たに塑性ポテンシャルに基づきひずみ増分が規定される構成則を導入した解析を行い，その適用性を示した。

本文中で触れたように，今後 SPH 法の持つ破壊現象の表現力に優れているという長所を最大限に活かしていくためには，引張り破壊を考慮した構成則の確立が望まれる。一方，SPH 法の持つ大きな欠点として，

物質の境界の取り扱いが難しいことが挙げられる。地震動に対する土構造物の動的応答では、地表面に対応する応力ゼロ境界の存在が大きな影響を持つことから、今後適切な境界条件の設定法について研究を進める必要がある。

謝辞：

本研究を行うにあたり、立命館大学助教授・酒井久和先生から多くのご助言をいただきました。産業技術総合研究所活断層研究センター・竿本英貴博士にはSPH法解析の高速化手法について教えていただきました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 伯野元彦:破壊のシミュレーション, 森北出版, 1997.
- 2) K. Meguro and H. Tagel-Din: Applied Element Simulation of RC Structures under Cyclic Loading, Journal of Structural Engineering, 127, pp.1295-1305, 2001.
- 3) L.B. Lucy: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astronomical Journal, 82, pp.1013-1024, 1977.
- 4) R.A. Gingold, J.J. Monaghan: Smooth particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181, 1977.
- 5) J.J. Monaghan: An introduction to SPH, Computer Physics Communications, 48, pp.89-96, 1988.
- 6) 宋武燮・酒井譲・山下彰彦: SPH 粒子法による構造解析 (3次元弾塑性解析手法の検討), シミュレーション, 20(4), pp.288-295, 2001.
- 7) 宋武燮・酒井譲・山下彰彦: SPH 法による弾塑性解析手法の検討 (第1報, 2次元小変形問題), 日本機械学会論文集 A 編, 68(669), pp.772-778, 2002.
- 8) 酒井譲・山下彰彦: SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, 日本機械学会論文集 A 編, 67(659), pp.1093-1102, 2001.
- 9) T. Belytschko, Y. Guo, W.K. Liu and S.P. Xiao: A unified stability analysis of meshless particle methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48, pp.1359-1400, 2000.
- 10) T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl: Meshless methods: An overview and recent development, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, pp.3-47, 1996.
- 11) M. Naili, T. Matsushima and Y. Yamada: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, Journal of Applied Mechanics, 8, pp.591-599, 2005.
- 12) M.B. Liu, G.R. Liu and K.Y. Lam: A one-dimensional meshfree particle formulation for simulating shock waves, Shock Waves, 13, pp.201-211, 2003.
- 13) 酒井久和: 構造物の動的弾塑性応答解析における非反復時間積分法と地震工学への応用に関する研究, 京都大学博士学位論文, 1998 年.

(2006 年 4 月 13 日 受付)