

粒状体におけるエネルギー散逸機構の統計的表現

Statistical Representation of Energy Dissipation Mechanism in Granular Media

鄒春躍*・岸野佑次**・京谷孝史***

Chunyue ZOU, Yuji KISHINO and Takashi KYOYA

*工博 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

** 工博 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

*** 工博 東北大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

As the origin of energy dissipation in rigid granular media is the frictional slippage between particles, we can easily detect the energy dissipation mechanism by knowing the statistics of the mobilized contact planes where the frictional slippages take place. In this paper, using a set of numerical test results obtained by granular element analyses, we discuss first the relationship between the work done by the external stress and the elastic and dissipative energies at internal contact points. Then, after explaining the method to identify the mobilized contact plane by dissipation levels, we show that a forth order tensor is inevitable to describe the statistical characteristics of the distribution of mobilized contact planes.

Key Words: granular media, granular element method, numerical tests, dissipation mechanism, mobilized contact tensors

1. まえがき

粒状体の弾塑性挙動は材料内部の微視構造に依存するため、その特性を説明するには、粒状体の内部粒子の充填構造、接触状態、粒子間すべり面の分布などの微視的な構造の特性を一般的に表現することが非常に重要である。小田¹⁾や佐武²⁾は接触点における粒子間接触の方向を表す量、すなわち、接触面の単位法線ベクトルのダイアド積の平均によりファブリックテンソルを定義し、これを用いて充填構造の異方性を表現し、接触力分布などと関連させて粒状体の力学特性を論じている。ダイアド積による定義は単位法線ベクトルの単純な平均が零となることから、構造を表すための最も基本的な統計量であるということが出来る。

金谷³⁾は巨視的な応力、ひずみを微視的な接触力、接触点の分布などにより表現を行い、粒状体においては微視構造の幾何学的関係が重要であることを指摘している。また、接触面の方向分布について、第1種のファブリックテンソルと呼ばれる単位法線ベクトルの偶数個の積の平均値を用いて、分布特性を表現している。試験データにより得られる分布は一般に単位法線ベクトルの複雑な関数となるが、テーラー展開に基づき単位法線ベクトルの偶数個の積の多項式と仮定した。試験データに基づいて最小二乗法により具体的にこの関数形を求め、分布特性の考察を行った。

上述の研究を含め、従来の構造テンソルは粒子パッキン

グの幾何学的異方性を表現するためのものであるが、これを一般化し、特定の力学特性を表現するための統計量として拡張することも可能であると考えられる。たとえば、粒状材料の弾塑性挙動は粒子間のすべりに起因するエネルギー散逸機構に支配されると考えられるため、エネルギー散逸機構を定量的に表現するために、すべりの生じる接触面に限定した分布特性を表す統計量などは容易に拡張できる例である。

粒子の集合体である粒状材料の塑性挙動は、粒子間の摩擦性すべりに支配された現象であり、粒状体内部の粒子接触状況や接触力分布の変化を伴うものである。このような微視力学的な特性の変化を正しく評価することにより、粒状体の弾塑性構成則を合理的に誘導することが可能であると考えられる。一般にせん断断荷を受ける粒状材料内部のすべり構造は微視的に複雑なものであるが、これを理想的に平均化したモデルにより提案したものに松岡・中井⁴⁾の理論がある。この理論は主応力軸に対してある傾きをもった空間滑動面が存在することを仮定した。この滑動面は3次元空間内で最も滑動しやすい潜在的な面と仮定される。しかし、たとえば、三軸状態などにおける力学的な対称性を考慮すると、少なくとも変形局所化発生前におけるすべりの分布は特定の平面上で卓越すると考えることには無理がある。したがって、材料内部のすべり分布を表すためには、より一般的な表現方法が必要となる。

そこで、本研究においては、粒状供試体モデルの粒状要

素法⁵⁾による数値試験に基づいて、粒状体内部におけるエネルギー散逸機構の統計的考察を行ったものである。まず、すべりが生じる粒子間接触面（以下、滑動接触面と称する）に着目し、滑動接触面における接触力のする仕事と供試体表面で与える仕事との等価性や、滑動接触面において算定される散逸エネルギーと塑性ひずみより巨視的に算定される散逸エネルギーとの対応関係の検討を行った。つぎに、滑動接触面の方向ベクトルの分布を表すために、新たに2階や4階のテンソルで与えられる統計量を定義し、これに基づいて、粒状要素法シミュレーション試験データより粒状材料内部において生じるすべりの統計的考察を行った。

2. 微視的力学量に基づく諸量の定義

2.1 接触点における局所座標系

図-1に粒子AとBの接触点Cにおける局所座標系を示す。b)は粒子Aに着目した局所座標系である。図中の e_1 , e_2 , e_3 は全体座標系の基底ベクトル、 x^A , x^B は粒子A, Bの位置ベクトルである。局所座標系の基底ベクトルを次のように定義する。

$$n = \frac{x^B - x^A}{|x^B - x^A|} \quad (1)$$

$$t_0 = \frac{e_3 \times n}{|e_3 \times n|} \quad (2)$$

$$t_\theta = t_0 \times n \quad (3)$$

2.2 仕事とエネルギー

(1) 接触点における全相対変位増分と弾塑性相対変位増分
ある载荷ステップにおいて、個々の粒子は1つのつり合い状態から別のつり合い状態になるように移動する。この際、任意の2粒子間の相対変位は各粒子の並進移動量と回転量により定まる。これを全相対変位増分と称する。全相対変位増分の中、接触力増分を粒子間バネ定数で除した部分を弾性相対変位増分、残った部分を塑性相対変位増分と称する。塑性相対変位増分は接触している2粒子間のすべりに起因して生じ、この2粒子間の接触面を滑動接触面と称する。粒子間接触点における各相対変位増分は以下のよう求めることができる。

a) 全相対変位増分

まず、粒子間相対変位増分の中、粒子回転により発生する変位増分の算定式を示す。図-1に示した接触点Cにおける粒子Aの回転に対する変位増分 Δz^A は全体座標系

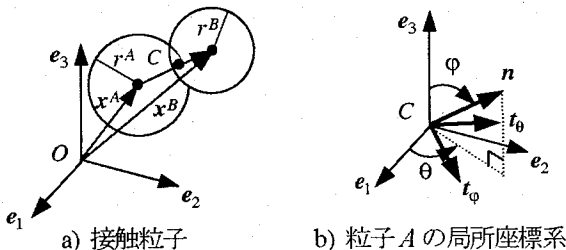


図-1 接触粒子と座標系

で以下のように表すことができる。

$$\Delta z^A = H^A \Delta \Omega^A \quad (4)$$

ここに、

$$\Delta \Omega^A = r^A \Delta \omega^A \quad (5)$$

$$H^A = \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

また、 r^A と $\Delta \omega^A$ はそれぞれ粒子Aの半径と回転角増分であり、 φ , θ は図-1に示したように粒子Aから見た接触点Cにおける局所座標の基底ベクトル n の方向を表す角度である。 Δz^A に粒子Aの並進移動量 Δx^A を加えて、粒子Aの並進移動量 Δx^A と回転による接触点での全体座標系の変位増分 Δz^A は以下のように表すことができる。

$$\Delta X^A = \Delta x^A + \Delta z^A \quad (7)$$

同様に、接触点Cにおける粒子Bの全体座標系の変位増分 ΔX^B も算出することができる。これにより、粒子Aに対する接触点Cでの全相対変位増分は、圧縮相対変位を正として、

$$\Delta X^{AB} = \Delta X^A - \Delta X^B \quad (8)$$

となる。逆に、全体座標系から局所座標系への座標変換により、粒子Aから見た接触点Cにおける局所座標系での全相対変位増分は、

$$\Delta D = \begin{pmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_\varphi \\ \Delta u_\theta \end{pmatrix} = T^A \Delta X^A \quad (9)$$

と表すことができる。ここに、 T^A は全体座標系から接触点Cにおける粒子Aの表面上の局所座標系への変換マトリックスである。

$$T^A = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

b) 弾性相対変位増分

図-1に示したように、接触している2粒子間には線形バネ力を仮定しているため、弾性相対変位増分は粒子Aに着目するときの接触点Cにおける接触力の増分により算出することができる。

接触力の増分

$$\Delta f = (\Delta f_n, \Delta f_\varphi, \Delta f_\theta)^T \quad (11)$$

が生じたときの弾性相対変位増分は、局所座標系の成分は次式のように表すことができる。

$$\Delta D^e = \begin{pmatrix} \Delta u_n^e \\ \Delta u_\varphi^e \\ \Delta u_\theta^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta f_n / k_n \\ \Delta f_\varphi / k_t \\ \Delta f_\theta / k_t \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここに、 k_n , k_t は法線方向、接線方向のバネ定数である。

c) 塑性相対変位増分

全相対変位増分は弾性相対変位増分と塑性相対変位増分の和であるため、塑性相対変位増分は全相対変位増分か

ら弾性相対変位増分を引くことにより求めることができ、次のように与えられる。

$$\Delta D^p = \begin{pmatrix} \Delta u_n^p \\ \Delta u_\phi^p \\ \Delta u_\theta^p \end{pmatrix} = \Delta D - \Delta D^e \quad (13)$$

なお、粒状要素法では法線方向相対変位は全てバネの伸縮に関与するので、 $\Delta u_n^p = 0$ と考えてよい。

(2) 接触力のする仕事と散逸エネルギー

図-1 に示した接触点 C において接触力 f が全相対変位増分 ΔD 、塑性相対変位増分 ΔD^p によりする仕事増分は、それぞれ、次のように表すことができる。

$$\Delta W^* = f \cdot \Delta D = f_n \Delta u_n + f_\phi \Delta u_\phi + f_\theta \Delta u_\theta \quad (14)$$

$$\Delta W^{*p} = f \cdot \Delta D^p = f_n \Delta u_n^p + f_\phi \Delta u_\phi^p + f_\theta \Delta u_\theta^p \quad (15)$$

ここに、記号 $*$ は接触点に関わる量であることを示す。前項の最後に述べたことにより、式 (15) は次のように書き換えることもできる。

$$\Delta W^{*p} = f_\phi \Delta u_\phi^p + f_\theta \Delta u_\theta^p \quad (16)$$

すなわち、塑性仕事は接線成分のみ関与する摩擦によるエネルギー損失とみなすことができる。

全接触点について、初期状態からの载荷ステップについての和をとり、単位体積あたりの仕事、弾性エネルギー、散逸エネルギーが次のように求まる。

$$w^* = \frac{1}{V} \sum_{\text{loading step}} \sum_C \Delta W^* \quad (17)$$

$$w^{*p} = \frac{1}{V} \sum_{\text{loading step}} \sum_C \Delta W^{*p} \quad (18)$$

ここに、 V は供試体の体積である。

(3) 巨視的応力のする仕事と散逸エネルギー

ここでは、巨視的応力は供試体の平均的な量とする。粒状供試体に作用する応力と各载荷ステップ毎の载荷・除荷により求まる塑性ひずみより散逸エネルギーを算定することも可能である。応力 σ が作用している粒状供試体に応力増分 $\Delta \sigma$ を与えたときのひずみ増分を $\Delta \epsilon$ とすれば、粒状供試体になされる単位体積当たりの仕事増分は

$$\Delta w = \sigma : \Delta \epsilon \quad (19)$$

である。ここで、応力増分 $-\Delta \sigma$ を与えて除荷したときに生じるひずみを $-\Delta \epsilon^e$ とすれば、 $\Delta \epsilon^e$ がこの载荷ステップにおける弾性ひずみ、 $\Delta \epsilon^p = \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^e$ が塑性ひずみである。したがって、散逸エネルギーの増分は

$$\Delta w^p = \sigma : \Delta \epsilon^p \quad (20)$$

で与えられる。

初期状態からの载荷履歴についてのこれらの増分の和

$$w = \sum_{\text{loading step}} \Delta w \quad (21)$$

$$w^p = \sum_{\text{loading step}} \Delta w^p \quad (22)$$

は、それぞれ、初期状態から応力によってなされた全仕事、供試体内で散逸された散逸エネルギーの単位体積当たりの量を表す。

4.2 節では接触力のする仕事 w^* 、 w^{*p} と応力のする仕事 w 、 w^p の関係について比較を行う。

2.3 滑動接触面の定義

図-1 に示したように接触粒子 A 、 B は接触点 C を介して接触している。接触点 C における粒子 A の局所座標系の基底ベクトル n は接触粒子 A 、 B の接触方向を示し、粒子 A 、 B 間の接平面の法線ベクトルにもなっている。载荷に伴う粒子 A 、 B の移動により、2 粒子間に相対変位が生じるとともに、接触力も変化する。接触粒子 A 、 B 間の法線方向の接触力はその重なり量に比例して生じ、接線方向の接触力が Coulomb の摩擦則で定まる値以下であれば、接触力増分の接線方向成分は接触要素間の接線方向の相対変位増分に比例して与えられることになる。接線方向の接触力成分がさらに大きくなり、Coulomb の摩擦則で定まる値以上になった場合、粒子 A 、 B 間には接触点 C を通る接平面内における滑りが生じる。この時、この接平面を滑動接触面と称する。

なお、滑動接触面は具体的に 5.1 節に述べる方法で各载荷ステップにおいて生じる塑性相対変位増分に基づいて定める。

2.4 滑動接触テンソルの定義

粒状体内のエネルギー散逸は粒子間の摩擦性すべりによって生じるので、粒状体のエネルギー散逸機構を把握するためには、前節で定義した滑動接触面の分布特性を調べればよい。滑動接触面の単位法線ベクトル n とするとき、 $-n$ も同一の滑動接触面を表す。すなわち、粒子を基準に統計量を求めるとすれば同一の接触面は 2 つの単位法線ベクトル n 、 $-n$ により評価されることになる。

滑動接触面単位法線ベクトル n の分布を特徴づけるものとして平均や分散等が考えられるが、 n を単純に平均すると、逆向きのベクトル同士で打ち消し合いが生じるので、意味のある統計量は n の偶数個の積の平均値である。

供試体内部の滑動接触面の単位法線ベクトル n の積の平均値を滑動接触テンソルと称し、次のように定義する。

$$N_{i_1 i_2 \dots i_{2j}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_{i_1}^\alpha n_{i_2}^\alpha \dots n_{i_{2j}}^\alpha \quad (23)$$

ここに、1 つの滑動接触面につき逆向の 2 つの法線ベクトルを同時に考慮するため、 N は滑動接触面の総数の 2 倍となる。また、2 階と 4 階の滑動接触テンソルは基本的なものであり、以下のように表される。

$$N_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_i^\alpha n_j^\alpha \quad (24)$$

$$N_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_i^{\alpha} n_j^{\alpha} n_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \quad (25)$$

2.5 滑動接触面の方向の密度分布関数

滑動接触面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の密度分布 (立体角に対する確率密度) を $f(\mathbf{n})$ と表す. $f(\mathbf{n})$ は単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の $2m$ 個の積までの関数で近似する場合, $2m$ 階のテンソルのみで十分であるため, $2m$ 個の積の関数で近似する場合の一般式は,

$$f(\mathbf{n}) = a_{i_1 \dots i_{2m}} n_{i_1} \dots n_{i_{2m}} \quad (26)$$

である. ここに, $a_{i_1 \dots i_{2m}}$ は係数を与えるテンソルであり, 金谷⁹⁾は $\mathbf{n}$ の分布データをもとに $a_{i_1 \dots i_{2m}}$ を最小二乗法により求める方法を示している. ここでは, 滑動接触面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の 2 個および 4 個の積を基底関数とする 2 種類の密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ の係数を算定するための式を導く.

1) $\mathbf{n}$ の 2 個の積の場合, 密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ は次式で与えられる.

$$f(\mathbf{n}) = b_{ij} n_i n_j \quad (27)$$

ここに, b_{ij} は対称な 2 階テンソルである. また, 2 階の滑動接触テンソル N_{ij} は $f(\mathbf{n})$ を用いて, 次のように表すことができる.

$$N_{ij} = \int_A n_i n_j f(\mathbf{n}) dA \quad (28)$$

式 (27) を式 (28) に代入して, 単位球面上のベクトル $\mathbf{n}$ に対する積分演算を行い, b_{ij} は次のように得られる.

$$b_{ij} = \frac{15}{8\pi} \left(N_{ij} - \frac{1}{5} \delta_{ij} \right) \quad (29)$$

2) $\mathbf{n}$ の 4 個の積の場合, 密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ は次式で与えられる.

$$f(\mathbf{n}) = c_{ijkl} n_i n_j n_k n_l \quad (30)$$

ここに, c_{ijkl} は対称な 4 階テンソルである. また, 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} は $f(\mathbf{n})$ を用いて, 次のように表すことができる.

$$N_{ijkl} = \int_A n_i n_j n_k n_l f(\mathbf{n}) dA \quad (31)$$

式 (30) を式 (31) に代入して, 単位球面上のベクトル $\mathbf{n}$ に対する積分演算を行い, c_{ijkl} は次のようになる.

$$c_{ijkl} = \frac{315}{32\pi} \left[N_{ijkl} - \frac{1}{9} (\delta_{ij} N_{kl} + \delta_{ik} N_{jl} + \delta_{il} N_{jk} + \delta_{jk} N_{il} + \delta_{jl} N_{ik} + \delta_{kl} N_{ij}) + \frac{1}{63} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \quad (32)$$

となる.

なお, 以上のようにして求めた密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ は自然に次式を満たしている.

$$\int_A f(\mathbf{n}) dA = 1 \quad (33)$$

また, 係数 b_{ij} と c_{ijkl} は金谷⁹⁾の定義された第 2 種のファブリックテンソルに対応する.

3 数値試験

本研究で用いた供試体は砂質材料を念頭に置いた理想的な粒状材料とし, その諸元を表-1 に示す. パネ定数と摩擦角度は数値試験で破壊時のひずみの値を通常の試験におおよそ合うように選んでいる. たたし, ピーク時の応力比は若干低めであるので, 今後検討を要する. 載荷試験は, 図-2 に示した主応力空間における平均応力 200 kPa の π 平面上で行った. この π 平面上で, 静水圧軸と交わる点を原点とする ξ - η 座標系の基底ベクトルを次のように定義する.

$$e_{\xi} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T \quad (34)$$

$$e_{\eta} = (-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)^T \quad (35)$$

π 平面上のせん断載荷方向を η 軸から反時計回りを正とする角度 β で表し, 表-2 に示す 3 つの方向に沿って載荷試験を行った. 各載荷方向の弾塑性増分応答を比較するために, 各経路上で偏差応力の大きさ s が等しくなる応力点を選んで, 多方向応力プローブ試験を行った. 図-3 に示すようにプローブ試験はプローブ開始の応力点 σ を原点とする局所座標系で表す. 主応力空間の局所座標系の基底ベクトル $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{l} = \sigma / |\sigma| \quad (36)$$

$$\mathbf{m} = \sigma \times \sigma_0 / |\sigma \times \sigma_0| \quad (37)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \quad (38)$$

ここに, σ_0 , σ はそれぞれ初期等方応力とプローブ試験開始応力である. 主応力空間における応力点をベクトル

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T \quad (39)$$

で表す.

図-3 に示したように, 応力プローブ試験はいずれも局所座標系の $\mathbf{n}$ 軸を含む面内で行う. 基底ベクトル $\mathbf{l}$ と $\mathbf{n}$ が定める面を基準面, $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ が定める面を直交面と呼ぶこととする. プローブ面は基準面から回転した角度を α で表し, そのプローブ面内での応力プローブの方向は $\mathbf{n}$ の方向からの角度 θ で示す. 応力プローブ $d\sigma$ を与えて, 全ひずみ増分を求め, 除荷 $-d\sigma$ による回復部分を弾性ひずみ増分, 残留部分を塑性ひずみ増分として求める.

表-1 供試体の諸元

境界粒子数		892
内部粒子数		685
初期間隙比	e_0	0.76
境界粒子の粒径	r_b (mm)	0.16
内部粒子の粒径	$r_{\min}$ (mm)	0.16
	$r_{\max}$ (mm)	0.30
パネ係数	k_n (kN/m)	40
	k_t (kN/m)	28
粒子間の摩擦角	($^{\circ}$)	15

表-2 単調载荷試験

载荷試験名	载荷方向	最大応力	最小応力
E1	$\beta=0^\circ$ (圧縮载荷)	σ_3	$\sigma_1=\sigma_2$
E2	$\beta=30^\circ$ (純せん断)	σ_3	σ_2
E3	$\beta=60^\circ$ (伸張载荷)	$\sigma_1=\sigma_3$	σ_2

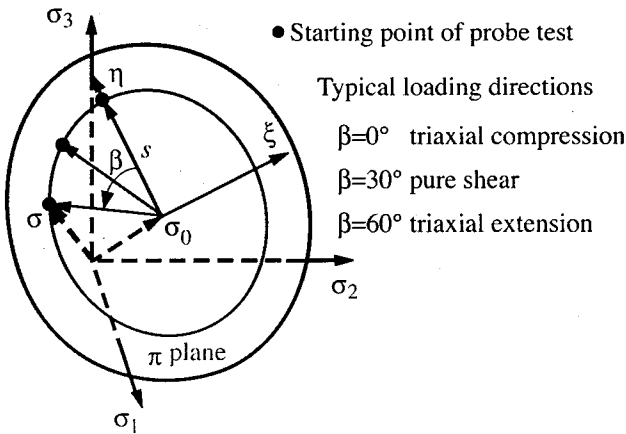


図-2 载荷経路

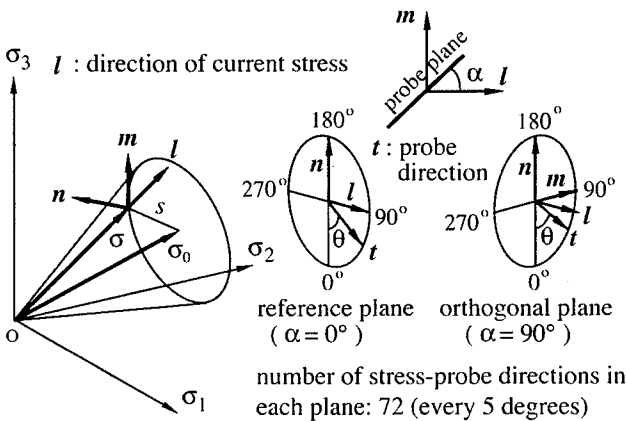


図-3 応力プローブ面

4. 数値試験における仕事と散逸エネルギー

4.1 仕事と散逸エネルギーの算定方法

接触力と粒子間相対変位により算定される仕事の中、塑性相対変位に対応する部分は散逸エネルギー w^{*p} として散逸され、その散逸エネルギー w^{*p} の値は式 (18) により算出される。巨視的応力とひずみにより算定される仕事は供試体が外部から受けた全エネルギー w として、式 (21) により算定される。散逸エネルギー w^{*p} は式 (22) により算定される。外部から供試体に与えるエネルギー w と接触力のする仕事 w^* は数値解析の精度が高ければ一致するはずであり、これを実際に検証する。また、散逸部分についても、2つの算定結果を比較し考察する。

4.2 算定結果と考察

図-4 は载荷試験 E1 ~ E3 について2種類の算定方法による全仕事、散逸エネルギーの比較を示す。外部から供試体に与えるエネルギー w と接触力のする仕事 w^* は完全に一致するため、供試体に対するエネルギー収支がバランスしており、力の平衡条件が満たされている。したがって、このことはシミュレーション解析の精度が高いことを示している。これに対して散逸エネルギーについては、接触力に基づいて算定したエネルギー w^{*p} が、巨視的応力に基づいて算定したエネルギー w^p より常に小さくなっていることが注目される。この理由として、次のようなことが考えられる。一般にある载荷増分 $d\sigma$ に対して生じる塑性ひずみは微視的に均一なものではなく、 $-d\sigma$ の除荷を行っても、粒子間のバネに蓄えられる弾性エネルギーの全てを解放することができない。したがって、この残留弾性エネルギーの増分が応力に基づいて算定した散逸エネルギー増分 Δw^p の一部になると考えられる。金子ら⁷⁾は6粒子モデルの完全変位制御シミュレーション試験でこの現象を説明している。

図-5 は载荷試験 E1 ~ E3 について両散逸エネルギー w^{*p} 、 w^p の関係を示すものである。両者にはほぼ線形の関係が認められる。このことから、単調载荷試験では、バネに蓄積されるエネルギー w^{*e} の中、塑性変形に伴って残留する部分は粒子間のすべりにより算定される散逸エネルギー w^{*p} にほぼ比例すると考えることができよう。

以上説明した全仕事、散逸エネルギーの2つの算定結果を要約すれば以下ようになる。

- 1) 接触力と粒子間相対変位により算定される仕事と巨視的応力とひずみより算定される仕事が一致することから、エネルギーの収支がバランスしており、力の平衡条件が満たされていることから、シミュレーション解析の精度は高いことが確認できた。
- 2) 微視的な接触力に基づいて算定した散逸エネルギーは、巨視的応力に基づいて算定した散逸エネルギーより常に小さくなったが、これは塑性ひずみが生じると、粒子間のバネに蓄えられる弾性エネルギーの中、除荷しても解放されずに残留する部分が生じるためである⁷⁾。しかし、2つの方法で算定した散逸エネルギーの間にはほぼ線形な関係が認められ、弾性エネルギーの残留部分は粒子間のすべりにより算定される散逸エネルギーにほぼ比例するとみなすことができる。

5. 数値試験における滑動接触面分布

5.1 算定方法

2.3 節に述べた滑動接触面の分布を調べるためには各接触点においてすべりの発生の有無の判定を行う必要がある。ここでは、まず解析データに基づいてすべりの判定を行う方法について説明した後、各統計量の算定方法について記す。

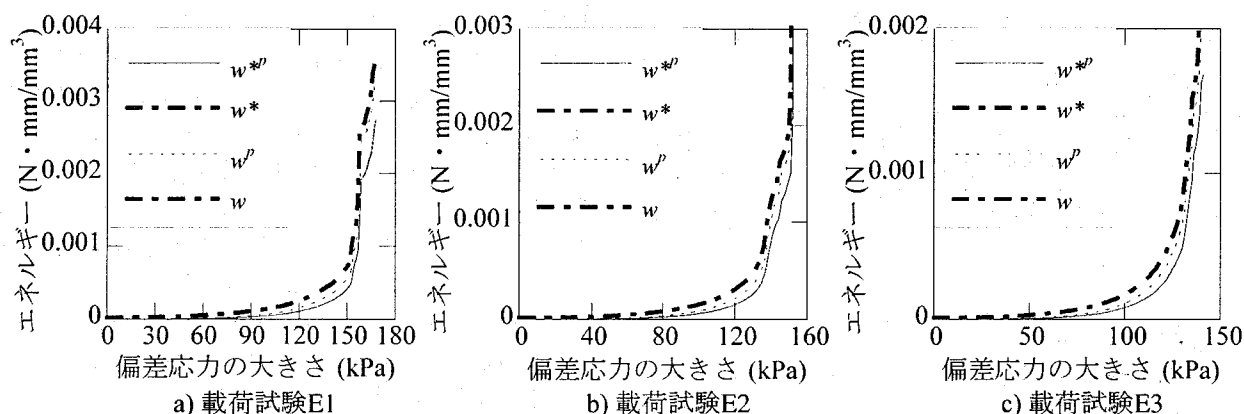


図-4 接触力と応力に基づいて算定したエネルギーの比較

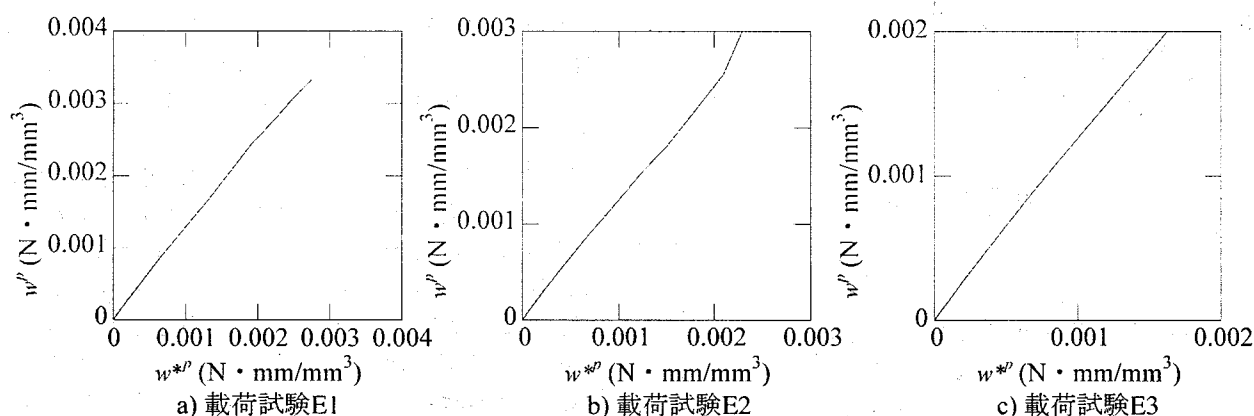


図-5 接触力と応力に基づいて算定した散逸エネルギーの関係

(1) すべりの判定

2.2 節の (1) に述べたように、塑性相対変位増分は全相対変位増分と弾性相対変位増分の差として定義される。したがって、塑性相対変位増分が生じると、考えている面で接触している 2 粒子間ですべりが生じたと判定できるが、実際の計算では、打ち切り誤差が存在するので、以下のように判定基準を設ける。

まず、例として、図-2 の π 平面上の荷重試験 E1 の塑性変形が十分に発達した段階である第 120 荷重ステップについて、式 (13) で定義した塑性相対変位増分の大きさ $dp = |\Delta D^p|$ の、式 (9) で定義した全相対変位増分の大きさ $dt = |\Delta D|$ に対する比を図-6 に示す。同図の縦軸は塑性相対変位増分と全相対変位増分の大きさの比、横軸は接触点番号 i を表す。図より、塑性相対変位増分の大きさと全相対変位増分の大きさの比 dp/dt は 0 と 1 の近くに集中することがわかる。このことは、粒子間にすべりが生じたら、相対変位増分はほぼ塑性相対変位増分であることを示している。同図に $dp/dt > 1$ の点も見られるが、これは、摩擦則により粒状体内の接触点力の法線方向成分が減少すると、接線方向の接触力の大きさの最大値が直ちに減少し、全相対変位増分と逆向きに接触力増分が生じるので、式

(12) により弾性相対変位増分も全相対変位増分の逆方向になり、塑性相対変位増分の大きさが全相対変位増分の大きさより大きくなったためである。荷重が最終段階に至る前においては、 $dp/dt = 0.1$ 以下の接触点の分布はほぼ横軸に沿って分布している。

図-7 は塑性相対変位増分の大きさと全相対変位増分の大きさの比 dp/dt の変化により、単位体積あたりの接触力と塑性相対変位によってなされる散逸エネルギーの比較図である。図-7 の中の $w_{0.1}^{*p}$ は、すべりの判定基準を塑性相対変位増分の大きさと全相対変位増分の大きさの比 dp/dt を 0.1 としたときの接触力と塑性相対変位によって算定される単位体積あたりの散逸エネルギーを示し、 $w_{1.0}^{*p}$ は $dp/dt = 1.0$ の場合の接触力と塑性相対変位によって算定される単位体積あたりの散逸エネルギーを示す。また、実線は図-4 a) に示すすべての接触点における接触力と塑性相対変位によって算定される単位体積あたりの散逸エネルギー w^{*p} である。 $w_{1.0}^{*p}$ は全接触点を考慮した散逸エネルギー w^{*p} とかなり差があるが、 $w_{0.1}^{*p}$ は散逸エネルギー w^{*p} とほぼ一致するため、 $dp/dt = 0.1$ はすべりの判定基準として妥当であると考えられるので、以下、この判定基準を用いることとする。

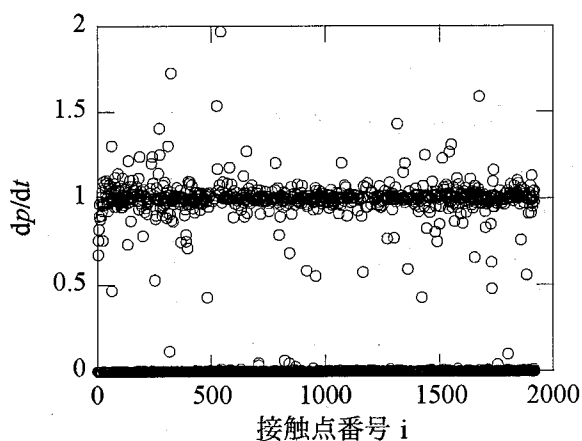


図-6 載荷試験E1の第120 載荷ステップの dp/dt

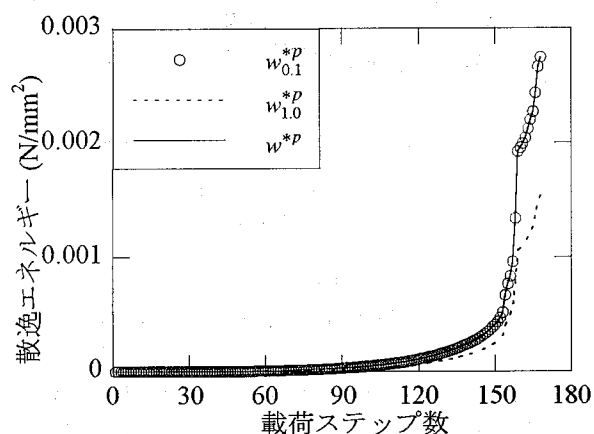


図-7 dp/dt の変化による散逸エネルギーの比較

(2) 滑動接触テンソルと密度分布関数

滑動接触面の分布特性を反映させるためには、分布特性を定量化する必要がある。このために、式 (23) に定義された滑動接触面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の積の平均値である滑動接触テンソルを用いる。ここでは、式 (24) と式 (25) に定義した 2 階の滑動接触テンソル N_{ij} と 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} を具体的に求める。また、これらのテンソルを用いた滑動接触面の密度分布関数を求め、分布特性の把握を行う。この密度分布関数の一般形は式 (26) に与えられているが、ここでは、式 (27) と式 (30) で定義した $\mathbf{n}$ の 2 個の積および 4 個の積を用いて、滑動接触面の分布特性について調べる。

5.2 算定結果と考察

(1) 滑動接触面の数

図-8 は載荷試験 (E1 ~ E3) についての滑動接触面の数の比較図である。同じ大きさの偏差応力に対して、載荷方向によらず、滑動接触面の数はほぼ一致した。このように、平均応力が一定の載荷においては、滑動接触面はせん断応力の方向によらず、大きさのみに支配され、同じように増加すると考えられる。

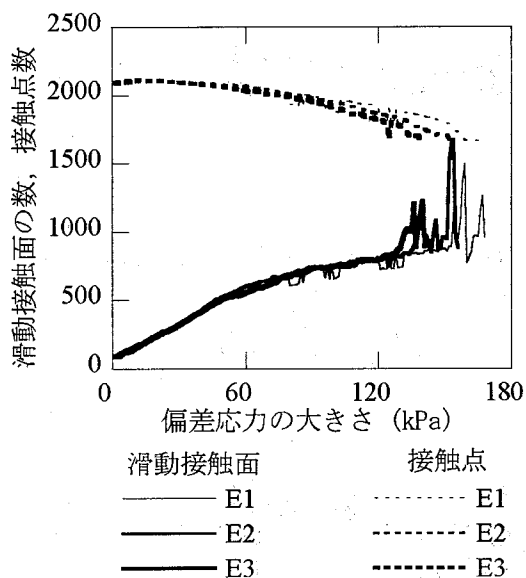


図-8 滑動接触面の数の比較

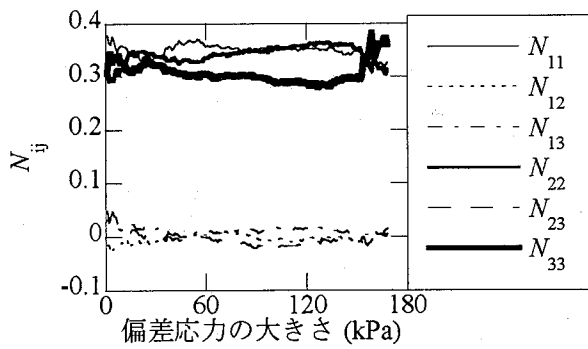
(2) 滑動接触テンソル

載荷試験およびプローブ試験において求めた 2 階の滑動接触テンソル N_{ij} と 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} の結果をプロットし、各載荷方向における滑動接触テンソル成分の変化を比較し考察する。

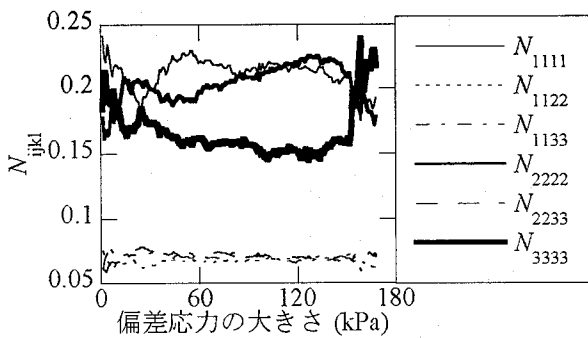
図-9 ~ 図-11 は、それぞれ、載荷試験 (E1 ~ E3) 3 ケースの N_{ij} と N_{ijkl} の結果を示す。これらの図よりわかるように、2 階の滑動接触テンソル N_{ij} の非対角成分はほぼ 0 になるため、 N_{ij} の主軸は座標軸 (応力主軸) にほぼ一致している。また、対角成分の値は $1/3$ 付近の値となっている。図-9 a) の三軸圧縮状態の載荷試験 E1 においては、最大主応力軸に対応する値 N_{33} が最小、図-11 a) の三軸伸張状態の載荷試験 E3 においては最小主応力軸に対応する値 N_{22} は最大となっていることが注目される。すなわち、すべりは粒子間接触力の小さな接触面において生じる傾向があるといえる。三軸状態においては側圧方向の主応力 2 成分は等しいので、前述の成分以外はほぼ同じ値となっている。その他の載荷方向についても、大小関係は同様の説明が可能な結果となっている。ただし、このような傾向は応力がピークを迎える段階で崩れ、一旦全ての値が $1/3$ でほぼ一致した値となった後、大小関係が逆転している。このことから、ピーク前の安定的な塑性変形の段階とピーク以降の段階とは変形のメカニズムが異なると考えられる。

図-9 ~ 図-11 の b) に示した 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} については、図に示した成分以外の成分は小さい値となるので、プロットしていない。 N_{1111} 、 N_{2222} と N_{3333} はそれぞれ 2 階のテンソルの対角成分 N_{11} 、 N_{22} と N_{33} と大小関係は似ているが、互の差は増幅されたものとなっている。なお、2 階の滑動接触テンソル N_{ij} と 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} の間の相関性はこれらの定義式 (24)、式 (25) より成立する関係式

$$N_{ij} = N_{ijkk} \quad (40)$$

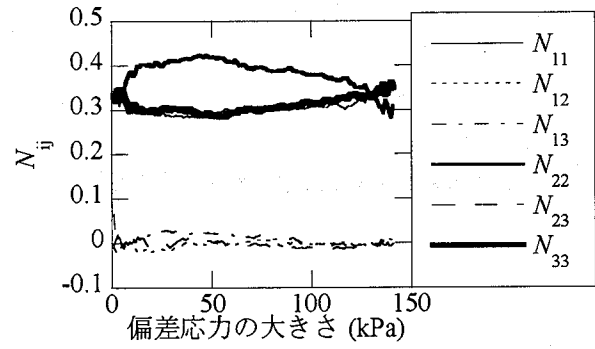


a) N_{ij}

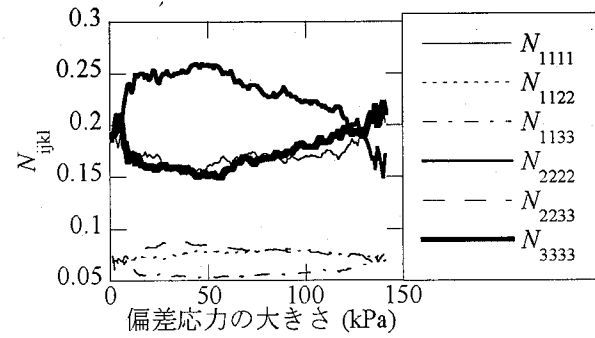


b) N_{ijkl}

図-9 荷重試験E1の滑動接触テンソル

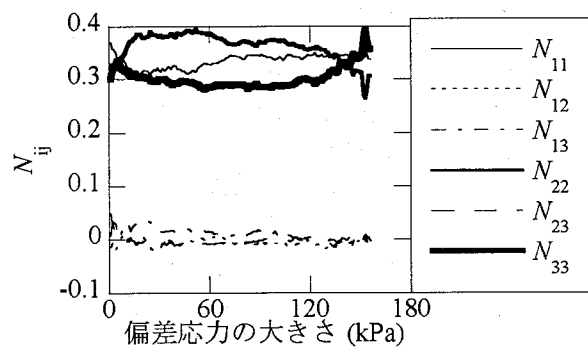


a) N_{ij}

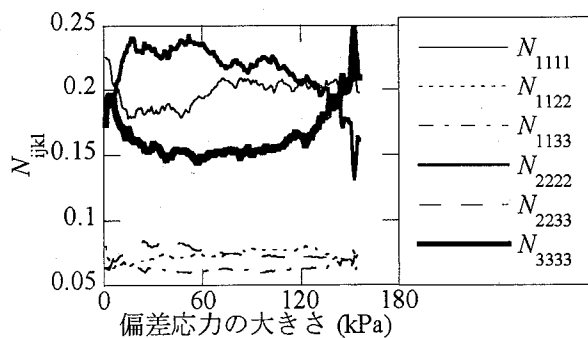


b) N_{ijkl}

図-11 荷重試験E3の滑動接触テンソル



a) N_{ij}



b) N_{ijkl}

図-10 荷重試験E2の滑動接触テンソル

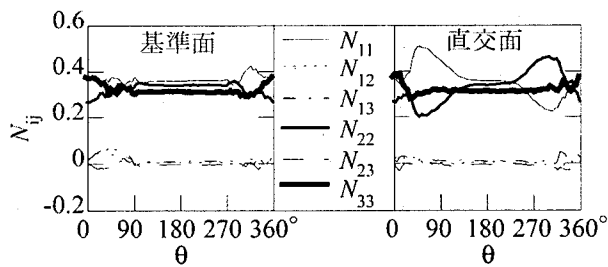
に起因している。

図-12～図-14は荷重試験(E1～E3)における荷重経路

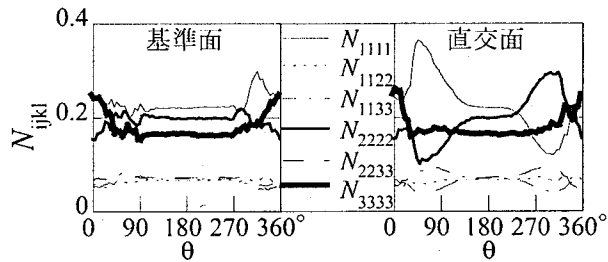
上の $s = 60 \text{ kPa}$ の応力点で行ったプローブ試験に対応する滑動接触テンソル N_{ij} と N_{ijkl} の算定結果である。プローブ試験は図-3 に示した基準面 ($\alpha = 0^\circ$) と直交面 ($\alpha = 90^\circ$) で行ったものである。

基準面 ($\alpha = 0^\circ$) の試験結果に基づいて求めた N_{ij} は図-3 に示した荷重方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の範囲でほぼ変化しなく、一定であることが示される。この場合も N_{ij} の主軸は応力の主軸にほぼ一致している。荷重方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の範囲で各成分の値はほぼ一定であり、その値はほぼ荷重試験 (E1 ～ E3) に対するものに等しい。しかし、 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ 以外の荷重方向に対して N_{ij} は変動が大きいものとなっているが、これは塑性ひずみ増分が $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ 以外の荷重方向でほとんど生じないので、滑動接触面の数が限られ、統計量がばらつくためである。これらの結果より、基準面内のプローブ方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の場合、滑動接触テンソルの値は一定で粒状供試体の塑性変形メカニズムは同一と考えられる。

これに対して、直交面 ($\alpha = 90^\circ$) の試験結果に基づいて求めた N_{ij} は、荷重試験 E1 ～ E2 の場合、応力プローブの荷重方向による変化がみられる。このことは、プローブ方向によって塑性変形メカニズムが異なることを示唆している。ただし、伸張荷重試験 E3 の場合は、このような違いは見られない。プローブ荷重方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の以外の範囲で変動が大きいことは基準面内の場合と同様であるが、プローブ荷重方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の外側にも継続的に滑らかに変化する領域が広がっていることが注目される。

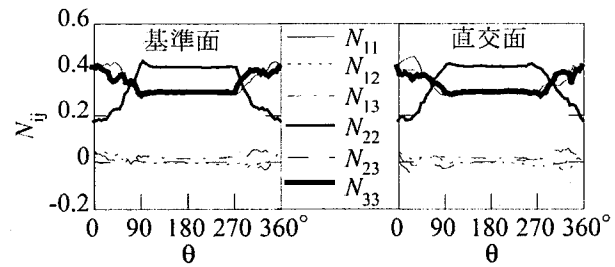


a) N_{ij}

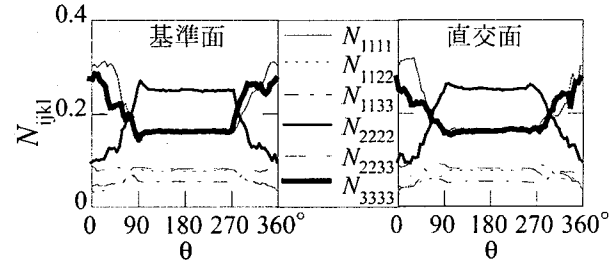


b) N_{ijkl}

図-12 プローブ試験の滑動接触テンソル (E1)

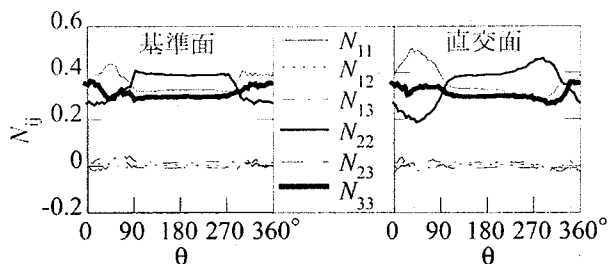


a) N_{ij}

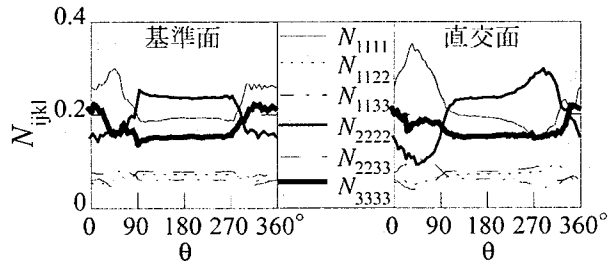


b) N_{ijkl}

図-14 プローブ試験の滑動接触テンソル (E3)



a) N_{ij}



b) N_{ijkl}

図-13 プローブ試験の滑動接触テンソル (E2)

載荷試験とプローブ試験で得られた N_{ij} と N_{ijkl} は応力状態の変化に伴って変化する状態量であると考えることができよう。また、図-12～図-14の比較で分かるようにプローブ試験で得られた滑動接触テンソルは応力プローブの応答である塑性ひずみ増分の挙動⁸⁾と相関性のある変化を示し、滑動接触テンソルが供試体内部の塑性変形メカニズムを表現するものになっていると考えられる。

(3) 滑動接触面の密度分布関数

図-15～図-17にそれぞれ載荷試験 (E1～E3) について、式 (27) と式 (30) で定義した 2 種類の密度分布関数を求めた結果を示す。図中の a) は式 (27) に基づいて 2 階テンソルに基づく密度分布関数である。この分布形状は楕円体であり、密度分布は応力主軸の方向で最大値をとることに

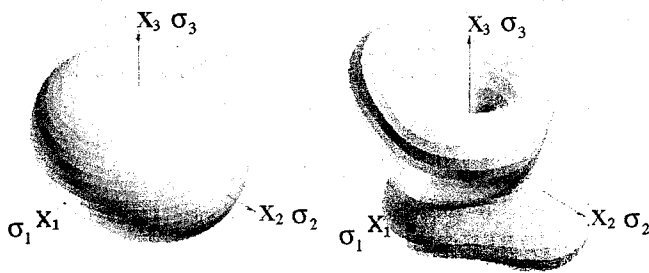
なり、滑動接触面の分布を反映していないことになる。通常の構造テンソルは全ての接触点の統計量であるため、応力主軸の方向で極値をとることは自然であるが、滑動接触面の統計的表現を得るためには、より高階のテンソルを導入することが不可欠である。

b) は式 (30) に基づいて 4 階テンソルを用いた密度分布関数の算定結果である。硬化がある程度進んだ段階における算定結果であり、密度分布関数分布が明確に卓越する方向が現れている。密度分布関数の概形は原点を頂点とする 2 つの円錐体を組み合わせたものとなっている。このような分布形状は 4 階テンソルを用いることによりはじめて表現することが可能となるものであり、本論文で対象としている滑動接触面の統計分布を表現する上でこのような表現は必須のものである。 π 平面上の載荷試験で、載荷試験 E1 から E3 に変化するのに伴い、円錐体の軸は X_3 軸から X_2 軸に変化している。これは両極端の三軸圧縮と三軸伸張載荷において、 X_3 軸および X_2 軸が載荷方向となっていることに対応している。これらの分布における円錐の尖りの度合は三軸伸張の方が大きく、滑動接触面の方向が統計的に最小主応力の方向に傾く傾向を示している。

以上、滑動接触面の分布は 4 階テンソルにより合理的に表現できることを示した。とくに、3 軸状態の場合、その対称性を反映して、平面ではなく、図-15～図-17 のような法線をもつ曲面として表現されている。このように、4 階滑動接触テンソルは粒状材料内部のエネルギー散逸を表現する上で有用であると考えられる。

6. まとめ

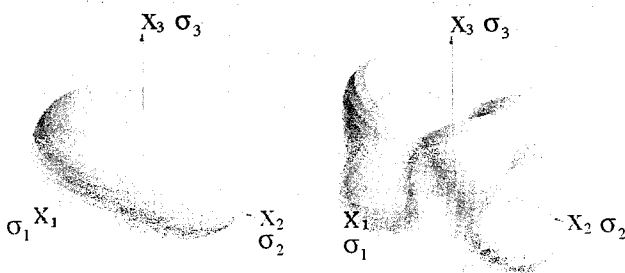
本研究では、供試体内部の各接触点における相対変位の算定式を導くことにより、接触力と粒子間相対変位のする仕事と散逸エネルギーを微視的に求め、巨視的応力とひずみ



a) 2 階の近似関数

b) 4 階の近似関数

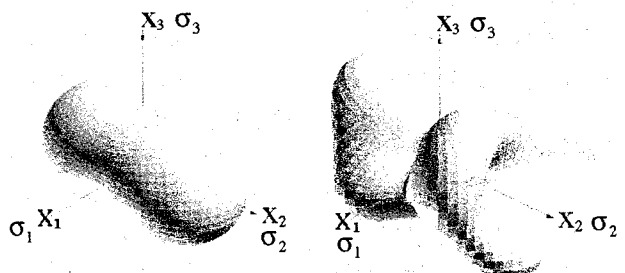
図-15 滑動接触面の密度分布関数 ($E1, s = 84 \text{ kPa}$)



a) 2 階の近似関数

b) 4 階の近似関数

図-16 滑動接触面の密度分布関数 ($E2, s = 78 \text{ kPa}$)



a) 2 階の近似関数

b) 4 階の近似関数

図-17 滑動接触面の密度分布関数 ($E3, s = 71 \text{ kPa}$)

より算定される仕事と散逸エネルギーとの比較を行った。粒状体の弾塑性変形挙動を支配する滑動接触面は接触粒子の塑性相対変位により求めることができ、滑動接触面の分布特性についての考察より、次の結果が得られた。

- 1) 粒子間接触力と粒子間相対変位により算定される仕事の総和と巨視的応力とひずみより算定される仕事とが一致することから、シミュレーション解析が高精度であることを確認することができた。また、接触力に基づいて算定した散逸エネルギーは、応力に基づいて算定した散逸エネルギーより常に小さくなったが、これは塑性ひずみが生じると、粒子間のバネに蓄えられる弾性エネルギーの中に解放されずに残留する部分が生じるためである。しかし、2つの方法で算定した散逸エネルギーの間にはほぼ線形的な関係が認められ、弾性エネルギーの残留部分は粒子間のすべりにより算定される散逸エネルギーにほぼ比例するとみなすことができる。
- 2) 粒子間の接触点において、粒子間にすべりが生じてい

る場合、相対変位増分はほぼ塑性相対変位増分であるといえる。このような性質を利用して滑動接触面を定義し、エネルギー散逸に関する統計量の算定を行うことができる。

- 3) 载荷試験に得られた滑動接触テンソルは载荷の応力状態の変化に伴って変化し、すべりは粒子間接触力の小さな接触面において生じる傾向がある。プローブ試験で得られた滑動接触テンソルは応力プローブの応答である塑性ひずみ増分の挙動によく似ている。このように滑動接触テンソルはエネルギー散逸を伴う変形機構を表す統計量であると考えられる。
- 4) 滑動接触面分布は、滑動接触面の単位法線ベクトルの積を基底関数として、滑動接触面の密度分布関数により表される。数値試験で得られた滑動接触面の分布は4階の滑動接触テンソルで表した密度分布関数によりその特性を十分な一般性をもって表すことができる。

本論文で定義した滑動接触テンソルを用いれば、散逸エネルギーを微視的に表現することができ、これをもとに塑性流動則を定めることができる⁹⁾。なお、本研究で定義した滑動接触テンソルは応力を関数として表すことができると考えられ、その表現手法は今後の課題の1つである。

参考文献

- 1) Oda, M.: A mechanical and statistical model of granular material, *Soils and Foundations*, Vol.14, No.1, pp.12-27, 1974.
- 2) 佐武正雄：粒状体におけるファブリックテンソルについて、粒状体力学の構成に関する研究, pp.1-10, 文部省科学研究費総合研究, No.56306023, 1982.
- 3) Kanatai, K.: A theory of contact force distribution in granular materials, *Powder Technology*, Vol.28, No.2, pp.167-172, 1981.
- 4) 中井照夫, 松岡元：任意応力経路下の土の変形挙動に関する統一的解釈, 土木学会論文報告集, No.306, pp.23-34, 1981.
- 5) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko, K.: On the plastic flow of granular materials, *Powders and Grains 2001* (Kishino, Y., ed.), pp.199-202, Balkema, Rotterdam, 2001.
- 6) Kanatai, K.: Distribution of directional data and fabric tensors, *International Journal of Engineering Science*, Vol.22, No.2, pp.149-164, 1984.
- 7) 金子賢治, 岸野佑次, 京谷孝史：微視力学に基づく粒状体の構成則の定式化, 応用力学論文集, Vol.1, pp.469-480, 1988.
- 8) 鄒春躍, 岸野佑次, 水野谷勇輝：数値粒状体モデルの一般的増分挙動, 応用力学論文集, Vol.8, pp.557-564, 2005.
- 9) 岸野佑次, 鄒春躍：マイクロメカニクスに基づく粒状体の構成則の定式化, 土木学会東北支部技術研究発表会 (平成17年度), pp.482-483, 2006.

(2006年4月13日 受付)