

飽和粘土地盤の圧密変形に及ぼす幾何学的非線形性の効果

Effect of change in geometry on soil-water coupled deformation of clay soil

竹内秀克*・高稲敏浩**・野田利弘***

Hidekatsu TAKEUCHI, Toshihiro TAKAINE and Toshihiro NODA

*正会員 工修 不動産建設(株)ジオエンジニアリング事業本部(〒103-8543 東京都中央区日本橋小網町 6-1)

**正会員 工博 (株)浅沼組技術研究所(〒569-0034 高槻市大塚町 3-24-1)

***正会員 工博 名古屋大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

Elasto-plastic finite deformation computation was made to examine the effects of changes in geometry on consolidation deformation of a clay soil due to embankment loading. The effects were elucidated by comparing the infinitesimal deformation case. The findings are as follows: (1) The settlement near/at the center and the lateral deformation at the toe of the embankment in the finite deformation case are lower than those in the infinitesimal case. (2) The reduction in settlement is attributed to the decrease in thickness of the soil, which stiffens the apparent rigidity of the soil. (3) The reduction in lateral deformation is caused by the geometric change of the boundary under the embankment during consolidation, which leads to pulling the toe to the center of embankment. (4) These reduction effects are affected by the embankment rigidity.

Key Words: consolidation, finite deformation theory, geometric nonlinearity, lateral deformation

1. はじめに

性能照査型の設計が導入される昨今、地盤の変形・破壊の数値計算の必要性／重要性は益々認識されてきている。しかしながら、例えば、中井¹⁾が指摘するように「時として解析的に予測した側方変位が定量的にも定性的にも傾向をもって実測値からずれることも多く現在実務での解析法として信頼性をもって事前予測がなされているとはいえない」のが現況であり、数値計算による変位予測値と現実との間にギャップが存在することもしばしばである。また中井はその要因として、(1)地盤材料の構成モデル、(2)地盤や構造物およびその境界面の力学特性の評価、(3)施工過程の評価などを挙げている。また、(1)に関して言えば、オリジナル Cam-clay 型の降伏面から修正 Cam-Clay 型の楕円形状に代えることで塑性ひずみ増分を修正することにより、圧密計算の側方変位を実測に近づけようとする試みもよく知られている。

ところで、これまでの地盤の変形・破壊の数値計算の多くでは、構成式に材料非線形性を考慮するものの、変形理論において幾何学的線形性を仮定した微小変形理論に基づいて行われてきた。微小変形理論は変位と変位勾配が十分に小さいことを仮定して、刻々の地盤の幾何形状変化を考慮する必要が無いため、有限要素法を用いた数値計算に比較的適用しやすい。しかしながら形状や寸法を持った物体が有限な変形をすることを考えると、変

形が大きくなる場合には、微小変形計算に自ずと限界があることが自然に想像できる。Asaoka et al.²⁾は、この点に着目し、地盤材料に客観性のある有効応力速度と土骨格のストレッチングを線形関係で与えた線形な亜弾性体(「線形弾性体」)を仮定するとともに、盛土荷重を(有限要素の)節点に等価な分布荷重で表現して、有限変形計算と微小変形計算を実施し、幾何学的非線形性の効果として、次の3点を示した。①荷重履歴によらず変形は一意に決まるが、荷重の大きさに対して変形が線形的に決まらない。②地表面沈下に伴う層厚減少により、見掛けの地盤剛性が増大するため沈下を小さくする効果がある。③盛土載荷部の沈下に伴う地表面の傾斜により、地表面に沿う盛土向きの表面力が作用するため、側方変位が抑えられる(「引き込み」効果)。なお、引き込みに伴う表面力の作用幅の減少により、見掛け上鉛直応力が大きくなる。このため、この効果は、その部分の沈下について、②の効果を相殺する方向に働く。

そこで本論文では、中井が指摘するような圧密変形に関する実測値と計算予測値のギャップについて、材料的非線形性も加味しながら、幾何学的非線形性の効果、すなわち、地盤の圧密に伴って刻々変化する幾何形状変化の効果について述べる。具体的には、Asaoka et al.²⁾と同じように、盛土荷重を等価な分布荷重で与えて、幾何学的非線形性を明示的に表すとともに、中井の前述の要因事項(2)に沿って、地盤と土構造物(盛土)の相互作用の影

響を考慮するため、弾塑性有限要素メッシュで表した場合の効果例を示す。なお、計算では土の弾塑性構成式に、塑性変形に伴う土の骨格構造(構造・過圧密・異方性)の働きを考慮できる SYS Cam-clay モデル(Super/subloading Yield Surface Cam-clay model)(付録 A1 参照)を用いた。

2. 幾何学的非線形性の検討方法

2.1 有限要素メッシュおよび地盤条件

計算は自然堆積粘土地盤を仮定し、2次元平面ひずみ条件で行った。図-1 は有限要素メッシュ図(縦15要素×横45要素、計675要素)と境界条件を示す。簡単のため、左右対称性を仮定して1/2断面を計算領域とした。地盤上端面(地表面)は水面と一致するように水圧を常にゼロとし、下端面は砂層のように透水性の高い層の存在を仮定して初期状態のままの水頭(水圧)が保持される排水境界とした。表-1 は地盤の材料定数と初期値を示す。また、図-2 は、地盤の初期状態における深さ方向の分布を示す。地盤内の初期土性分布として、過圧密比 $1/R$ 、構造の程度 $1/R^*$ および側圧係数が深さ方向に一樣と仮定し、重力を考慮して土被り圧に応じ比体積を分布させた(付録 A2 参照)。図-3 は深さ約10m(土被り圧約50kPa)にある土要素の非排水せん断挙動を示す。典型的な若干過圧密な粘土の挙動を示している。なお、この図で q はせん断応力、 p' は平均有効応力、 v は比体積(e は間隙比)、NCL および CSL は繰り返し粘土の等方正規圧密線および限界状態線を表す。計算では、有限変形計算では、刻々の座標を Lagrange 座標とみなしながら座標を逐次更新する updated Lagrangian を用いているが、微小変形計算では、刻々の計算に用いる地盤の形状は最初のままで、沈下・

側方変位などの変位量は初期形状を元に計算される増分量を加えているだけである。なお、支配方程式は微小変形計算のままで、座標だけ updated Lagrangian のように更新してその形状をもとに問題を解く方法があるが、それは、力のつりあい式に見られる幾何形状変化に起因して得られる「移流項」(付録 A3 参照)がなく、有限変形理論とは呼べない。また、本論文では水~土連成式(連続式)のモデル化を田村流³⁾・Christian 流⁴⁾に基づいている⁵⁾。

2.2 盛土の载荷条件

本論文では、盛土を有限要素の節点に、等価な分布荷重を与えて表現する場合と、弾塑性体の有限要素を追加する二つの場合について検討する。分布荷重とした場合は、有限変形および微小変形計算で比較し、飽和単位体積重量 $\gamma_s = 17.65 \text{ kN/m}^3$ の盛土材に相当する荷重を図-1 に示す荷重形状を仮定して、①3.0m(载荷期間10日)、

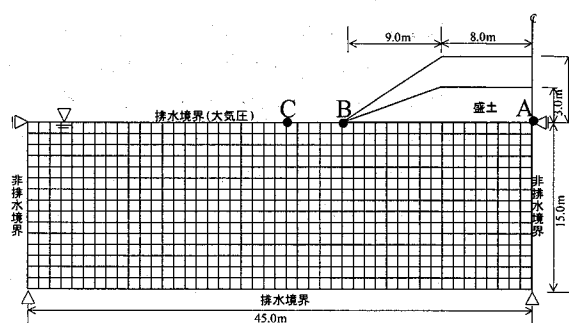


図-1 有限要素メッシュおよび境界条件

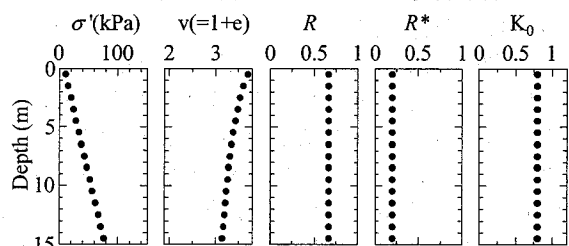


図-2 地盤の初期状態における深さ方向の分布

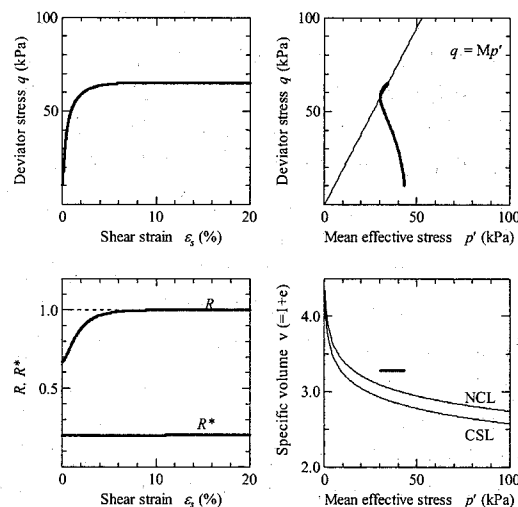


図-3 土要素の非排水せん断挙動

表-1 粘土の材料定数および初期値	
材料定数	
圧縮指数 λ	0.29
膨潤指数 κ	0.05
限界状態定数 M	1.90
繰返し状態にある土の 等方正規圧密線の切片 N ($p' = 98 \text{ kPa}$, $q = 0$ 時の比体積)	2.75
ポアソン比 ν	0.1
構造劣化指数 a, b, c	0.04, 1.75, 8.0
正規圧密土化指数 m	2.0
回転硬化指数 b_r	0.001
回転硬化限界定数 m_b	0.5
透水係数 k (cm/sec)	1.0×10^{-8}
土粒子の密度 ρ_s (t/m^3)	2.58
初期値	
構造の程度 $1/R_0$	5.0
過圧密比 $1/R_0$	1.5
応力比 η_0	0.75
側圧係数 K_0	0.8

②6.0m(載荷期間 20 日)まで載荷する 2 ケースを考え、漸増載荷後一定に放置した。一方、盛土を有限要素メッシュとして弾塑性体でモデル化した場合は、有限変形計算で行い分布荷重で与えた場合と比較するが、分布荷重で与える場合と同等の荷重の大きさになるようにした。その詳細は 4 章に別掲する。表-2 に計算を実施したケースの一覧を示しておく。

表-2 解析ケース

CASE	変形理論	載荷条件	盛土高さ
1	微小	分布荷重	3m
2	有限	分布荷重	3m
3	微小	分布荷重	6m
4	有限	分布荷重	6m
5	有限	弾塑性体	3m
6	有限	弾塑性体	6m

3. 分布荷重載荷時の幾何学的非線形性の効果

3.1 有限変形計算と微小変形計算

2 章に示した荷重条件で、有限変形計算と微小変形計算の結果を比較する。前者の計算は、付録 A3 参照にしますように、updated Lagrangian を用いるべく、支配方程式の段階から幾何形状変化の影響を考慮したもので、微小変形計算における支配方程式等の違いは同付録の中に記述した。また有限変形計算の場合の分布荷重は、同付録に示すように、Piola-Kirchhoff 応力を介して、常に変形した地表面を変形前(盛土載荷前の初期の時点)に戻したときに、所定の分布荷重が鉛直に作用するように等価な節点力として与える。この結果、有限変形計算の場合も容易に、微小変形計算と同等の大きさ分の荷重を作用することができ、また例えば、荷重が地表面のある載荷幅に瞬時に与えられた場合に、地表面が変形してその載荷幅が小さくなれば、見掛け上、鉛直応力が大きくなるような効果を生むことになる。

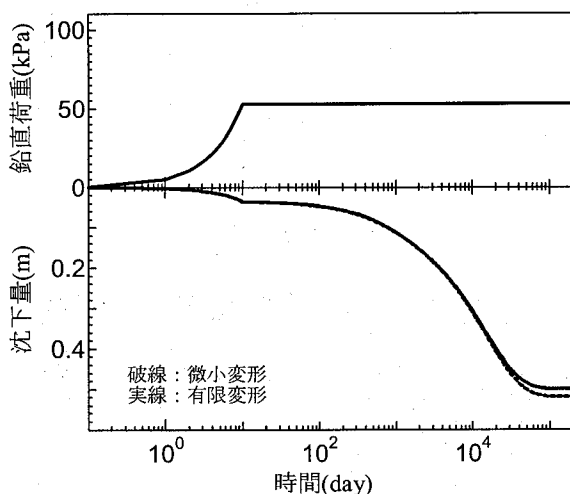


図-4 時間～沈下量関係の比較 (盛土高 3m, A 点)

3.2 計算結果

図4～6は、①3m盛土のケースの盛土中央直下(図-1 中 A 点)の地盤における時間～沈下量関係、盛土法尻部(図-1 中 B 点)および法尻より 5m 離隔した地点(図-1 中 C 点)の側方変位の地中分布を示す。微小変形と有限変形の計算結果をそれぞれ時間～沈下量関係では破線と実線、側方変位は白丸と黒丸で示す。また、側方変位分布の破線は(a)盛土載荷時(10 日)、実線は(b)圧密終了時の値を表す。3m 程度の比較的小さな荷重レベルではあるが、沈下量は圧密終了時において、有限変形の場合の方が若干小さい。また、側方変位については、両者とも盛土載荷時に左側に同じだけ変位する。その後、圧密の進捗に伴い、右側に変位を移すが、有限変形の場合の方が右側への変位量がわずかに大きい。

次に図7～9は、②6m 盛土のケースの時間～沈下量関係(A 点)および、盛土法尻部(B 点)、盛土法尻部より 5m 地点(C 点)の側方変位の地中分布を示す。沈下量は①のケースよりも微小変形と有限変形の計算結果に差異が

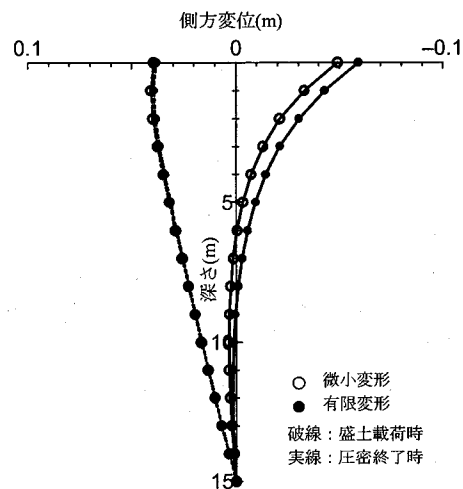


図-5 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高 3m, B 点)

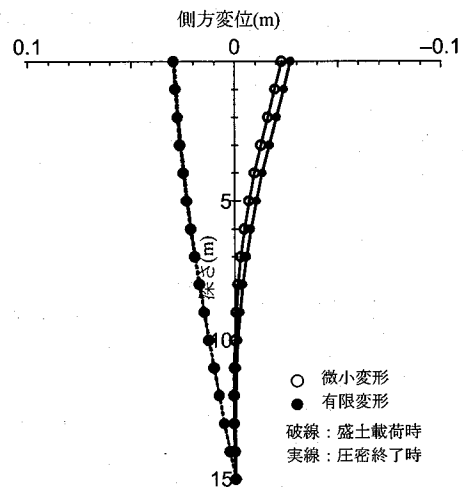


図-6 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高 3m, C 点)

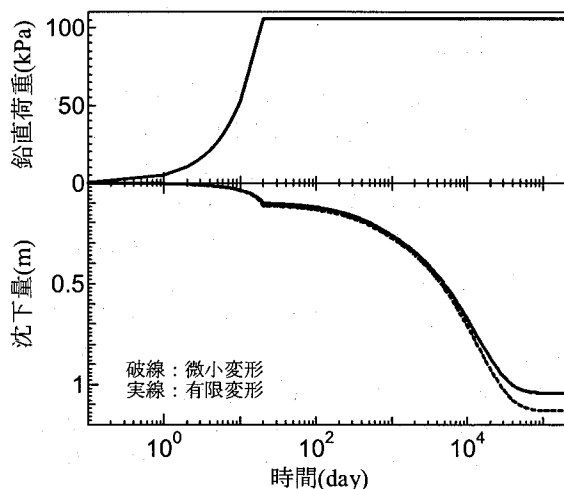


図-7 時間～沈下量関係の比較 (盛土高 6m, A 点)

顕著に見られ、有限変形の方が約 10cm 程度(全沈下量の約 10%)小さくなっている。一方、側方変位については、両変形計算で盛土載荷時から圧密終了時までの間に右に変位が戻っている点は同じであるが、微小変形の場合、盛土法尻部において盛土載荷時において最大約 60cm、圧密終了時において約 50cm もの変位が外側(右側)に生じているのに対し、有限変形では盛土載荷時で最大約 20cm、圧密終了時においては約 5cm に抑えられ、両者の計算に数倍もの違いが見られる。盛土法尻部より 5m 地点でも法尻部ほどでは無いものの最大 5cm 程度の差異が見られる。

図-4～9 で示したこれらの効果を地盤内の空間的な分布性状として次に示す。①3m 盛土のケースにおける有限変形と微小変形の比較として、図-10,11 にそれぞれのせん断ひずみ分布と、図-12,13 に比体積変化分布を示す。なお、ここでは、せん断ひずみおよび比体積変化は、ともに刻々これらを見てもこの載荷荷重レベルでは両者に大きな違いはあらわれていないのがわかる。次に、②6m 盛土のケースにおける両者の比較として、図-14,15 にせ

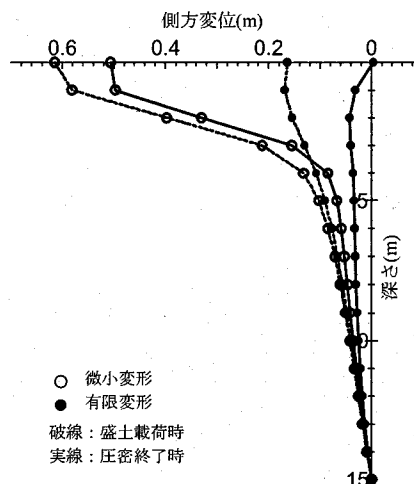


図-8 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高 6m, B 点)

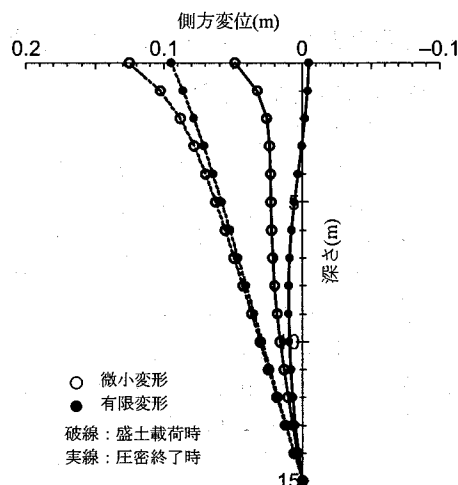


図-9 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高 6m, C 点)

せん断ひずみ分布と、図-16,17 に比体積変化分布を示す。

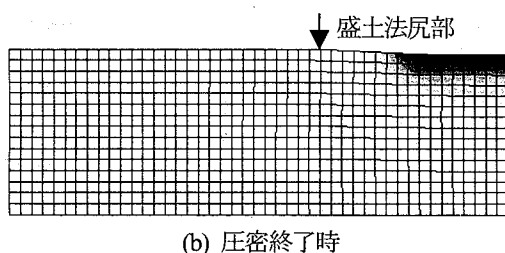


図-10 せん断ひずみ分布 (H=3m,微小変形)

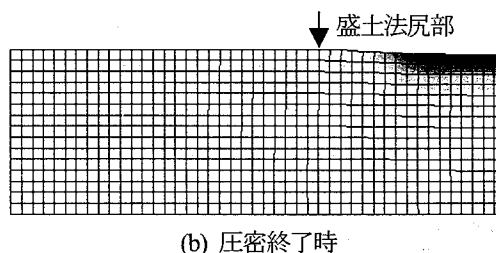


図-11 せん断ひずみ分布 (H=3m,有限変形)

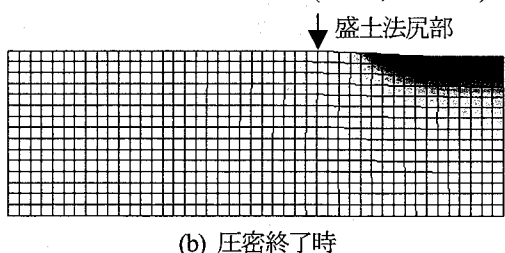


図-12 比体積変化分布 (H=3m,微小変形)

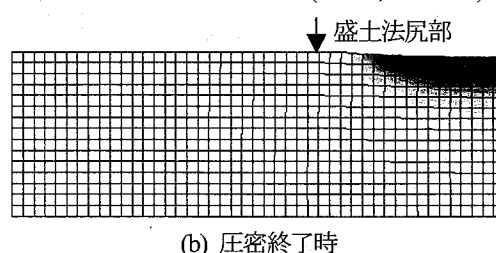


図-13 比体積変化分布 (H=3m,有限変形)

10.0%



0.0%

-0.35



0.0

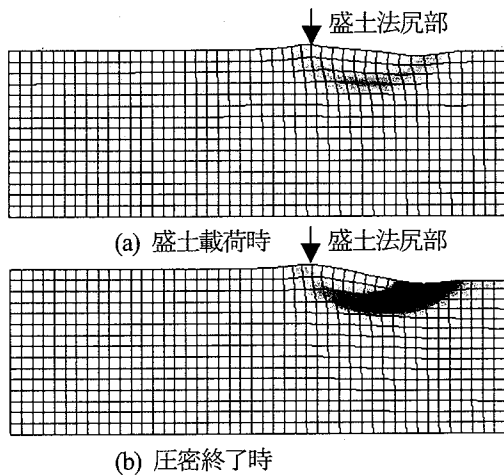


図-14 せん断ひずみ分布 (H=6m,微小変形)

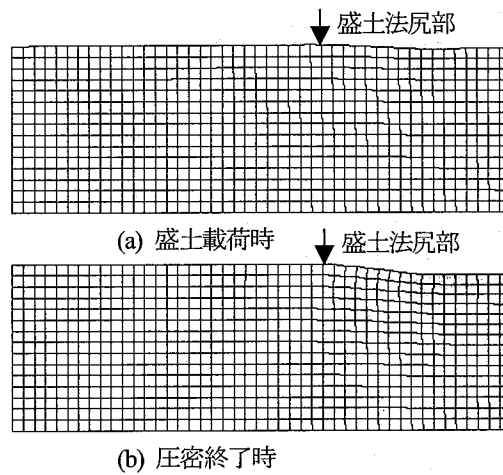


図-15 せん断ひずみ分布 (H=6m,有限変形)

37.0%
0.0%

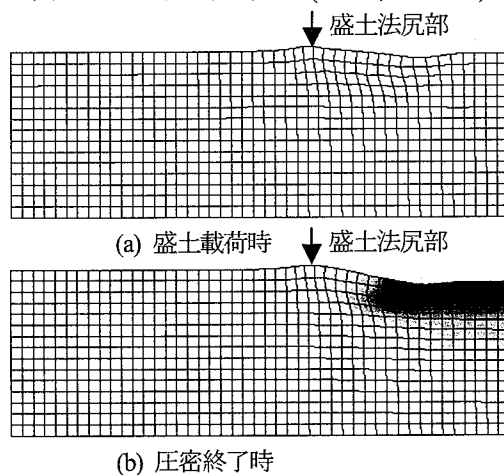


図-16 比体積変化分布 (H=6m,微小変形)

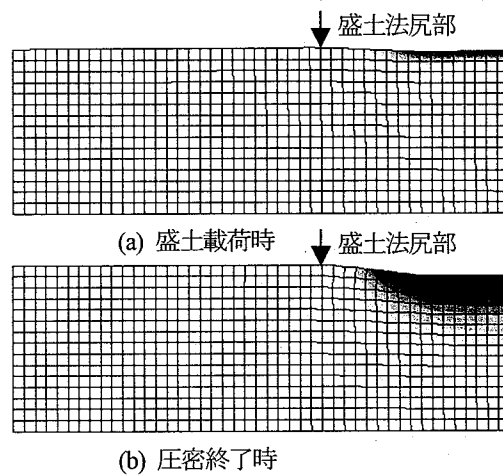


図-17 比体積変化分布 (H=6m,有限変形)

-0.65
0.0

比体積変化に関しては両者大きな違いは現れないのだが、せん断ひずみ分布をみると特に盛土載荷時に微小変形の方が「滑り面」のような分布を形成しており、それに伴い変形量も非常に大きくなっている。なお、微小変形計算の出力としてのせん断ひずみおよび比体積変化を計算するための変形前後の微小体積比は、有限変形理論と同じように整理している。つまり、見掛けの変形後の座標を用いて、せん断ひずみはオイラーひずみテンソルの偏差成分のユークリッドノルムに $\sqrt{2/3}$ を乗じたもの、微小体積比は変形勾配テンソルのヤコビアンである。

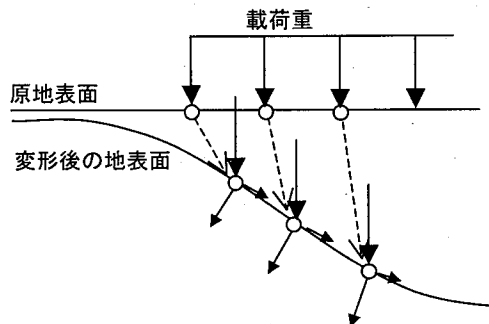


図-18 分布荷重による「引き込み」効果概念図²⁾

3.3 考察：沈下量低減効果と「引き込み」効果

前述のように、有限変形計算が微小変形計算よりも沈下が小さくなったのは、概念的に言えば、線形弾性体の棒を端部から力を加えて短くする場合を考えると分かりやすい。つまり、材料が線形弾性体の棒であっても(棒の形がある限り)有限変形の場合は短くなればなるほど同じだけ変位を与えようとすればより大きな力が必要となるが、微小変形の場合は関係なく、見かけ上、棒はなくなってしまう。つまり、盛土中央直下では、層厚が薄くなる影響がでるため、沈下は小さくなったと言える²⁾。

側方変位については、有限変形と微小変形の両計算ともに、過剰間隙水圧の消散に伴い、盛土下部の土要素がより大きく圧縮するため、盛土載荷時に法尻が外側に(左側に)出た後、逆に戻りの変形が現れたと言える。一方、両者の計算で、有限変形計算の方が図-8で見られる法尻部(B点)で側方変位が抑えられているのは、この場合、図-18に示すように、圧密の進捗に伴い盛土部の地表面が傾くが、これによって地表面に沿う方向の表面力が作用するためで、「引き込み」効果が現れるためであると言える²⁾。

4. 盛土を弾塑性体有限要素で表現した場合

4.1 载荷方法

計算に用いる地盤の有限要素メッシュ図と境界条件は前節と同じとし、盛土を有限要素で追加することで表現する。ここでは有限変形計算のみを行う。盛土追加の具体的な手順は、追加する盛土と地盤の初期状態をそれぞれ重力場で水平に均質な状態にあるとして別途計算(付録A2 参照)しておき、地盤と盛土の応力状態などを変えないで、盛土下面の変位境界を応力境界に変更し結合させる。追加盛土は、その盛土の形状(メッシュ)を保ったまま深さ方向に分布させるためには、盛土の上面・下面および側面には盛土内の分布を与えるのに必要な表面力が作用していることになるから、その表面力を付録A4によって計算し、地盤の地表面と結合した後に盛土からその表面力を取り除く。すなわち、盛土下面と地盤との結合面では盛土自重分を地盤に作用させるとともに、また盛土法面部はあたかもその上に載っていた土の荷重分だけの「鉛直力」と側方から抑えられていた分の「側方力」を盛土法面に逆向きに载荷する。ここでは、盛土载荷は载荷時の地表面形状を考慮に入れながら、盛土が盛り立て時に初期地表面から1mずつ高くなるように縦方向に約1m(1要素)毎に(図-19 参照)有限要素を段階的に増加させることにより、多段階で「漸増」载荷した(図-20 参照)。なお、この方法で盛土を段階的に载荷してゆく場合、新たな盛土载荷時には、それまでの盛土载荷に伴い、地盤あるいは盛土に沈下/変形が生じている。つまり、図-19のような新たに追加する盛土メッシュは、上面が水平になるように、下面がその下にある盛土(あるいは地盤)の変形形状に一致するように与える。このため、所定の盛土高を与えるような場合、地盤に実際に作用する盛土の荷重の大きさは、分布荷重で与える場合と異なり、地盤あるいは盛土の変形に依存することになる。

表-3 盛土の材料定数および初期値		
材料定数		盛土
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$		0.27
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$		0.01
限界状態定数 M		1.15
繰返し状態にある土の 等方正規圧密線の切片 N ($p' = 98\text{kPa}$, $q = 0$ 時の比体積)		2.51
ポアソン比 ν		0.3
構造劣化指数 a, b, c		0.2, 1.0, 1.0
正規圧密土化指数 m		5.0
回転硬化指数 b_r		0.001
回転硬化限界定数 m_b		1.0
透水係数 k (cm/sec)		2.8×10^{-7}
土粒子の密度 ρ_s (t/m ³)		2.65
初期値		
構造の程度 $1/R_0^*$		1.1
比体積 v_0		2.06
応力比 η_0		0.75
側圧係数 K_0		1.2

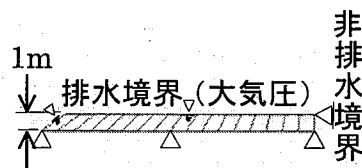
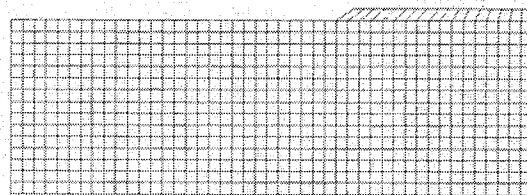
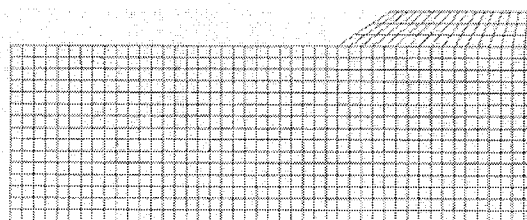


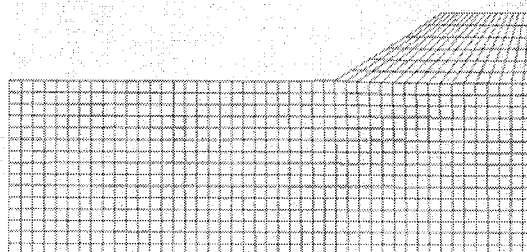
図-19 盛土メッシュ(1m分)



(a) 1m 载荷時 (1段階目)



(b) 3m 载荷時 (3段階目)



(c) 6m 载荷時 (6段階目)

図-20 有限要素メッシュによる盛土载荷の様子
(H=6m 盛土の場合)

盛土と地盤間の水理境界に関しては、盛土と地盤との間にサンドマットすなわち排水層が存在することを想定し、盛土下面と地盤の境界部の水圧がゼロとなるケースを考えた。盛土の力学特性に関しては、不飽和や固さなど様々な要因が影響を及ぼすと考えられるが、ここでは、盛土を水～土連成の飽和土材料とし、表-3のような盛土の材料定数および(地盤と結合前の)初期状態を設定した。盛土は①3mを10日間での载荷を想定したケースと、②6mを20日間での载荷を想定したケースの計算を実施した。荷重に関しては、1m载荷時の地表面に作用する「鉛直応力」が 17.65kN/m^2 となるよう比体積を調整し材料定数・初期状態を設定している。

4.2 計算結果と考察

図-21,22 は、盛土中央直下において分布荷重で与えた場合(3章)の有限変形と微小変形の時間～沈下量関係に、弾塑性体盛土で载荷した場合の結果を重ねた図を示す。

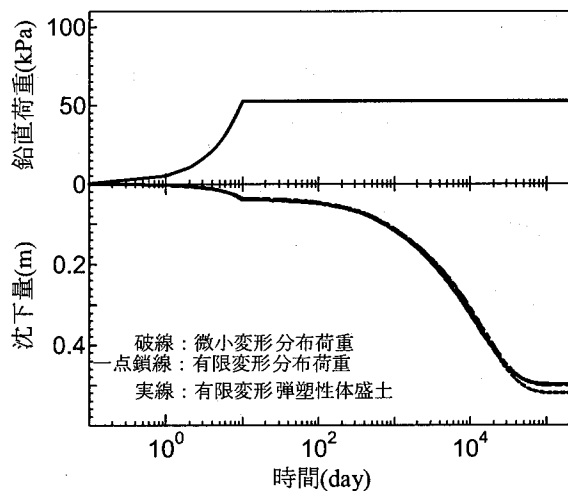


図-21 時間～沈下量関係の比較 (盛土高3m,A点)

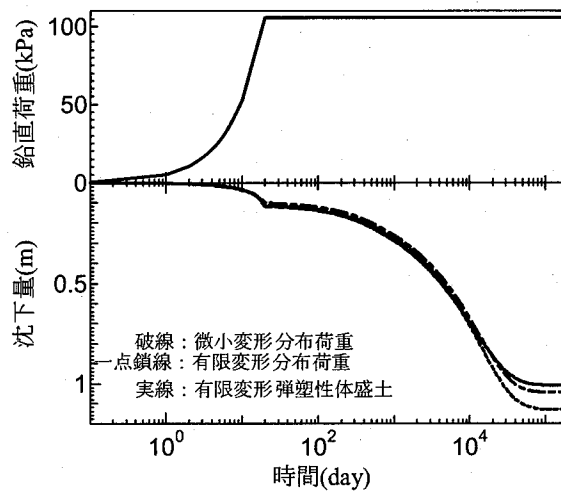


図-22 時間～沈下量関係の比較 (盛土高6m,A点)

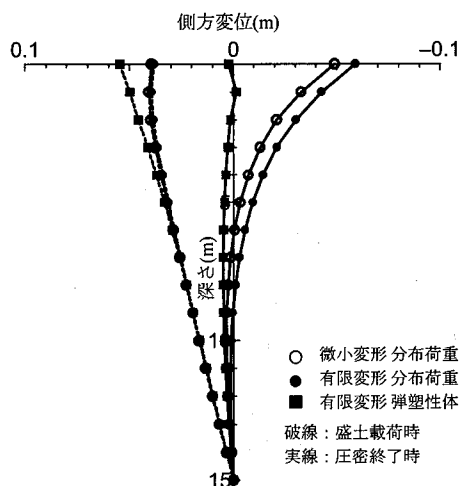


図-23 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高3m,B点)

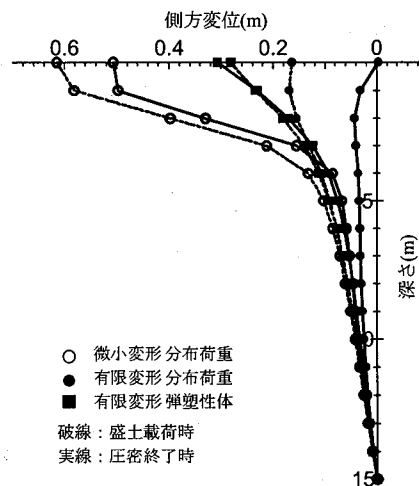


図-24 側方変位分布の経時変化の比較 (盛土高6m,B点)

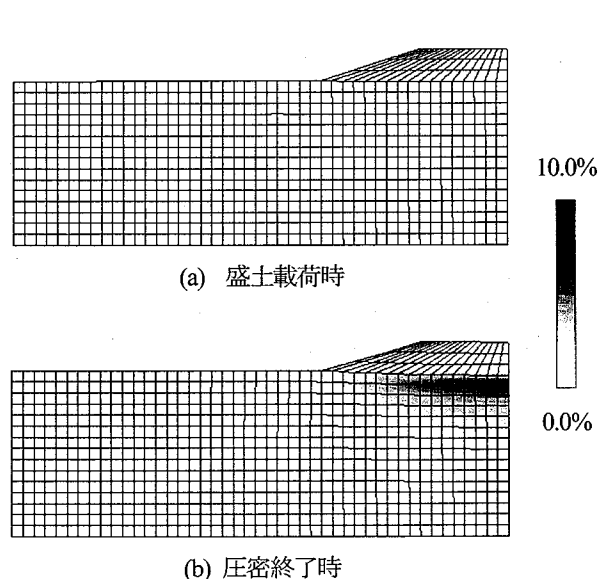


図-25 せん断ひずみ分布 (H=3m,有限変形)

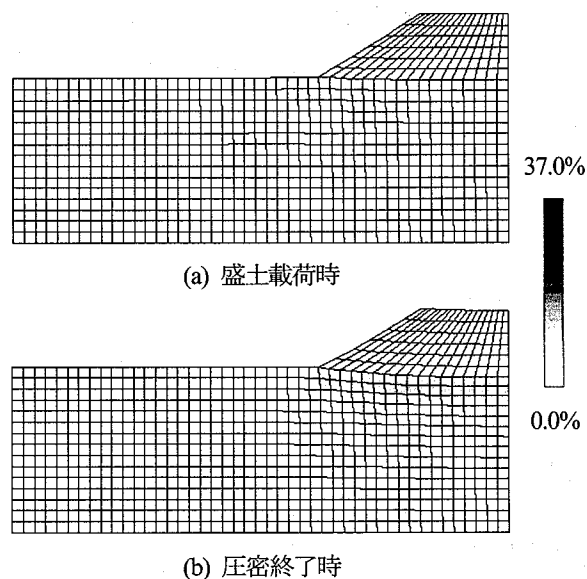


図-26 せん断ひずみ分布 (H=6m,有限変形)

3者を比較すると、本論文の計算では、①3m、②6mのケースとも、有限変形の分布荷重の場合とほとんど差異はないが、有限変形弾塑性体盛土の場合はわずかにだけはあるが小さくなっている。次に、図-23,24に分布荷重を与えた場合(3章)の有限変形と微小変形計算で得られた側方変位の地中分布に、弾塑性体盛土で载荷した場合の結果を重ねて示す。厳密には、4.1に述べたように、盛土メッシュで与えた場合と分布荷重で与えた場合で盛土荷重の大きさは異なるが、これを見ると、①3mの場合、有限変形・微小変形ともに、(a)盛土载荷時点、(b)圧密終了時点で引き込み効果が抑えられている。また、②6mのケースは、地盤から見て引き込み効果が現れるものの、有限変形の分布荷重の場合に比べ、弾塑性体盛土の場合、(a)盛土载荷時、(b)圧密終了時とも大きく引き込み効果が抑えられ、(a)と(b)の時点の差がほとんど見られない。この引き込み効果の抑えの効果は、盛土自身の剛性に起因するものと考えられる。なお、この盛土剛性に起因する地表面変形の抑止効果は、地盤の状態、盛土の状態、盛土・地盤境界部の影響、盛土の载荷速度、不飽和等に起因して変化するものと考えられる。図-25,26はせん断ひずみ分布である。分布荷重のものと大差ない。

5. 結論

本論文では、粘土地盤または盛土の材料非線形性を考慮しつつ、盛土载荷に伴う自然堆積粘土地盤の圧密変形に及ぼす幾何学的非線形性の効果を調べた。

以下に、本論文で行った計算に対して得られた知見をまとめる。

- 粘土地盤に盛土荷重を等価な節点力として分布荷重で与えた場合、荷重が比較的大きく変形が大きくなると、有限変形計算の方が微小変形計算よりも側方変位量を抑制する効果がある。これは、幾何学的非線形性の効果で、盛土载荷部の地盤の沈下に起因して生じる「引き込み」効果と言える。
- 盛土を弾塑性体有限要素メッシュとしてモデル化した場合、盛土の存在すなわち、盛土剛性によって上記「引き込み」効果が抑制される。
- 沈下における幾何学的非線形性の効果として、沈下を小さくする傾向に働く。ただし、盛土を分布荷重によってモデル化する場合と弾塑性体の有限要素メッシュとしてモデル化する場合には盛土中央直下付近の沈下量に大きな差異は見られなかった。

このように、有限要素計算においては、元になる計算手法、すなわち、微小変形計算と有限変形計算といった算法の違いの影響も含まれる。

謝辞

本計算は、All-Soils All-States All-Round Geo Analysis Integration (GeoAsia) (文献5)などを含む)による。計算は名古屋大学大学院浅岡顕教授に御助言をいただいた。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) 中井照夫：側方変位・側方流動予測の現状と将来 土と基礎, 50-2 (529), pp.4-6, 2002.
- 2) Asaoka, A., Noda, T. and Fernando, G.S.K.: Effects of changes in geometry on the linear elastic consolidation deformation, *Soils and Foundations*, Vol.37, No.1., pp.29-39, 1997.
- 3) 赤井浩一, 田村武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, 第269号, pp.95-104, 1978.
- 4) Christian, J. T.: Undrained stress distribution by Numerical Method, *Proc. of ASCE*, Vol.94, SM6, pp.217-232, 1990.
- 5) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34, No.1, pp.91-105, 1994.
- 6) Sekiguchi, H. and Ohta H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9)*, Tokyo, pp.229-238, 1977.
- 7) Hashiguchi, K. and Chen, Z. -P.: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 22, pp.197-227, 1998.
- 8) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, 40(2), pp.99-110, 2000.
- 9) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. Journal of Solids and Structures* 25, pp.917-945, 1989.
- 10) Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 18, pp.251-281, 1965.
- 11) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 12) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: Shear Bands Formation Numerically Simulated by a Non-coaxial Cam-clay Model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No.4, pp. 1-13, 1989.
- 13) Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A General Theory of Elasto-Plastic continuum, *Arch. Ratil. Mech. Anal.* Vol.18, pp.251-281, 1965.

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial T'} \cdot \dot{T}'}{J \frac{MD}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_s^2 - \eta^2)} > 0 \quad (A-1.7)$$

ここに、

$$M_s^2 = M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_s \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) - \left(\frac{U^*}{R^*} - \frac{U}{R} \right) \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3} (M_a^2 - \eta^2)^2} \quad (A-1.8)$$

で、 $M_a^2 = M^2 + \zeta^2$ 、 $\zeta = \sqrt{3/2} \|\beta\|$ である。

一方、有効応力変化は弾性変形によって生じるとして、非線形 Hooke 則を仮定すると構成式は、次式となる。

$$\dot{T}' = ED - \Lambda E \frac{\partial f}{\partial T'} \quad (A-1.9)$$

ここに、 E は弾性係数テンソル、 $\dot{T}'$ は T' の Dienes 速度¹⁰⁾、 Λ は塑性定数 λ のストレッチング D による表現である。

A2 地盤および盛土の初期分布の決定方法

初期過圧密比 $1/R_0$ 、初期構造の程度 $1/R^*$ および初期異方性 ζ_0 を有した地盤の地表面に等分布荷重 δ が作用し、一次元圧縮状態(初期側圧係数

$K_0 = (3 - \eta_0)/(3 + 2\eta_0) = \text{一定}$ 、 $\eta_0 (= q_0/p'_0)$: 初期応力比)にある時、深さ h_i における比体積 $v(h_i) = 1 + e(h_i)$ は、次式(A-2.1)で示される。

$$1 + e(h_i) = N_0 - \tilde{\lambda} \ln \frac{1 + 2K_0}{3} \times \left[\delta + \int_0^{h_i} \left\{ \gamma_s \frac{1}{1 + e(z)} + \gamma_w \frac{e(z)}{1 + e(z)} \right\} - \gamma_w \right] dz \quad (A-2.1)$$

ここに、 γ_s : 土粒子の単位体積重量、 γ_w : 水の単位体積重量および $e(z) : z = z$ での間隙比である。また、 N_0 は見かけの一次元圧縮曲線の切片であり、異方性の無い状態にある繰返し正規圧密土の等方正規圧密線(NCL)の切片 N 、傾き $\tilde{\lambda}$ および膨潤線の傾き $\tilde{\kappa}$ を用いて、以下の式で表される。

$$N_0 = N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left[\frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2}{M^2} \frac{R^*}{R_0} \right] \quad (A-2.2)$$

(1) 地盤の間隙比を未知数とする場合

式(A-2.1)において $e(z)$ を h_i について微分すると、

$$\frac{de}{dh_i} = -\tilde{\lambda} \frac{1 + 2K_0}{3} \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e(h_i)} \exp \left(\frac{e(h_i) + 1 - N_0}{\tilde{\lambda}} \right) \quad (A-2.3)$$

が得られる。ここで $h_i = 0$ とおくと

$$e(0) = N_0 - 1 - \tilde{\lambda} \ln \frac{1 + 2K_0}{3} \delta \quad (A-2.4)$$

となり、地表面における間隙比が求まる。これにより、

Newton-Raphson法を用いて $e(0)$ より深さ方向に計算し、深さ h_i の Gauss 点の $e(h_i)$ を決定する。

(2) 地盤の過圧密比を未知数とする場合

式(A-2.1)に基づいて、地表面($z=0$)から、既知の $e(z)$ の分布を積分して求めた N_0 を式(A-2.2)に代入し、これを R_0 について解けばよい。すなわち、

$$R_0 = \frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2}{M^2} R^* \exp \left(\frac{N_0 - N}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \right) \quad (A-2.5)$$

を求めればよい。

なお、 $z = h_i$ での有効鉛直圧 σ_v' は式(A-2.1)または式(A-2.2)で自明だが、次式で与えられる。

$$\sigma_v' = \delta + (\gamma_s - \gamma_w) \int_0^{h_i} \frac{dz}{1 + e(z)} \quad (A-2.6)$$

A3 水～土連成問題の支配方程式に見る有限変形計算と微小変形計算の相違

A3.1 力のつりあい式

構成式を増分型で与えるため、力のつりあい式も速度型で書く必要が生じる。以下では、飽和土の任意の領域 v に対して、準静的な問題でしかも、自重(物体力)を考慮した速度型の力のつりあい式を次式で表す。なお、微小変形理論において有限変形理論と相違する部分について項目ごとに添書する。

$$\left(\int \text{div } T dv \right) + \left(\int \rho b dv \right) = \int \text{div } \dot{S}_i dv + \rho_w \left(\int \text{tr } D dv \right) b = 0 \quad (A-3.1)$$

公称応力速度テンソル $\dot{S}_i$ は Yatomi et al^{11), 12)} の表記法に従い、次式で定義される。なお、微小変形理論においては右辺第2項は考慮しない。

$$\dot{S}_i = \dot{T} + (\text{tr } D) T - T L^T \quad (A-3.2)$$

ここに、

T : Cauchy(全)応力(引張を正)

$\rho = n\rho_w + (1-n)\rho_s$: 土の密度

$n = e/(1+e)$: 間隙率

e : 間隙比

ρ_w : 水の密度(均質で時間に対して一定)

$\rho_s = G_s \rho_w$: 土骨格の密度(均質で時間に対して一定)

G_s : 土骨格の比重

b : 重力作用方向に重力加速度 g を持つベクトル

L : 土骨格の速度勾配テンソル(式(A-3.2))

D : 土骨格のストレッチングテンソル(L の対称成分)

である。この式の誘導に際しては、左辺の物質時間微分を施す前に、Gaussの定理と、Nansonの式を利用している。また式中の上付き記号“ $\cdot$ ”は物質時間微分を、記号“ T ”は転置作用素を表す。なお、微小変形理論においては式(A-3.1)の右辺第2項と式(A-3.2)の右辺第2項および第3項は考慮しない。

A3.2 有効応力原理

I を等方テンソルとして、全応力(テンソル) T を次式のように、2項に分ける。

$$T = T' - uI \quad (A-3.3)$$

ここに、 T' は有効応力テンソルで、 u は間隙水压を表し、全応力 T と有効応力 T' は引張側を正に、間隙水压 u は圧縮側を正にとる。

A3.3 土骨格の構成式

土骨格の構成式は客観性のある有効応力速度 $\dot{T}'$ と土骨格のストレッチング D を用いて速度型の D に関する線形則で与える。なお、微小変形理論の場合は、 D のかわりにひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ で与えられる。

$$\dot{T}' = L[D] \quad (A-3.4)$$

ここで、 $\dot{T}'$ は次式に示す客観性を有する Green-Naghdi の有効応力速度¹⁰⁾である。

$$\dot{T}' = \dot{T}' + T'\Omega - \Omega T', \quad \Omega = \dot{R}R^T \quad (A-3.5)$$

なお、 Ω は土骨格の変形勾配を極分解して得られる回転テンソル R を用いて表される量である。なお、微小変形の場合は式(A-3.5)の項 Ω を無視するとともに、式(A-3.4)および以下においては、 D の代わりにひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ で与える。

A3.4 適合条件式

ここでは、ストレッチングテンソル D に課せられる制約条件のかわりに、速度勾配テンソル L の定義を示しておく。

$$L = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (A-3.6)$$

ここに、 x および v はそれぞれ、土骨格の物質点 X の現配置での位置ベクトルと変位速度ベクトルである。

A3.5 水～土連成式

式(A-3.2)により場の未知数が1つ増えるが、次の2式を連立させてこれを補う。

a) 水～土骨格2相系の連続条件式

間隙水の非圧縮性を仮定し、「毎時の土骨格の圧縮・膨張量」は「毎時の土骨格に出入りする水の量」に等しいとして次式を得る。

$$\left(\int dv \right)' = \int \text{tr } D dv = - \int v' \cdot n da \quad (A-3.7)$$

ここに、 v' は平均的な水の流速ベクトルで、 n は土骨格の体積 v の表面境界 da ($a = \partial v$)に立てた外向き単位法線ベクトルである。

b) ダルシー則

平均的な水の流速ベクトル v' は次式に示すダルシー則により決まる。

$$v' = -k \frac{\partial h}{\partial x} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{u}{\gamma_w} \right) \quad (A-3.8)$$

ここに、 k は透水係数(一定のスカラー)、 h は全水頭、 z は位置水頭、 u/γ_w は圧力水頭、 $\gamma_w (= \rho_w g)$ は水の単位体積重量である。

A3.6 境界条件

水～土骨格連成系では対象とする物体(土塊)の境界($\Gamma = \partial v$)に対して、次式に示すように2種類の境界条件が与えられる。

$$\Gamma = \Gamma_v + \Gamma_t = \Gamma_q + \Gamma_h (= \partial v) \quad (A-3.9)$$

ひとつは、土骨格に関する境界で、境界($\Gamma = \partial v$)を土骨格の変位速度境界 Γ_v と表面力境界 Γ_t に分けて与えるものと、もうひとつは、水に関する境界で、境界($\Gamma = \partial v$)を間隙水の流量境界 Γ_q と水圧(あるいは水頭)境界 Γ_h に分けてあたえるものである。以下に、表面力境界 Γ_t と間隙水の流量境界 Γ_q での境界条件について説明する。

a) 表面力境界 Γ_t

一般に、表面力ベクトル t が与えられた時、表面力境界 Γ_t での境界条件として、

$$\dot{s}_t da = (t da)' = \dot{t} da + \{(\text{tr } D) - n \cdot Dn\} t da \quad \text{on } \Gamma_t \quad (A-3.10)$$

が成り立ち、 $\dot{s}_t$ は公称応力速度ベクトル¹²⁾と呼ばれる。

なお、微小変形理論では右辺第2項は考慮しない。

本論文の計算では、載荷速度 $\dot{q}$ で分布荷重が作用する部分の境界条件は次のように処理した。すなわち、表面力

境界 Γ_t での公称応力速度 $\dot{s}_t$ は

$$\dot{s}_t da = (\dot{t} da) = (\dot{\Pi} N dA) = \dot{\Pi} N dA \text{ on } \Gamma_t \quad (\text{A-3.11})$$

であるので, $\dot{\Pi} = \dot{q} I$ ($\dot{q}$ =一定)として与えた. また, 分布荷重が作用しない部分では $\dot{\Pi} = 0$ とした. ここに,
 N, n : 基準配置, 現配置での単位外向き法線ベクトル
 dA, da : 基準配置, 現配置での微小面積
 Π : Piola-Kirchhoff 応力テンソル

b) 間隙水の流量境界 Γ_q

間隙水の流量境界 Γ_q での間隙水の流量 q' は次式で表される.

$$q' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (\text{A-3.12})$$

例えば, 非排水境界であれば, 上式において流量

$q' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = 0$ として境界条件 Γ_q を与える. また, 境界を水圧 $\bar{u}$ で与えるならば, $u = \bar{u}$ on Γ_u となる.

A3 追加盛土の表面力の計算方法

表面力は有限要素における表面の節点力として次式で与える.

$$\int_{\Omega} [N]^T \{t\} da = \int_{\Omega} [B]^T \{T\} dv - \int_{\Omega} \rho [N]^T \{b\} dv \quad (\text{A-4.1})$$

なお, $[N]$ および $[B]$ は節点の変位を要素内の変位およびひずみに変換する N マトリクスおよび B マトリクスである. また $\{t\}$, $\{T\}$ および $\{b\}$ は, 表面力の(全)応力テンソルおよび物体力の各成分の行列表現である.

(2006 年 4 月 13 日受付)