

## 拡張下負荷面・下負荷面摩擦モデルを用いた繰返し摩擦現象の数値解析

Cyclic Friction Phenomena analyzed by Extended Subloading Surface and Subloading Friction Models

矢嶋泰基\*, 堤成一郎\*\*, 豊貞雅宏\*\*\*, 尾崎伸吾\*\*\*\*, 橋口公一\*\*\*\*\*

Daiki Yajima, Seiichiro Tsutsumi, Masahiro Toyosada, Shingo Ozaki, Koichi Hashiguchi

\*修士, 九州大学大学院 工学府海洋システム工学部門, 博士課程 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6丁目10番1号)

\*\*農博, 九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門, 助手 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6丁目10番1号)

\*\*\*工博, 九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門, 教授 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6丁目10番1号)

\*\*\*\*農博, 東京理科大学工学部機械工学科, 助手 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3)

\*\*\*\*\*工博・農博, 九州大学農学研究院, 名誉教授 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)

In order to simulate the elasto-plastic friction phenomenon caused by cyclic load between two contact bodies, extended subloading surface and subloading friction models are introduced. The former model is able to express an accumulation of plastic strain induced by cyclic stress under the yield stress, and the latter is able to describe a sliding displacement by the repeated tangential traction less than the limit friction stress defined by Coulomb's friction rule, since these models incorporate the concept of the subloading surface. By applying these models to the finite element method, the responses in cyclic stress and friction problems of metal-to-metal are examined.

**Key Words:** *Extended subloading surface model, Subloading friction model, cyclic friction*

キーワード: 拡張下負荷面モデル, 下負荷面摩擦モデル, 繰返し摩擦現象

### 1. はじめに

二物体間で生じる接触問題において, 物体自体の変形および接触面での摩擦すべりなどの力学的現象を詳細に把握することは極めて重要である. さらに, 繰返し荷重条件下にある物体の変形や接触面でのすべり摩擦現象などの予測も要求される. しかし, 物体に降伏応力以下に相当する荷重が繰返し作用するときであっても, その物体に塑性ひずみが徐々に集積する<sup>1)</sup>こと, また同様に接触面に限界摩擦力以下の接触力が繰返し作用するときであっても, 接触する二物体間において相対変位が徐々に進展することが知られている<sup>2)</sup>. これらの現象は, 降伏応力以下および限界摩擦力以下での力学応答を, すべて弾性応答であると仮定した構成式では表現することが不可能である. 一方, 繰返し荷重によって材料に生じる塑性ひずみの集積の表現を目的とした構成式として, 多面モデル<sup>3)</sup>, 2面モデル<sup>4)</sup>, 初期下負荷面モデル<sup>5)</sup>, 拡張下負荷面モデル<sup>6)</sup>などが提案されている. また, 摩擦現象に対しては, すべり速度と相対変位速度を剛塑性<sup>7),8)</sup>, 弾完全塑性<sup>9),10)</sup>, 弾塑性<sup>11)-13)</sup>型として関係づけた構成式が提案されている. なお, 繰返し摩擦現象へ適用可能な構成式<sup>15),16)</sup>が近年提案されている. しかし, 降伏応力および限界摩擦力以下の微小な荷重により, 徐々に集積され

る塑性ひずみや塑性すべりの予測に適用可能な数値解析手法は確立されていない.

本研究では, 材料の繰返し荷重挙動の表現を目的に提案された拡張下負荷面モデルと, 二物体間の接触面で生じる繰返しすべり摩擦現象を表現するために提案された下負荷面摩擦モデルを導入した有限要素解析プログラムを開発することを目的とし, 両モデルの応答特性について検討を行う. 前者は初期下負荷面モデルで問題とされていた降伏面内での塑性変形の過大評価に対して, 相似中心の概念を導入することにより, 降伏面内での塑性変形の抑制を可能とするものである. 後者はCoulomb則に基づく古典摩擦モデルに, 下負荷面の概念を導入することで, 限界摩擦力以下の接触力によって生じる塑性すべりの表現を可能としたものである. これにより, 振動などによる微小な接触力が繰返し作用する時に生じる塑性すべりの評価が可能になると考えられる. 上記の両モデルを用いた数値解析を行い, 二物体間の繰返し荷重現象への応答特性について考察を行った.

### 2. 材料構成式

本研究で採用した拡張下負荷面モデル<sup>6)</sup>は, 古典弾塑性構成式では純粋弾性域と仮定される降伏面内での塑性

変形を許容することで、より現実的な単調ならびに繰返し負荷挙動の予測が可能である。以下に、その基本式ならびに材料関数について概説する。

## 2.1 拡張下負荷面モデルの定式化

ストレッチング  $\mathbf{D}$  (速度勾配  $\mathbf{L}$  の対称部分すなわち  $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ ,  $(\ )^T$  は転置を表わす) は、弾性ストレッチング  $\mathbf{D}^e$  と塑性ストレッチング  $\mathbf{D}^p$  の和で表されたとする。つまり、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (1)$$

また、弾性ストレッチングは次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力、 $(\dot{\ })$  は共回転速度を表わす。  $\mathbf{E}$  は Hooke 則型の弾性係数テンソルとして次式で与えられる。

$$E_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3)$$

ここに、 $\nu$  および  $E$  はそれぞれポアソン比およびヤング率を示し、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ、つまり  $i=j: \delta_{ij}=1, i \neq j: \delta_{ij}=0$  である。

降伏条件として次式を与える。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_Y) = F(H) \quad (4)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_Y = \boldsymbol{\sigma}_Y - \boldsymbol{\alpha}, \quad (5)$$

$H$  は等方硬化変数であり、 $\boldsymbol{\alpha}$  は降伏面上あるいは内部の特定点を表わし、 $\boldsymbol{\alpha}$  の値が変化することにより、移動硬化が表される。また、降伏面内部は純粋弾性域と仮定せず、従来の降伏面を正規降伏面と称す。

いま、常に現応力  $\boldsymbol{\sigma}$  を通り正規降伏面と相似形を保ちながら膨張、収縮する下負荷面を導入する (図 1 参照)。正規降伏面と下負荷面の大きさの比を  $R$ 、それら 2 つの面の相似の中心を  $\mathbf{s}$  とすると次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\sigma}_Y = \frac{1}{R} \{ \boldsymbol{\sigma} - (1-R)\mathbf{s} \}, \quad \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s} = R(\boldsymbol{\sigma}_Y - \mathbf{s}), \quad (6)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}_Y$  は現応力  $\boldsymbol{\sigma}$  の正規降伏面上の共役応力として表される。

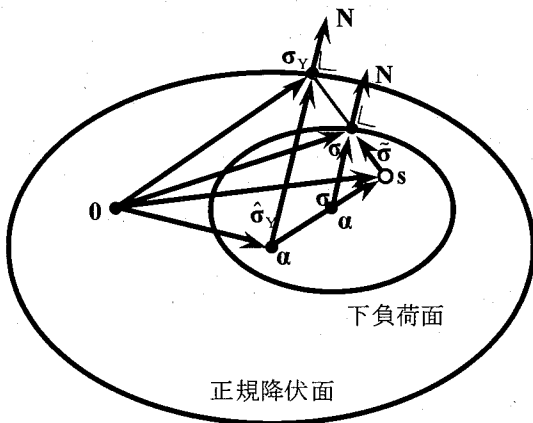


図 1. 正規降伏面と下負荷面

式 (6) を式 (4) に代入することにより、下負荷面が次式で表される。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = RF(H), \quad (7)$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} (= R\hat{\boldsymbol{\sigma}}_Y), \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{s} - R\hat{\mathbf{s}}, \quad \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}, \quad (8)$$

$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  は正規降伏面に関する特定点  $\boldsymbol{\alpha}$  の下負荷面に対する共役点である。

また、相似中心の移動則として次式を与える。

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = c \parallel \mathbf{D}^p \parallel \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \frac{F'}{F} \hat{\mathbf{s}}, \quad (9)$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}, \quad (10)$$

$c$  は材料定数、 $F$  は正規降伏面の大きさ、 $(\dot{\ })$  は物質時間微分を表わす。

式 (7) の物質時間微分は次式で与えられる。

$$\text{tr} \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right) = \dot{R} F + R \dot{F}, \quad (11)$$

ここに、 $\text{tr}(\ )$  は対角和を表わす。

下負荷面が塑性負荷とともに膨張すると仮定して  $\dot{R}$  を次式で与える。

$$\dot{R} = U \parallel \mathbf{D}^p \parallel \quad (\mathbf{D}^p \neq 0), \quad (12)$$

ここに、 $U$  は次の条件を満たす単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} R=0: U &= +\infty, \\ R=1: U &= 0, \\ (R>1: U &< 0). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

関数  $U$  として次式を採用する。

$$U = -u \ln R, \quad (14)$$

ここに、 $u$  は材料定数を表わす。

次の関連流動則を仮定する。

$$\mathbf{D}^p = \lambda \bar{\mathbf{N}}, \quad (15)$$

ここに、 $\lambda$  は正值の比例係数である。  $\bar{\mathbf{N}}$  は下負荷面の正規化された外向き法線テンソルとして次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \parallel \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \parallel \quad (\parallel \bar{\mathbf{N}} \parallel = 1), \quad (16)$$

式 (11) に式 (9) および (12) を代入したものに式 (15) を適用すると、 $\lambda$  が次式のように求められる。

$$\lambda = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}})}{\bar{M}_p}, \quad (17)$$

ここに、

$$\bar{M}_p \equiv \text{tr} \left[ \bar{\mathbf{N}} \left\{ \left( \frac{F'}{F} h + \frac{U_R}{R} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right\} \right], \quad (18)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}}{\lambda} = (1-R)Z - U\hat{\mathbf{s}}, \quad (19)$$

$$Z \equiv \frac{\dot{\hat{\mathbf{s}}}}{\lambda} = -c\bar{\boldsymbol{\sigma}} \ln R + \frac{F'}{F} h\hat{\mathbf{s}}, \quad (20)$$

$$\dot{F} \equiv F' \dot{H} = \frac{dF}{dH} \dot{H}, \quad (21)$$

$$h \equiv \frac{\dot{H}}{\lambda}. \quad (22)$$

式 (1), (2), (15) および (17) から次式が得られる.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{M_p} \bar{\mathbf{N}}. \quad (23)$$

さらに, 式 (23) の逆関係として, ストレッチングを用いて次式のように表される.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C^{\text{ep}} \mathbf{D} = \left( \mathbf{E} - \frac{\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{N}}}{M_p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}})} \right) \mathbf{D}, \quad (24)$$

ここに,  $C^{\text{ep}}$  は弾塑性剛性係数を表わし,  $\otimes$  はテンソル積を示す.

負荷基準として次式を採用する.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p \neq 0: \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D}) > 0, \\ \mathbf{D}^p = 0: \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D}) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

## 2.2 金属材料への適用

金属材料に対して, 等方・移動硬化をもつ Mises 型の降伏面を採用し, 下負荷面式を次式で与える.

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\|, \quad (26)$$

ここに,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_m \mathbf{I}, \quad (27)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (28)$$

$\mathbf{I}$  は恒等テンソルである.

また, 等方硬化関数を次式で与える.

$$F(H) = F_0 [1 + h_1 \{1 - \exp(-h_2 H)\}], \quad (29)$$

ここに,  $F_0$  は初期降伏面の大きさであり,  $h_1$  および  $h_2$  は材料定数である.

また, 移動硬化を表わす  $\boldsymbol{\alpha}$  の発展則として次式を採用する.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{a} \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{D}^p), \quad (30)$$

$$\mathbf{a} = a_1 \left( a_2 \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\|} - \boldsymbol{\alpha} \right), \quad (31)$$

ここに,  $a_1$  および  $a_2$  は材料定数である.

## 3. 摩擦構成式

本研究で採用した下負荷面摩擦モデルは, 古典摩擦モデルに下負荷面の概念を導入することで, 単調ならびに繰返し摩擦すべり挙動の表現を可能としている. 以下に, その基本式ならびに材料関数について概説する.

### 3.1 下負荷面摩擦モデルの定式化

接触物体間の相対速度  $\bar{\mathbf{v}}$  は, 接触境界の法線成分  $\bar{\mathbf{v}}_n$  と接線成分  $\bar{\mathbf{v}}_t$  に加算分解されるとする. つまり

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t, \quad (32)$$

なお, これらの成分は次のように表し得る.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}}, \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに,  $\mathbf{n}$  は接触面の単位法線ベクトル,  $(\cdot)$  はスカラー積を示す. さらに,  $\bar{\mathbf{v}}_n$  および  $\bar{\mathbf{v}}_t$  は次のように, 弾性部分と塑性部分に加算分解されると仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p, \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここに, 弾性部分は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_n &= -\alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n^e, \\ \dot{\mathbf{f}}_t &= -\alpha_t \bar{\mathbf{v}}_t^e, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$\mathbf{f}_n$  および  $\mathbf{f}_t$  は, 表面ベクトル  $\mathbf{f}$  (接触表面の単位面積当たりの接触力) の法線および接線成分であり, また,  $\alpha_n$  および  $\alpha_t$  は接触面の法線および接線方向の弾性係数である. したがって, 次式が成り立つ.

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e, \quad (36)$$

ここに,  $\mathbf{C}^e$  は物体接触に関する弾性係数テンソルであり, 式 (33), (35) により次式で与えられる.

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{C}_n^e + \mathbf{C}_t^e, \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_n^e &= -\alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \\ \mathbf{C}_t^e &= -\alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

摩擦条件式として次式を与える.

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \bar{F}(\bar{H}), \quad (39)$$

ここに,  $\bar{H}$  はすべりに伴う摩擦条件の変化を表わすためのスカラー変数である. 以後, この摩擦条件で表される接触力平面 ( $\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|$ ) における摩擦面の内部は弾性域ではなく, その内部の接触力の変化によっても塑性的相対すべりが生じると仮定する. これにより, 式 (39) で表される曲面を正規摩擦面と称する.

次に, 下負荷面の概念を導入することで, 接触力平面 ( $\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|$ ) において, 常に現摩擦力点を通して, 正規摩擦面と相似な下摩擦面を仮定する. 下負荷面モデルと同様に正規摩擦面と下摩擦面の大きさの比  $\bar{R}$  で表し, これを正規摩擦比と称する. よって下摩擦面は次式で表される.

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \bar{R} \bar{F}(\bar{H}). \quad (40)$$

下摩擦面式の物質時間微分は次式で与えられる.

$$N_f \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + T_f \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t = \bar{R} \dot{\bar{F}} + \bar{R} \dot{\bar{F}}, \quad (41)$$

ここに,

$$N_f = \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|}, \quad T_f = \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}, \quad (42)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|}. \quad (43)$$

ここで, 塑性相対速度が生じるとき正規摩擦比は増大すると仮定する. つまり,

$$\dot{\bar{R}} = \bar{U} \|\mathbf{v}^p\| \quad \text{for } \mathbf{v}^p \neq 0, \quad (44)$$

ここに、 $\bar{U}$  は次の条件を満たす単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} = 0: \bar{U} = +\infty, \\ \bar{R} = 1: \bar{U} = 0, \\ (\bar{R} > 1: \bar{U} < 0). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

式 (14) と同様に、関数  $\bar{U}$  に関して次式を仮定する。

$$\bar{U} = -\bar{u} \ln \bar{R}, \quad (46)$$

ここに、 $\bar{u}$  は材料定数を表わす。

式 (43) を (41) に代入して、次の適応条件を得る。

$$N_f \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + T_f \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t = \bar{U} \|\mathbf{v}^p\| \bar{F} + \bar{R} \dot{\bar{F}}. \quad (47)$$

いま、次の摩擦流動則を仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \bar{\lambda} \mathbf{p} \quad (\bar{\lambda} > 0, \|\mathbf{p}\| = 1), \quad (48)$$

ここに、 $\bar{\lambda}$  は正值の比例係数、 $\mathbf{p}$  は単位ベクトルである。

式 (47) を (46) に代入して、 $\bar{\lambda}$  は次式で与えられる。

$$\bar{\lambda} = \frac{N_f \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + T_f \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t}{\bar{U} \bar{F} + \bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h}}, \quad (49)$$

ここに、 $\bar{h}$  は、 $\bar{H}$  および  $\mathbf{p}$  (1次) の関数であり、 $\dot{\bar{H}}$  に対して次式で関係づけられる。

$$\bar{h} = \frac{\dot{\bar{H}}}{\lambda}. \quad (50)$$

式 (32), (34), (35), (47) および (48) から相対速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= (\bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p) + (\bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \dot{\mathbf{f}}_n + \bar{\lambda} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}}_t + \bar{\lambda} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \dot{\mathbf{f}}_n + \frac{N_f \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + T_f \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t}{\bar{U} \bar{F} + \bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}}_t + \frac{N_f \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + T_f \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t}{\bar{U} \bar{F} + \bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (51)$$

これにより、正值の比例係数  $\bar{\lambda}$  を相対速度で表したものを  $A$  と記せば、次式で与えられる。

$$A = \frac{(\alpha_n N_f \mathbf{n} + \alpha_t T_f \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}}{\bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h} + \bar{U} \bar{F} - \alpha_n N_f (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) + \alpha_t T_f (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t})}. \quad (52)$$

よって、接触力の変化速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \alpha_n (\bar{\mathbf{v}}_n - \bar{\mathbf{v}}_n^p) + \alpha_t (\bar{\mathbf{v}}_t - \bar{\mathbf{v}}_t^p) \\ &= \alpha_n \{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} - A (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}\} + \alpha_t \{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} - A (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}\} \\ &= C^f \bar{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (53)$$

ここに、 $C^f$  は摩擦剛性係数であり、次式で表される。

$$C^f = [\alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\{\alpha_n (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}\} \otimes (\alpha_n N_f \mathbf{n} + \alpha_t T_f \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}}{\bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h} + \bar{U} \bar{F} - \alpha_n N_f (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) + \alpha_t T_f (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t})}]. \quad (54)$$

また、 $\mathbf{p} = -\mathbf{t}$  の場合、式 (53) は次式となる。

$$C^f = [\alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} (\alpha_n N_f \mathbf{n} + \alpha_t T_f \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}}{\bar{R} \dot{\bar{F}} \bar{h} + \bar{U} \bar{F} + \alpha_t T_f}]. \quad (55)$$

さらに、式 (55) は  $\bar{F} = \text{const}$  の場合、次式となる。

$$C^f = [\alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} (\alpha_n N_f \mathbf{n} + \alpha_t T_f \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}}{\bar{U} \bar{F} + \alpha_t T_f}]. \quad (56)$$

これらの条件式  $\mathbf{p} = -\mathbf{t}, \bar{F} = \text{const}$  は、接触物体の間隔、摩擦特性が変化しない場合に成り立つ。

塑性相対速度の負荷基準は、比例係数  $A$  の正值性により次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^p \neq 0: A > 0, \\ \bar{\mathbf{v}}^p = 0: A \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

### 3.2 摩擦面の具体形

剛体の押し込みやプレス加工のように、法線方向から力を与える場合でも剛体と材料の接触面では接線方向のすべりが観察される。このことから、塑性相対速度は、接線方向接触力のみならず法線方向接触力によっても生じると考えられる。したがって、正規摩擦面は、接触力平面 ( $\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|$ ) において、一般に Coulomb 則のような直線ではなく、曲線を呈すると考えられる。そこで、先に定式化を行った摩擦条件式の具体形として、次式のような涙形の曲面を採用する (図2参照)。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \|\mathbf{f}_n\| \exp\left(\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (58)$$

ここに、

$$\chi = \eta / M, \quad \eta = \|\mathbf{f}_n\| / \|\mathbf{f}_t\|, \quad (59)$$

$M$  は摩擦特性に基づく定数である。

式 (3.26) に対して、

$$\left. \begin{aligned} N_f &= (1 - \chi^2) \exp\left(\frac{\chi^2}{2}\right), \\ T_f &= \frac{\chi}{M} \exp\left(\frac{\chi^2}{2}\right), \\ T_f / N_f &= \frac{\chi}{M(1 - \chi^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

であり、次式が成り立つ。 ( $\mathbf{p} = \mathbf{t}, \bar{F} = \text{const}$  の場合)

$$\dot{\mathbf{f}} = \left[ \alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \frac{\alpha_t \mathbf{t} (\alpha_n (1 - \chi^2) \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\chi}{M} \mathbf{t})}{\frac{\bar{U} \bar{F}}{\exp(\chi^2/2)} + \alpha_t \frac{\chi}{M}} \right] \bar{\mathbf{v}}. \quad (61)$$

Coulomb の摩擦則においては、摩擦角と粘着力により、接触面上の法線方向と接線方向の接触力を線形に関係づけるが、以上においては、材料定数を増やすことなく ( $M$  と  $\bar{F}$  の2個)、接触面上の法線方向接触力の増大とともに接線方向接触力の増大が鈍る非線形性を表現することが可能である。

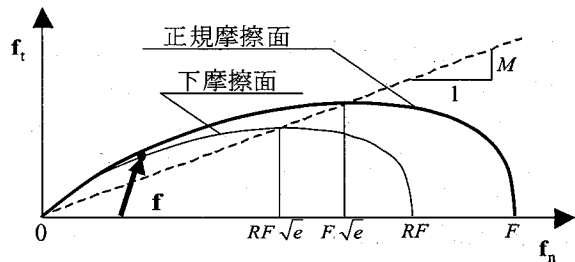


図2. 正規摩擦面と下摩擦面

#### 4. 有限要素法への適用

本研究では、先に概説した両モデルを有限要素法に導入し、数値解析を行った。ここでは有限要素法の支配方程式を具体的に示す。導出は準静的条件を仮定し、微小変形理論に基づいている。さらに、本解析の計算の流れについて概説する。

##### 4.1 支配方程式

ある任意の物体の力が釣合っているとする。この時の力の釣合い式は次式で与えられる。

$$\int_{r_i} \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = \left( \int_V \rho \mathbf{v} dV \right) \dot{\mathbf{v}}, \quad (62)$$

ここに、 $\mathbf{t}$ は表面力ベクトル、 $dS$ は微小面積要素、 $\rho$ は物体の密度、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル、 $\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 $dV$ は微小体積要素である。また、 $r_i$ は表面力速度境界を表わす。式(62)は、準静的な条件を仮定して解析を行うことから、加速度ベクトルを無視し、次式のように表わされる。

$$\int_{r_i} \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (63)$$

さらに、表面力ベクトル $\mathbf{t}$ は真応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ の法線方向成分で表されることから、次式のように表わされる。

$$\int_{r_i} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (64)$$

式(64)にガウスの発散定理を適用すると次式のように表わされる。

$$\int_V (\text{div } \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{b}) dV = 0. \quad (65)$$

式(65)の物質時間微分を行う。ここで物体力ベクトル $\mathbf{b}$ は変形に伴い変化しないと仮定することで、次式で表される速度形の力の釣合い式を得る。

$$\int_V \text{div } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T dV = 0. \quad (66)$$

また、連続体力学では、物体にいかなる変形が生じても亀裂などを生じず、連続体力学では材料を構成する物質点は常に連続性が保証される。すなわち、変位速度と速度勾配 $\mathbf{L}$ について次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (67)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は物質点の位置ベクトル、 $\mathbf{v}$ は物質点の速度ベクトルをあらわす。

以上、式(66)、式(67)と式(24)、式(53)が有限要素法の支配方程式となる。

##### 4.2 速度形の仮想仕事の原理式

式(66)に仮想変位速度 $\delta \mathbf{v}$ を乗じ、部分積分およびガウスの発散定理を適用することで次式を得る。

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} \delta \mathbf{D} dV = \int_{r_i} \dot{\mathbf{i}} \delta \mathbf{v} dS. \quad (68)$$

さらに、接触力速度境界 $r_c$ において速度形の仮想仕事の原理式は次式のように表わされる。

$$\delta \dot{W}^c = - \int_{r_c} \dot{\mathbf{f}} \delta \mathbf{v} dS. \quad (69)$$

ここに、 $W^c$ は接触力による仮想仕事を表わす。式(68)と(69)から速度形の仮想仕事の原理式は次式のように得られる。

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} \delta \mathbf{D} dV = \int_{r_i} \dot{\mathbf{i}} \delta \mathbf{v} dS - \int_{r_c} \dot{\mathbf{f}} \delta \mathbf{v} dS. \quad (70)$$

式(70)を有限離散化することで全体剛性方程式として次式が得られる。

$$[\mathbf{K}] \{du\} = \{dF\} + \{dF^c\}, \quad (71)$$

ここに、 $[\mathbf{K}]$ は要素剛性マトリクス、 $\{du\}$ 、 $\{dF\}$ および $\{dF^c\}$ は節点変位、節点力および節点接触力増分ベクトルを表わす。さらに、 $\{dF^c\} = [\mathbf{K}] \{du^m\} - [\mathbf{K}^f] \{du\}$ を考慮すると式(71)は次式で表わされる。

$$([\mathbf{K}] - [\mathbf{K}^f]) \{du\} = \{dF\} - [\mathbf{K}^f] \{du^m\}, \quad (72)$$

ここに、 $[\mathbf{K}^f]$ は要素摩擦剛性マトリクス、 $\{du^m\}$ は接触物体において完全固着状態を仮定した時の変位増分ベクトルを表わす。

##### 4.3 有限要素法の計算の流れ

図3に本研究で用いた解析の流れを示す。図のように、まず境界条件、材料定数および初期値、初期増分を入力値として与える。その値から要素剛性マトリクスが作成され全体剛性マトリクスが作成される。作成された剛性方程式を解く過程において、式(25)で与えられる弾塑性計算判定が行なわれる。判定が弾性計算なら、要素剛性マトリクスを弾性係数のみで作成し直す。剛性方程式を解いたのち、算出した応力増分の値について、次式の収束判定が行なわれる。

$$\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^{i+1} - \boldsymbol{\sigma}^i\|}{\|\boldsymbol{\sigma}^{i+1}\|} \leq 1 \times 10^{-4}. \quad (73)$$

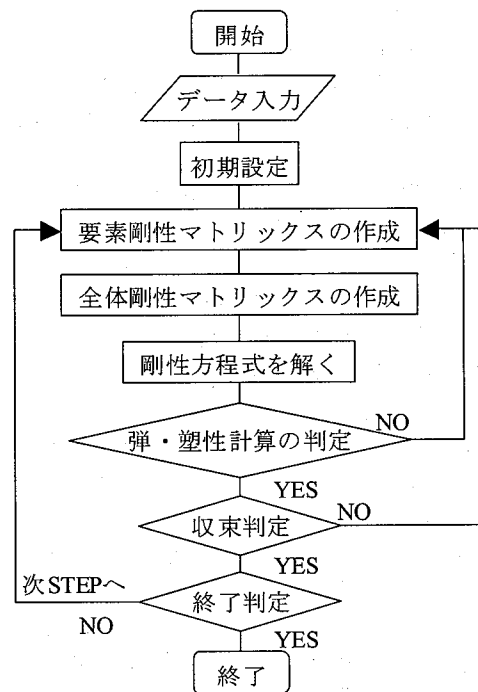


図3. 本解析の流れ

## 5. 繰返し摩擦現象の数値解析結果および考察

### 5.1 解析のモデル化と境界条件

本解析では、図4に示すように、底面が固定された材料の上面部分に仮想剛体が接触し、その剛体に水平方向の繰返し荷重が作用する場合を仮定する。そのときに生じる材料の力学関係と接触面上で生じる摩擦すべり関係について考察する。図に示すように、境界条件として、上部2つの要素節点が仮想剛体と接触することから、この線分を摩擦境界とし、垂直方向から仮想剛体に、材料の初期降伏応力の約2/3に相当する200MPaの応力を作用させた状態で、仮想剛体が水平方向に繰返し変位するように設定している。片振りの場合は、摩擦境界上の要素節点に水平方向右向きに、接触力の水平方向成分の最大値が20MN（せん断応力200MPa）になるように強制変位を与えたのち、接触力が0MNになるまで逆方向に強制変位を与える。両振りの場合は、片振りの場合に接触力が0MNに戻った状態からさらに、接触力の水平方向成分の最高値が20MNになるまで逆方向に強制変位を与える。また、下部2つの要素節点は完全拘束とした。なお、摩擦境界に関して、材料と仮想剛体の間隔、摩擦特性が変化しないと仮定して、摩擦剛性係数は式(56)を採用した。表1に拡張下負荷面モデルに導入した材料物性値および下負荷面摩擦モデルに導入した摩擦物性値を示す。

### 5.2 材料応答特性の比較

材料構成モデルの力学的応答を確認するために、先に記した境界条件から材料と仮想剛体を完全に固定し、単調ならびに繰返しせん断力を作用させた解析を行う。

図5に材料構成モデルとして弾性および拡張下負荷面モデルを用いて、単調なせん断力を作用させた時の等方・移動硬化の有無によるせん断応力-ひずみ関係を示す。なお、拡張下負荷面モデルにおいては、表1に示す材料の硬化特性を決定する物性値の有無により、その応答特性を比較した。図5に示すように、弾性モデルは線形的な挙動を示し、拡張下負荷面モデルは材料硬化特性の有無により、応力の上限が異なる弾塑性荷重挙動が表現される。また、物性値を種々に変化させることで、様々な場合の弾塑性遷移が表現できる。以後の解析では等方・移動硬化両方を考慮した材料構成モデルを用いる。

図6に材料構成モデルとして弾性、初期下負荷面および拡張下負荷面モデルを用いて、繰返しせん断力を作用させた時のせん断応力-ひずみ関係を示す。本図より、弾性モデルではひずみの集積は表現されず、拡張下負荷面モデルでは、初期下負荷面モデルに比べ、ひずみの集積量が少なくなっていることがわかる。この差については、拡張下負荷面モデルでは、相似中心の導入により、繰返し荷重最中の塑性ひずみ量が抑制されるためである。

図7に相似中心の移動速度を規定する材料定数 $c$ の値

を変化させ、繰返しせん断力を作用させた時のせん断応力-ひずみ関係を示す。なお、図中の直線は同条件で降伏面内を純粋弾性域と仮定した古典モデルによる力学応答である。本図からわかるように、 $c$ の値が大きくなるにしたがって、繰返し荷重最中の塑性ひずみ量の抑制が強くなり、塑性ひずみの集積量が小さくなることわかる。

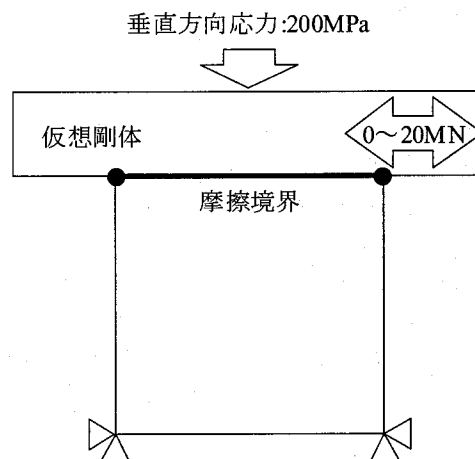


図4. モデル化と境界条件

表1. 材料・摩擦物性を表わす材料定数および初期値

材料物性値 (拡張下負荷面モデル)					
$F_0$	294MPa	$E$	206GPa	$\nu$	0.3
$u$	2000	$h_1$	0.1	$h_2$	50
$a_1$	100	$a_2$	200	$c$	50

摩擦物性値 (下負荷面摩擦モデル)			
$F$	2000MN	$\alpha_n, \alpha_t$	3000GN
$u$	10000	$M$	0.33

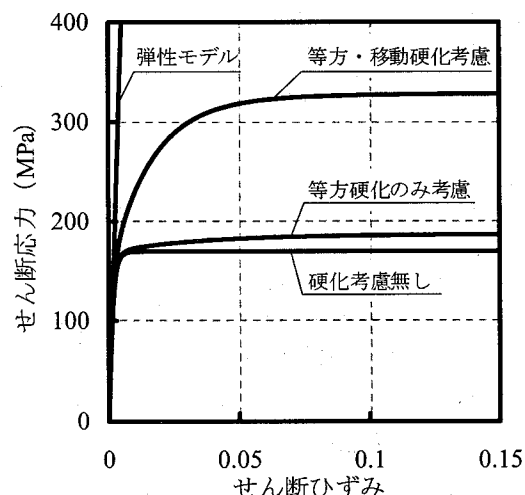


図5. 硬化則の考慮の有無によるせん断応力-せん断ひずみ関係の比較

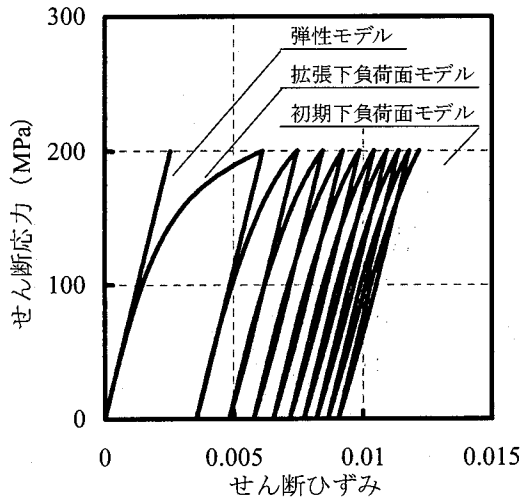


図6. 構成モデルの違いによるせん断応力—せん断ひずみ関係の比較

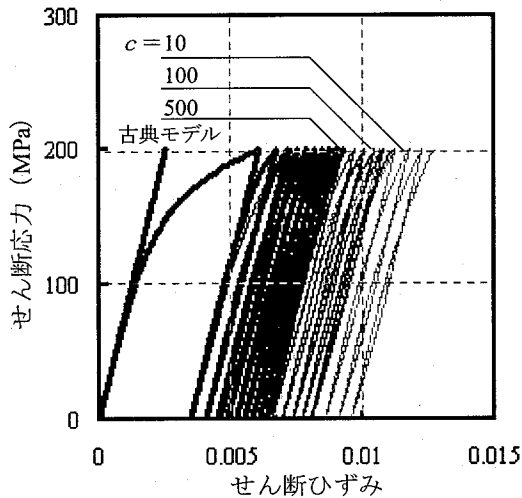


図7. 材料定数  $c$  の違いによるせん断応力—せん断ひずみ関係の比較

### 5.3 摩擦応答特性の比較

ここでは、先に記した境界条件を用いて解析を行った。また、下荷面摩擦モデルの評価を行う指標として用いる相対変位  $\Sigma\{d\bar{u}_i\}$  は接触する2物体間のすべり量を表わすことから、次式で与えられる。

$$\Sigma\{d\bar{u}_i\} = \Sigma\{du_i^m\} - \Sigma\{du_i\} \quad (74)$$

ここに、 $\Sigma\{du_i^m\}$  および  $\Sigma\{du_i\}$  は2物体が完全に固定した状態で変形した場合の変位量（仮想剛体の変位量と同じ）および実際にすべりを伴い変形した場合の変位量をそれぞれ示す（図8参照）。

図9に単調にせん断力を作用させた時の接線方向接触力—相対変位関係を示す。図からわかるように、古典摩擦モデルでは限界摩擦力に達するまで相対変位は線形的に表現されるのに対して、下荷面摩擦モデルでは限界摩擦力以下でも相対変位を表現できることから、滑らかな相対変位の遷移が得られる。また、材料定数である  $\bar{u}$  の値を種々に変化させることで、限

界摩擦力以下での塑性相対変位量を調節できる。

図10および図11に繰返しせん断力を作用させた時の両摩擦モデルによる、せん断応力—ひずみ関係および接線方向接触力—相対変位関係をそれぞれ示す。図10からわかるように、両モデルとも材料の応力—ひずみ関係については、差異が見られない。しかし、図11に示すように、古典摩擦モデルでは繰返しに伴う相対変位の集積が表現できないことがわかる。

図12および図13に両振りで繰返しせん断力を作用させた時の両摩擦モデルによる、せん断応力—ひずみ関係および接線方向接触力—相対変位関係をそれぞれ示す。両図より、前述と同様に材料の応力—ひずみ関係については、ほとんど差異はなく、古典摩擦モデルでの相対変位の集積は表現できない。また、図13より本摩擦モデルによる解析では、相対変位が左方向、つまり最初にせん断力を与えた方向とは逆方向に遷移していく様子が確認できる。このことは、相対変位と接触力の符号を逆にしてしているためであると推測される。

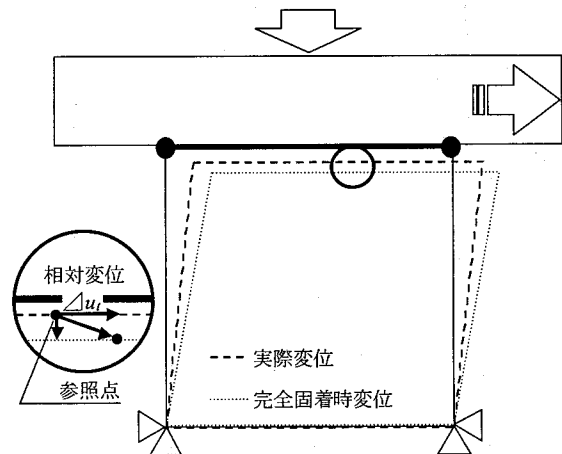


図8. 相対変位の説明図

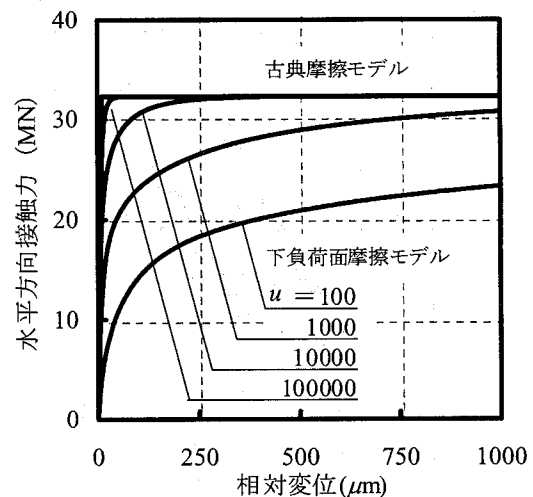


図9. 両摩擦モデルでの水平方向接触力—相対変位関係の比較

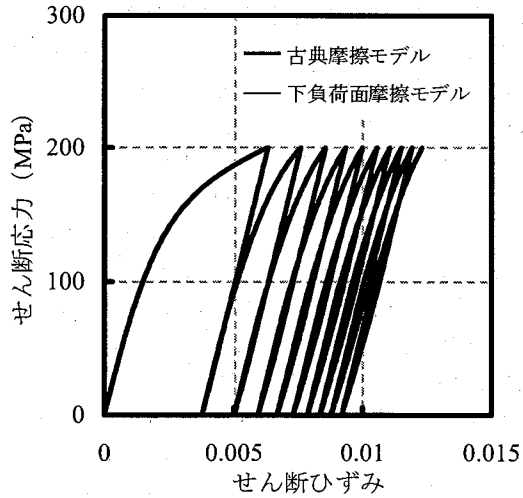


図10. 両摩擦モデルでの材料のせん断応力—せん断ひずみ関係の比較

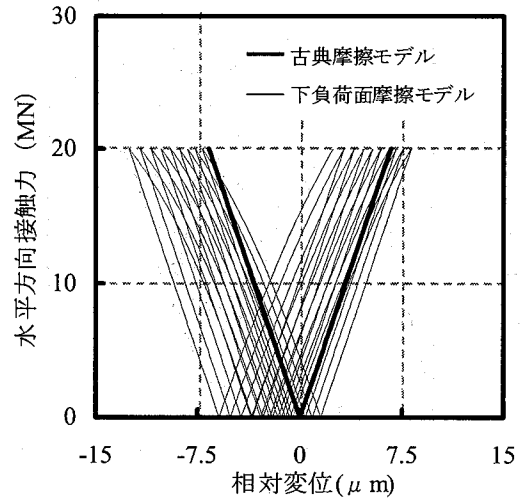


図13. 両振り時の接触面における相対変位の集積の比較

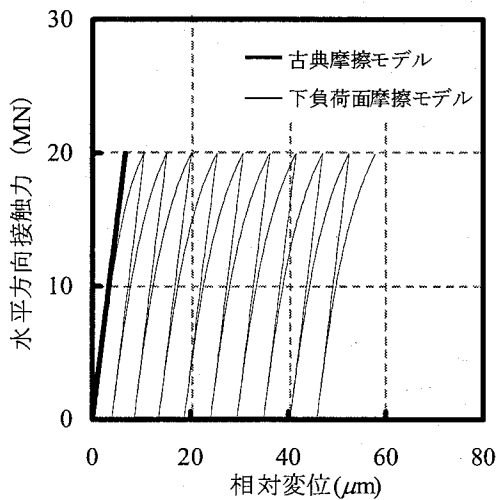


図11. 両摩擦モデルでの接触面における相対変位の集積の比較

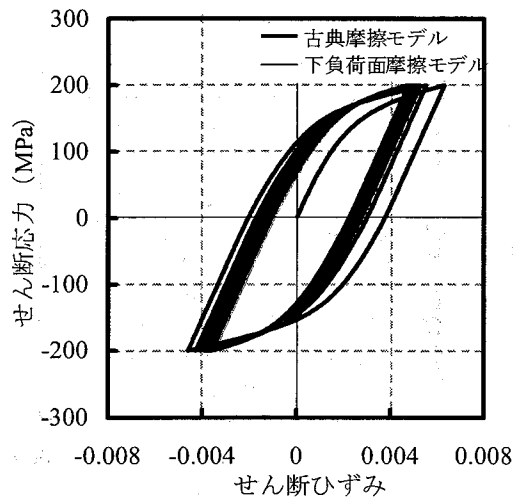


図12. 両振り時の材料のせん断応力—せん断ひずみ関係の比較

## 6. まとめ

本研究では二物体間で生じる力学的現象を詳細に把握するため、繰返し接触時に生じる材料の力学関係を表現するために提案された拡張下負荷面モデルと、その時の摩擦すべり関係を表現するために提案された下負荷面摩擦モデルを用いた解析を行い、その応答特性について考察を行った。以下に得られた知見について述べる。

- (1) 拡張下負荷面モデルの導入により、降伏面内で繰返し荷重時に生じる塑性ひずみの集積量を表現でき、材料定数 $c$ の値を種々に変化させることにより、その集積量を調整できることを確認した。
- (2) 下負荷面摩擦モデルの導入により、古典摩擦モデルでは表現できなかった限界摩擦力以下で生じる相対変位が表現でき、繰返し接触力が作用するときにおいても、その集積が表現できることを確認した。
- (3) 両振りでも繰返しせん断力を作用させた場合の解析において、本摩擦モデルでは相対変位が左方向つまり最初にせん断力を与えた方向とは逆方向に遷移していく様子が確認された。

最後に、本研究は日本学術振興会の特別研究助成に基づき行なわれたことを付記し、感謝の意を表わします。

## 参考文献

- 1) 大橋義夫, 川嶋紘一郎, 水野貞男. (1972) “繰返し引張圧縮を受ける軟鋼の応力—ひずみ関係について”. 日本機械学会論文集, 巻号 38, pp.3029-3037.
- 2) Courtney-Pratt, J.S. and Eisner, E. (1957) “The effect of a tangential force on the contact metallic bodies.” Proc. Royal Soci. London, Ser. A238, pp.529-550.
- 3) Mróz, Z. (1966) “On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids.” Archiwum Mechaniki Stosowanej, 18, pp.3-35.
- 4) Krieg, R.D. (1975) “A practical two surface plasticity theory.” J. Appl. Mech. (ASSE), 42, pp.641-646.



- 5) Hashiguchi, K. and Ueno, M. (1977) "Elastoplastic constitutive laws of granular materials, Constitutive Equations of Soils" JSSMFE, pp.73-82.
- 6) Hashiguchi, K. (1989) "Subloading surface model in unconventional plasticity" Int. J. Solid Struct, 25(8), 917-945.
- 7) Bowden, F.P. and Tabor, D. (1954) "The friction and lubrication of solids." Oxford University Press.
- 8) Seguchi, Y., Shindo, A., Tomita, Y. and Sunohara, M. (1974) "Sliding rule of friction in plastic forming of metal." Computational Methods in Nonlinear Mechanics. University of Texas at Austin, pp.683-692.
- 9) Wriggers, P. and Taylor, R. L. (1985) "A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 50, no. 2, pp.163-180.
- 10) Laursen, T. C. and Simo, J. C. (1993) "Algorithmic symmetrization of coulomb frictional problems using augmented lagrangians." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.108, no.1-2, pp.133-146.
- 11) Olofsson, U. and Hagman, L. (1997) "A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic bodies" Tribology International, vol.30, no.8, pp.599-603.
- 12) Hagman, L. and Olofsson, U. (1998) "A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic asperities-parametric study and experimental investigation." Tribology International, vol.31, no.4, pp.209-217.
- 13) Mróz, Z. and Stupkiewicz, S. (1994) "An anisotropic friction and wear model" Int. J. Solid Struct, vol.31, no.8, pp.1113-1131.
- 14) 橋口 公一, 岡安 崇史, 堤 成一郎, 上野 正実. (2000) " 拡張下負荷面モデルを導入した有限変形・土-水連成有限要素解析プログラムの開発" . 農業機械学会誌, 巻号 62(1), pp.64-72.
- 15) 橋口公一, 岡安崇史, 尾崎伸吾. (2003) " 下負荷面の概念に基づく摩擦理論" . 日本機械学会論文集. A 編, 巻号 69(678), pp.295-301.
- 16) 尾崎 伸吾, 橋口公一, 岡安崇史. (2004) " 下負荷面摩擦モデルを用いた地盤-杭間の相互作用の弾塑性有限要素解析" . 応用力学論文集, 巻号 7(1), pp.579~587.
- 17) 尾崎 伸吾, 橋口公一, 岡安崇史, 堀田直岐. (2004) " 下負荷面摩擦モデルを用いた接触・摩擦問題の有限要素解析" . 日本機械学会論文集. A 編, 巻号 70(695), pp.995-1002.
- 18) Hashiguchi, K. Ozaki, S. and Okayasu, T. (2005) "Unconventional friction theory based on the subloading surface concept" in Int. J. Solid Struct., 42, 1705-1727.
- 19) Bay, N. and Wanheim, T. (1976): Real area of contact and friction stresses at high pressure sliding contact. *Wear*, 38, 201-209.

(2006年4月13日受付)