

移動荷重を受ける c - ϕ 材料の 支持力特性に関するシェイクダウン解析

Shakedown analysis on a bearing capacity problem of c - ϕ material
subjected to surface moving loads

小林俊一*・西川雅規**・田村 武***

Shun-ichi KOBAYASHI, Masaki NISHIKAWA, Takeshi TAMURA

*正会員 博士(工学) 京都大学大学院助手 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 修士(工学) 東日本旅客鉄道株式会社 (〒 151-8578 東京都渋谷区代々木 2-2-2)

***フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

Shakedown analysis on a bearing capacity problem of c - ϕ material subjected to surface moving loads is investigated in this paper. A numerical code based on the hybrid type formulation is developed and applied to boundary value problems to check its performance. Reduction of bearing capacity due to the movement of the loads is quantitatively evaluated. The threshold value of the lateral moving distance which reflects the influenced area of moving loads is also evaluated. The advantages of shakedown analysis in comparison with the evolutionary method, such as incremental form elasto-plastic analysis are also discussed.

Key Words : shakedown analysis, finite element method, bearing capacity, moving load

1. はじめに

弾性限界を超える繰返し荷重を受ける構造物は、繰返し荷重の大きさに依存して、塑性変形が蓄積し続ける漸増崩壊 (Incremental collapse) や正負交番载荷による繰返し塑性 (Alternating plasticity) のように塑性不安定となるか、あるサイクル後に弾性応答に落ち着くシェイクダウン (Shakedown) のように塑性安定となるか、いずれかの挙動を示す。

シェイクダウン挙動を示す荷重の大きさ (シェイクダウン限界荷重) を求めることは、繰返し荷重を受ける構造物が塑性安定を示す限界状態を評価することであり、限界状態設計を行うための基本的情報を評価しているといえる。このような解析をシェイクダウン解析と呼ぶ。ある荷重に対して構造物がシェイクダウンするかどうかを調べるための指導原理として、2つのシェイクダウン定理、すなわち「静力学に基づくメランの定理」¹⁾ と「運動学に基づくコイターの定理」²⁾ が知られている。また、シェイクダウン定理全般を取り扱ったテキストとしては文献^{3),4)}等が挙げられる。

さて、具体的にシェイクダウン限界荷重を評価する方法としては、荷重履歴にしたがって逐次的に増分形の方程式を解いていく発展的な方法 (Evolutionary method) とシェイクダウン定理に基づいてシェイクダウン状態の物理量を直接評価する直接法 (Direct method) が知られている。発展的な方法は履歴依存を示す材料にも有効な汎用的方法であるが、一般に多くの計算機資源と時間が必要となることが大きな欠点である。これに対して、直接法は履歴に依存しない材料であれば少ない計算機資源と時間でシェイクダウン限界状態を評価できる特徴がある⁵⁾。シェイクダウン解析の数値計算法としては、有限要素法に基づく空間離散化とコイター

の定理を組み合わせた変位法に基づく定式化が一般的である^{6),7)}。

これに対して、著者らは主双対内点法アルゴリズムを利用した混合型のシェイクダウン解析法について開発を進めてきた^{8),9)}。この混合型シェイクダウン解析法の利点としては、内点法に基づく高速解法であるため計算時間とコスト面で有利であること、初期仮定解として非実行可能解が利用可能なため解析の初期条件設定が容易に行えること、が挙げられる。さらに、本研究で示す時間域の離散化を用いることに依り、収束計算で現れる方程式の寸法を、単調载荷に対する混合型剛塑性有限要素法と同じ寸法に縮約することが可能であり、解析の大幅な高速化が期待できる。

本論文では、著者らによる混合型シェイクダウン解析を移動荷重を受ける c - ϕ 材料の支持力問題に適用し、その支持力特性の評価を行ったので報告する。

なお本論文は、拘束圧に依存した剪断強度を示す c - ϕ 材料に対する混合型シェイクダウン解析プログラムの開発と境界値問題への適用に主眼を置いた基礎的な研究である。対象とした弾塑性境界値問題は、交通荷重を受ける路面の安定性評価など工学的にも重要な問題であるが、本論文に示す解析結果だけでは工学的な評価を与えるのには不十分であることを、予めお断りしておく。

2. 混合型シェイクダウン解析法の定式化

ここでは文献^{8),9)}にしたがって、ラグランジュ双対理論による混合型シェイクダウン解析法の定式化をまとめておく。

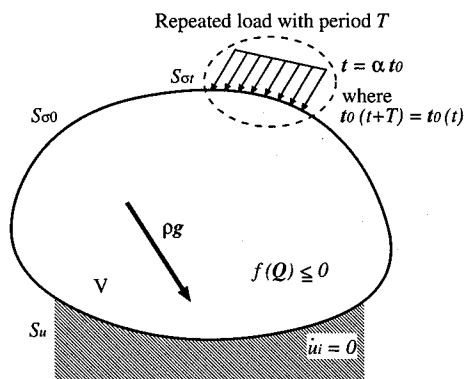


図-1 対象とする弾塑性境界値問題

2.1 対象とする繰返し荷重を受ける弾塑性境界値問題

対象とする弾塑性境界値問題を図-1 に示す。材料は降伏関数 $f(Q)$ に従う線形弾性完全塑性体である。ここにベクトル Q は応力である。

境界条件として、斉次ディリクレ境界 S_u で変位速度 $\dot{u}$ がゼロとなる条件 $\dot{u} = 0$ 、斉次ノイマン境界 $S_{\sigma 0}$ で表面力 t がゼロとなる条件 $t = 0$ 、非斉次ノイマン境界 $S_{\sigma t}$ で周期 T の繰返し表面力 $t = \alpha t_0$ となる条件がそれぞれ与えられる。ここにスカラー α は荷重係数、ベクトル t_0 は基準となる表面力である。

さらに、この定式化では慣性力については考慮しない準静的な繰返し载荷のみを対象とする。したがって自重による一定の物体力 ρg が作用する。

本論文ではこれらの表面力と物体力をまとめて、外力 $(\alpha t_0, \rho g)$ と記すことにする。我々の関心事は、この外力 $(\alpha t_0, \rho g)$ が作用するときに、対象構造物が塑性安定を示すような最大の荷重係数 α 、すなわちシェイクダウン限界荷重係数を求めることにある。以下、有限要素法により空間離散化した形で定式化を示す。

2.2 時間域の離散化

基準となる繰返し外力を $\Gamma_0(t)$ と表そう。この外力は表面力であってもよいし、物体力であってもよい。またそれらの和であってもよい。この繰返し外力は、物理的意味からも明らかなように時間 t を陽に含む。ここでは、シェイクダウン解析の特徴を活かすため、この時間 t を直接用いる代わりに、繰返し荷重が、(一般化) 荷重空間内の取りうる範囲を検討し、時間域の解析を回避する方法について述べる。この方法を本論文では時間域の離散化と呼ぶことにする。以下、荷重空間の概念図図-2 を用いて説明する。

まず、時刻 t を媒介変数として基準となる繰返し外力 $\Gamma_0(t)$ を荷重空間内に表現する。荷重空間の原点と時刻 t の荷重状態 $\Gamma_0(t)$ を結んだ動径が1周期 T で掃く空間を荷重領域 Γ_0 とする。

つぎに、荷重空間内で荷重領域 Γ_0 を含む最小の凸領域を考える。この凸領域は凸包 (Convex hull) と呼ばれる。さらにこの凸包を内部に含む凸多面体を考える。この凸多面体を荷重領域の線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ と呼ぶ。線形外接領域は一意的に決められるものではなく、時間域

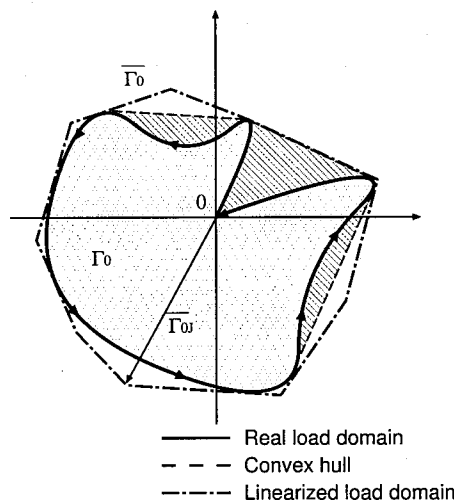


図-2 荷重領域 Γ_0 、その凸包および線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$

離散化の程度に応じて解析者が適当なものを選択すれば良い。

さて、領域 $\bar{\Gamma}_0$ の各頂点を $\bar{\Gamma}_{0J}$ とすれば、領域内部の任意の荷重 $\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$ は、以下の線形和で表せる。

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J \bar{\Gamma}_{0J}$$

$$\text{where } \sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J \leq 1, \quad 0 \leq \beta_J \leq 1 \quad (1)$$

ここに $J_{\max}$ は凸多面体の総頂点数、 β_J は非負かつ、総和が1となるパラメータである。また式 (1) の等号は荷重状態が線形領域 $\bar{\Gamma}_0$ の境界上にあるときに成り立つ。

式 (1) は荷重空間内の時間に依らない基底 Γ_{0J} の線形和によって、時間とともに変動する繰返し外力 $t_0(t)$ を離散的に表現していると解釈できる。また、この離散化では荷重領域の凸性が保持されるよう配慮しており、後述するシェイクダウン解析の定式化において、問題の凸性が保証される利点がある。

2.3 静的許容な応力場

まずメランの定理を簡単に説明しておく。対象とする弾塑性系がある繰返し外力を受けるとき、外力に対する線形弾性応力場とゼロ外力に釣合う時間に依らない残留応力場を重ね合わせた応力場が、あらゆる時間において領域の至るところで降伏条件を破らないとする。このとき対象とする弾塑性系は、その繰返し荷重に対して塑性的に安定な挙動を示し、繰返し载荷初期に塑性変形は生じるものの最終的には弾性応答に落ち着くことが知られている。これをメランの定理という³⁾。

したがって、メランの定理の意味で静的許容な応力場とは、外力 $(\alpha t_0(t), \rho g)$ に対して、あらゆる時間において釣合式と応力境界条件 (ディリクレ条件) を満たし、しかもあらゆる場所で降伏条件 $f(Q)$ を破らない

応力場のことである。以下、表面力の時間域離散化を考慮して、外力を $(t_{J0}, \rho g)$, $\forall J \in \bar{\Gamma}_0$ と読み替えて議論する。

外力 $(t_{J0}, 0)$ に対する線形弾性応力を Q_{J0}^E 、外力 $(0, \rho g)$ に対する線形弾性応力を Q_b^E 、外力 $(0, 0)$ に対する応力を Q^r とする。この応力場 Q^r を時間によらずゼロ外力に釣合う「残留応力場」と呼ぶ。

メランの定理の意味での静的許容な応力場の条件を具体的に書き下す。以下、空間離散化は、変位場についてはアイソパラメトリック1次要素（形状関数 N_u ）を用い、応力場については要素内一定であるとした。

残留応力場 Q^r は、弱形式の釣合式

$$\int_V B_u^T Q^r dV = B^T Q = 0 \quad (2)$$

を満たす。ここにテンソル B_u は節点～ひずみ関係のテンソル B_u から斉次ディリクレ条件に対応する列を縮約したテンソルである。またテンソル B^T は、応力の離散化が要素一定であることに注意し、式 (2) にしたがって領域積分した量を成分に持つテンソルである。なお、残留応力場も斉次ディリクレ境界での反力は必ずしもゼロとはならないことを注意する。

外力 $(\alpha t_{J0}, \rho g)$ に対する釣合系の応力場 Q_J は、釣合式の線形性と線形弾性体応力の線形性を考慮すれば

$$Q_J = \alpha Q_{J0}^E + Q_b^E + Q^r, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (3)$$

と書ける。

降伏条件を破らない条件は、全ての要素 i において、あらゆる荷重 J に対して

$$f_i(Q_J) + s_{iJ} = 0, s_{iJ} \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0, \forall i \in V \quad (4)$$

を満たすことである。ここに s_{iJ} は非負のスラック変数である。各要素での降伏関数値とスラック変数をまとめてベクトル f, s_J で表記すれば、降伏条件を破らない条件は

$$f(Q_J) + s_J = 0, s_J \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (5)$$

さらに、降伏関数 f の凸性と応力の重ね合わせを考慮すれば、式 (5) を満たすような荷重係数 α 、残留応力 Q^r が存在するとき、荷重領域 $\bar{\Gamma} = \alpha \bar{\Gamma}_0$ に属するあらゆる荷重について、降伏条件を破らないことが示せる⁸⁾。

2.4 対象とする弾塑性境界値問題のラグランジアン

対象とする弾塑性境界値問題のラグランジアンを以下のように導入する。

$$L_s = \begin{cases} \alpha + \kappa \cdot B^T Q^r \\ - \sum_{J=1}^{J_{\max}} \lambda_J \cdot (f(Q_J) + s_J) \\ + \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J \cdot (Q_J - \alpha Q_{J0}^E - Q_b^E - Q^r) \\ + \sum_{J=1}^{J_{\max}} s_J \cdot t_J \quad \text{for } t_J \geq 0 \\ + \infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

ここにベクトル κ, μ_J はそれぞれ残留応力場の条件、応力の分解表現に対応したラグランジュ乗数、ベクトル λ_J, t_J はそれぞれ荷重 Q_J での降伏条件、スラック変数 s_J の非負性に対応したラグランジュ乗数である。

また後述するように、問題の双対性を考慮すればこれらのラグランジュ乗数には力学的な意味づけが可能であり、ベクトル μ_J と λ_J はそれぞれ荷重 Q_J に対応した塑性ひずみ増分と塑性乗数に、ベクトル κ は1周期当たりの節点変位増分となっている。

2.5 静力学的方法

ラグランジュ双対理論によれば、ラグランジアン (6) より以下の最大化問題が導出される。これはメランの定理に基づく静力学的なシェイクダウン解析法である。

$$\begin{aligned} \text{Obj.: } & \max_{\alpha, Q^r, s_J} \alpha \\ \text{Sub.: } & f(Q_J) + s_J = 0, s_J \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \\ & Q_J = \alpha Q_{J0}^E + Q_b^E + Q^r, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \\ & B^T Q^r = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2.6 運動学的方法

コイターの定理では、ある繰返し荷重を受ける弾塑性体の塑性安定性を評価するため、1周期にわたる節点変位増分に対して適当な塑性ひずみ速度場を考え、この塑性ひずみ速度場による1周期当たりの内部消散が1周期当たりの外部塑性仕事を上回れば、対象とする弾塑性体はその繰返し荷重に対して安定であることを示している。ここでは、目的関数や制約条件の全てが凸性を有することを考慮し、コイターの定理に基づく運動学的方法を導出する。

ラグランジュ双対理論¹⁰⁾を利用し、対象問題の凸性を考慮すれば、ラグランジアン (式 (6)) から最大化問題 (式 (7)) と双対関係にある以下の最小化問題が導出

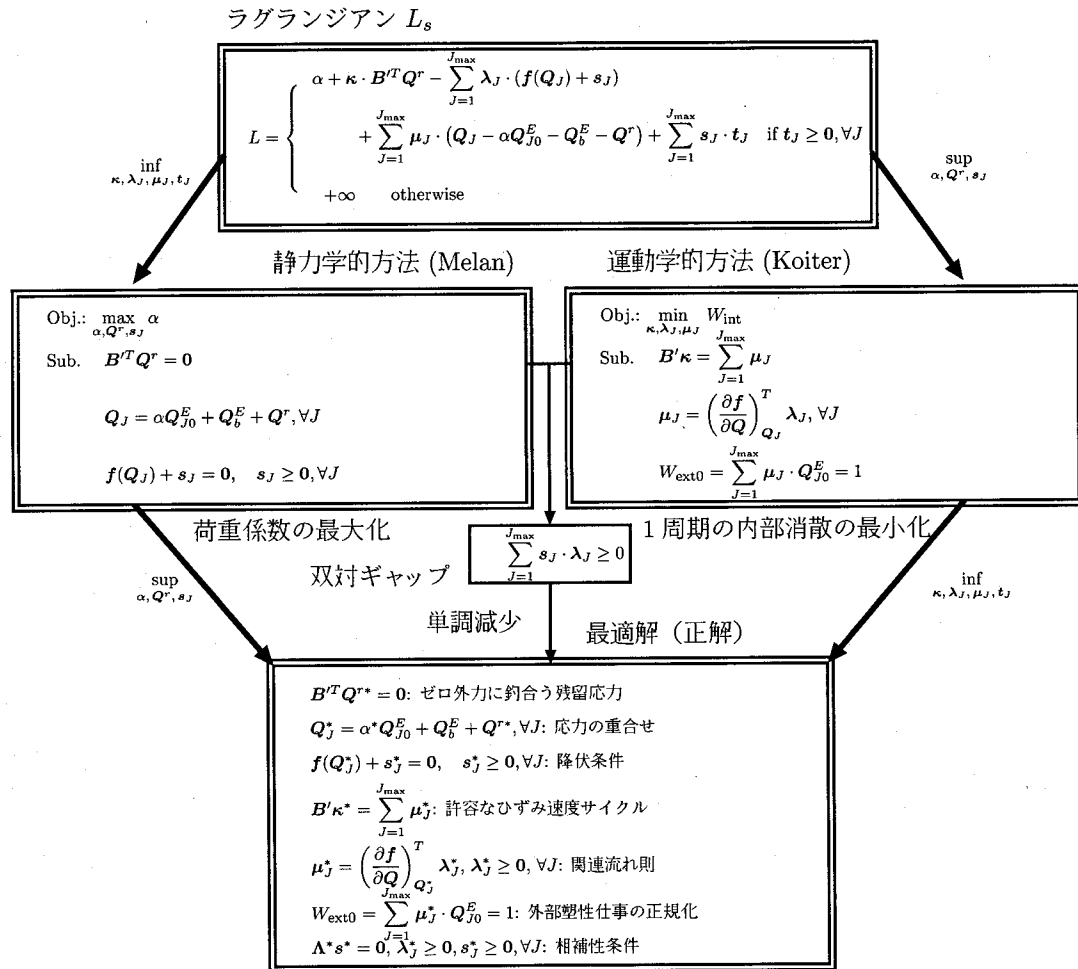


図-3 混合型シェイクダウン解析法の数理構造

できる。

$$\begin{aligned}
 &\text{Obj.: } \min_{\kappa, \lambda_J, \mu_J} W_{\text{int}} \\
 &\text{Sub.: } B^T \kappa = \int_0^T \dot{q}^p dt = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J \\
 &\mu_J = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)^T_{Q_J} \lambda_J, \lambda_J \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \\
 &W_{\text{ext}0} = 1
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで時間域の離散化表現に注意すれば、この最適化問題はコイターの定理に基づく運動学的なシェイクダウン解析法であることがわかる。このことを以下に確認しておく。

まず最小化問題 (8) の制約条件は、それぞれ以下の物理的な意味を持つ。1 つ目は塑性ひずみ速度 $\dot{q}^p(t)$ と 1 周期にわたる節点変位増分 κ はコイターの意味で「許容な塑性ひずみ速度サイクル」を構成することを意味する。2 つ目は関連流れ則を表しており、降伏関数の微分可能性を仮定すれば、内部消散を評価する上限 (sup) 操作と等価な条件として導出できる。3 つ目は、基準となる表面力 t_0 on $S_{\sigma t}$ がコイターの意味で許容な速

度場 $(\kappa, \dot{q}^p)$ となす 1 周期にわたる外部塑性仕事 $W_{\text{ext}0}$ が 1 である正規化を意味する。

一方、1 周期にわたる内部消散 W_{int} と外部塑性仕事 $W_{\text{ext}0}$ は、時間域の離散化に注意すると、それぞれ、

$$W_{\text{int}} = \int_0^T \dot{W}_{\text{int}} dt = \sup_{Q_J} \left\{ \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J \cdot Q_J - \rho \kappa \cdot g \right\} \tag{9}$$

$$W_{\text{ext}0} = \int_0^T \dot{W}_{\text{ext}0} dt = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J \cdot Q_{J0}^E (=1) \tag{10}$$

と書けることが分かる。したがって、得られた最小化問題は、コイターの定理に基づく運動学的な解析法に属する。

2.7 双対ギャップと相補性条件

弱双対定理によれば、運動学的方法で得られる荷重係数は正解を下回ることではなく、また静力学的方法で得られる荷重係数は正解を上回ることではない。さらに双対定理によれば、2 つの荷重係数の差、すなわち双対ギャップがゼロとなって両者が一致するのは、正解の時に限ることが知られている¹⁰⁾。

本問題について双対ギャップを具体的に求めると

$$\sum_{J=1}^{J_{\max}} s_J \cdot \lambda_J \geq 0, s_J \geq 0, \lambda_J \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (11)$$

と書ける。したがって、相補性条件はあらゆる要素 i 、あらゆる荷重状態 J に対して等式

$$s_{iJ}^* \lambda_{iJ}^* = 0, s_{iJ}^* \geq 0, \lambda_{iJ}^* \geq 0, \quad \forall i \text{ and } J \quad (12)$$

が成立することである。ここに上添字 $*$ は正解を表す。

2.8 解くべき方程式群

混合型の定式化では最適解（上添字 $*$ ）が満たすべき条件に着目し、運動学的方法の制約条件、静力学的方法の制約条件および相補性条件の全てを満たす応力場、速度場を同時に解く解法である。解くべき方程式群をまとめて再掲しておく。

$$\text{残留応力場: } B'^T Q^{r*} = 0 \quad (13)$$

$$\text{応力の重ね: } Q_J^* = \alpha^* Q_{J0}^{E*} + Q_b^E + Q^{r*}, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (14)$$

$$\text{降伏条件: } f(Q_J^*) + s_J^* = 0, s_J^* \geq 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (15)$$

$$\text{許容なひずみ速度サイクル: } B' \kappa^* = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J \quad (16)$$

$$\text{関連流れ則: } \mu_J = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)_{Q_J^*}^T \lambda_J^*, \quad \lambda_J^* \geq 0 \quad (17)$$

$$\text{外部仕事の正規化: } W_{\text{ext}0} = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \mu_J^* \cdot Q_{J0}^E = 1 \quad (18)$$

$$\text{相補性条件: } \Lambda_J^* s_J^* = 0, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (19)$$

where $\Lambda_J^* = \text{diag}(\lambda_J^*), \lambda_J^* \geq 0, s_J^* \geq 0$

ここまで、本論文で用いる混合型シェイクダウン解析法の定式化について、その数理構造について議論してきた。その記述を取りまとめて図化したものが図-3 である。

2.9 主双対内点法を用いた数値計算

方程式群 (13)~(19) は非線形の方程式であるので、直接解くことは難しい。この定式化のように、凸計画問題に対して混合型の定式化を行う場合には、主双対内点法アルゴリズムを利用した数値計算を行うのが効率的である¹¹⁾。以下にその概要を示す。

式 (13)~(19) を近似解の周りでテーラー展開し、ニュートン法による収束計算を行う。このとき、相補性条件をダイレクトに与えると解がうまく収束しないため、正から単調にゼロに収束する数列 ε を用いて相補性条件を近似的に表し、ニュートン法の収束計算の進行とともに相補性条件が満たされるように工夫する。この数列のことをバリヤパラメータという。

近似解による残差をそれぞれ以下のように定義する。

$$r_Q = -B'^T Q^r \quad (20)$$

$$r_{fJ} = -(f(Q_J) + s_J) \quad (21)$$

$$r_\mu = -B' \kappa + \sum_{J=1}^{J_{\max}} E_J \lambda_J \quad (22)$$

$$r_e = -\sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E E_J \lambda_J + 1 \quad (23)$$

$$r_\varepsilon = \varepsilon e - \Lambda_J s_J \quad (24)$$

ここにテンソル E_J は

$$E_J = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)_{Q_J}^T \quad (25)$$

である。

テーラー展開の結果、以下の増分形方程式を得る。

$$B'^T \Delta Q^r = r_Q \quad (26)$$

$$(E_J^T Q_{J0}^E) \Delta \alpha + E_J^T \Delta Q^r + \Delta s_J = r_{fJ}, \forall J \quad (27)$$

$$B' \Delta \kappa - \sum_J E_J \Delta \lambda_J - \left(\sum_J C_J Q_{J0}^E \right) \Delta \alpha - \sum_{J=1}^{J_{\max}} C_J \Delta Q^r = r_\mu \quad (28)$$

$$\left(\sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E \cdot C_J Q_{J0}^E \right) \Delta \alpha + \sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E \cdot C_J \Delta Q^r + \sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E \cdot E_J \Delta \lambda_J = r_e \quad (29)$$

$$S_J \Delta \lambda_J + \Lambda_J \Delta s_J = r_\varepsilon \quad (30)$$

ここにテンソル C_J は応力 Q_J の関数であり、全要素数を n とすると、

$$C_J(Q_J) = \begin{bmatrix} \lambda_{1J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial Q \partial Q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{nJ} \frac{\partial^2 f_n}{\partial Q \partial Q} \end{bmatrix} \quad (31)$$

と表される。ここで逆行列 S_J^{-1} が簡単に解けることに注意すると、増分 $\Delta s_J, \Delta \lambda_J$ はそれぞれ残りの変数によって陽に表せる。

$$\Delta s_J = r_{fJ} - (E_J^T Q_{J0}^E) \Delta \alpha - E_J^T \Delta Q^r, \forall J \quad (32)$$

$$\Delta \lambda_J = S_J^{-1} (r_\varepsilon - \Lambda_J \Delta s_J), \forall J \quad (33)$$

したがって最終的に解くべき連立方程式は変数 $\Delta Q^r, \Delta \alpha, \Delta \kappa$ に関する以下の方程式に縮約される。

$$\begin{bmatrix} G & k & -B' \\ k^T & H & 0 \\ -B'^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q^r \\ \Delta \alpha \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r'_\mu \\ r'_e \\ -r_Q \end{Bmatrix} \quad (34)$$

ここにテンソル D_J を

$$D_J = C_J + E_J S_J^{-1} \Lambda_J E_J^T \quad (35)$$

と置けば、式(34)のテンソル G 、ベクトル K 、スカラー H はそれぞれ

$$G = \sum_{J=1}^{J_{\max}} D_J \quad (36)$$

$$k = \sum_{J=1}^{J_{\max}} D_J Q_{J0}^E \quad (37)$$

$$H = \sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E \cdot D_J Q_{J0}^E \quad (38)$$

である。また、残差 r'_μ , r'_e も、それぞれ

$$r'_\mu = \sum_J^{J_{\max}} E_J S_J^{-1} (\Lambda_J r_{fJ} - r_\epsilon) - r_\mu \quad (39)$$

$$r'_e = r_e + \sum_{J=1}^{J_{\max}} Q_{J0}^E \cdot E_J S_J^{-1} (\Lambda_J r_{fJ} - r_\epsilon) \quad (40)$$

と表される。

式(34)は、解くべき方程式のサイズが荷重の線形外接領域 Γ_0 の頂点の数によらず一定であることが特徴である。これは、収束計算で最も多くの計算量を必要とするニュートン方向を解く計算過程において、剛塑性解析 ($J_{\max} = 1$) の場合と同じ計算量で済ませられることを意味している。

さらに内点法では、ニュートン方向に沿った解の更新を行う時に、非負変数 s_J , λ_J の非負性を満足する範囲で最も大きな増分を可変的に選択できるため、収束計算回数が少なく効率的な計算が可能とされる。

実際の数値解析では、初期解として非負変数の非負性を満足する非実行可能解を与えた。初期解は非実行可能であっても、繰返し計算過程を経ると、近似解は制約条件を満たす方向に更新され、結果として近似解は徐々に実行可能領域に含まれるようになる。最終的には繰返し計算によって更新された解が全ての要素 i 、全ての荷重状態 J に対して $s_{iJ}\lambda_{iJ}$ が所与の判定基準を下回れば、解が収束したと判定して計算を終了する。

3. 移動荷重を受ける c - ϕ 材料の支持力特性

3.1 問題の設定

ここでは、移動荷重を受ける c - ϕ 材料の支持特性評価に関するシェイクダウン解析結果について報告する。対象問題の概要を図-4に示す。問題の次元は2次元とし、載荷幅 B に一様に作用した鉛直荷重が準静的に水平移動を無限回繰り返す載荷条件を考える。このとき、材料物性 c , ϕ , ρ 、水平移動距離 d と支持力のシェイクダウン限界荷重との関係を評価することが解析の目的である。

Terzaghi の支持力公式によれば、土被りのない地表面に鉛直荷重が作用する時の最大鉛直支持力 $V_{\max}$ は

$$V_{\max} = c \cdot N_c B + \frac{1}{2} \rho g N_\gamma B^2 \quad (41)$$

と表せる。ここに N_c , N_γ は支持力係数で内部摩擦角 ϕ の関数である。支持力公式(41)を変形すると、以下

のように無次元化した表現が得られる。

$$\frac{V}{cB} = N_c + GN_\gamma \quad (42)$$

ここにスカラー G は、支持力に及ぼす自重 ρg と粘着力 c の影響について相対的な関係を表したパラメータで

$$G = \frac{\rho g B}{2c} \quad (43)$$

と定義される。物理的な意味を考えると、パラメータ G の取り得る範囲はゼロから無限大である。このパラメータ G の取り得る範囲について、工学的な解釈を与えておく。パラメータ G がゼロのときは、支持力に寄与するのは支持力係数 N_c のみとなり、支持特性には自重による影響が現れない。現実的には、地盤材料の自重がゼロということはあるが、粘性土地盤のように支持力係数 N_c の影響が卓越する地盤と考えて差し支えない。一方、パラメータ G が無限大に近付くと、相対的に支持力係数 N_γ の影響が卓越する。これは粘着力 c がゼロに近い砂質土地盤に対応する。なお、粘着力 c がゼロの場合は、無応力状態でも材料が降伏することになるので、安定した数値計算を行うことが難しい。したがって、パラメータ G を無限大とした場合、言い替えれば全く粘着力のない砂質土の場合について、数値計算で支持力評価を行うことは、実際上困難である。

解析に用いたメッシュを図-5に示す。要素数は 16×40 の640要素で、変形場(1周期にわたる節点変位増分 κ)の空間離散化には4節点1次アイソパラメトリック要素を、応力場とそれに関係した量(残留応力 Q^r 、スラック変数 s_J 、塑性乗数 λ_J)の空間離散化には要素内一定の形状関数を用いた。ディリクレ境界条件としては、両端スライダー、底部固定の条件とする。空間離散化は載荷領域付近で細かく、底面付近や両端付近では粗くした。地盤材料は内部摩擦角 ϕ 、粘着力 c 、密度 ρ の一様な Mohr-Coulomb 材料とした。降伏関数の具体的な表記は

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - c \cot \phi \quad (44)$$

である。ただし、応力やひずみの正負は引張を正とした。

3.2 解析の着目点

ある大きさの荷重が移動する場合の支持力と移動しない場合の支持力はどちらが小さいだろうか。これを予想するためには、メランの定理に基づいて以下の思考実験をすればよい。まず移動荷重による線形弾性応力場に対して、あらゆる時間と場所において降伏条件を破らないような残留応力場を見出せるとする。このとき、少なくともその残留応力場は移動しない荷重に対しても塑性安定であると言える。では、その逆も真であろうか。これは、一概には分からない。したがって、移動荷重の方が移動しない場合よりも支持力が低下するであろうと予想できる。

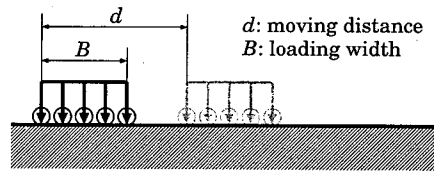


図-4 移動荷重のイメージ図

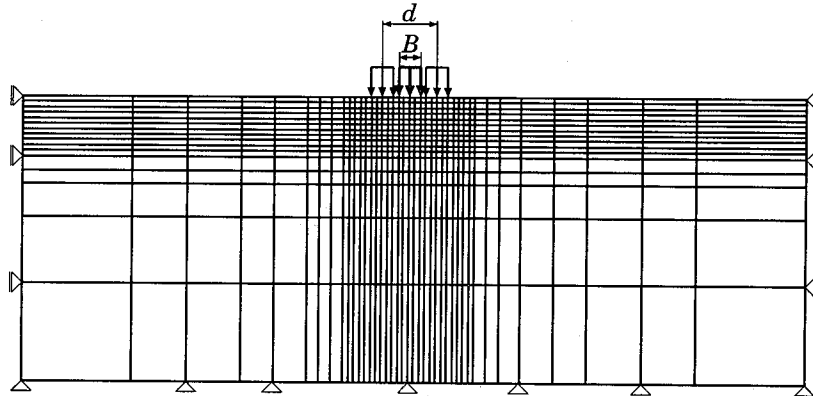


図-5 数値解析に使用したメッシュ

では、次に荷重の移動範囲と支持力の低下にはどのような関係があるだろうか。荷重の移動範囲がある程度以上大きくなれば、十分遠方で載荷する荷重の影響は無視できるようになり、支持力がある値に収束することも、また予想できる。

さて、移動荷重に対する支持力特性の定量的な評価を行うに当たって、移動距離の増加に伴って支持力がどれほど低下するのか、また移動距離がどの程度になれば支持力が一定値に収束するのか、という点が工学的に興味深い。本研究では、メッシュサイズの制約上、無次元水平移動距離 d/B が $0 \sim 3.5$ となる範囲で解析を行った。

また、地盤材料物性による支持力の違いを定量的に評価するため、内部摩擦角 ϕ については $\phi = 0^\circ \sim 40^\circ$ の範囲で、自重 ρg と粘着力 c の相対的な影響を表すパラメータ $G = \frac{\rho g B}{2c}$ については $0 \sim 10$ の範囲で解析を行った。

3.3 解析結果

(1) 古典的な支持力解と静止荷重に対する数値解の関係

シェイクダウン限界荷重を議論する前に、本研究による数値解と特性曲線法による古典的な支持力解¹²⁾との関係を論じておく。これら2つの解を表-1に示す。同様の解析を行った既往の文献¹³⁾によると、 c - ϕ 材料の支持力問題の場合、内部摩擦角 ϕ と自重の影響を表すパラメータ G が共に大きくなるにつれて、数値解と古典的な支持力解とのずれが大きくなることが指摘されている。

本研究の数値解でも同様の傾向が確認された。この

原因として、比較する解の載荷条件が異なること、つまり数値解では載荷条件として均一な鉛直帯荷重を考えているのに対して、古典的な支持力解は特性曲線法による解であり、基礎底面の荷重分布は非均一となっていることが挙げられる。均一な鉛直帯荷重の場合は、基礎端部の拘束圧が基礎中央部よりも小さくなるため、内部摩擦角に起因するせん断強度が小さくなり、基礎端部で局所的な破壊を示す。このため、これら2つの解の大小関係は以下のようにまとめられる。すなわち、地盤材料のせん断強度が拘束圧にあまり依存しない場合は、空間離散化による速度場の自由度の制約のため数値解は多少大きめの解を与える。対照的に、内部摩擦角と自重の影響を表すパラメータが大きくなれば、基礎端部の局所的な破壊が卓越するので、数値解は逆に古典的な支持力解よりも小さな値を示すようになる。

(2) パラメータ G とシェイクダウン限界荷重の関係

内部摩擦角 ϕ をそれぞれ、 0° , 10° , 20° , 30° , 40° に固定し、パラメータ G を $0 \sim 10$ に変化させた場合の、シェイクダウン限界荷重と無次元移動距離 d/B を図-6～図-10に示す。なお基準となる移動荷重の大きさは、同図中の縦軸は荷重係数 α が、式(42)の右辺 $c = N_c + GN_\gamma$ に一致するように決めた。内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ の場合は、物体力による外部塑性仕事キャンセルアウトする崩壊メカニズムとなるので、シェイクダウン限界荷重はパラメータ G の値によらず無次元移動距離 d/B の関数となる。一方、内部摩擦角 $\phi \neq 0^\circ$ の場合は、パラメータ G が増加するにつれて、シェイクダウン限界荷重も増加する。しかしながら、シェイクダウン限界荷重がほぼ一定値に収束するような限界移動距離 $(d/B)^*$ は、パラメータ G にはよらずほぼ一定となっている。

表-1 静止荷重に対する支持力 $V/(cB)$ の数値解と Cox による特性曲線法の解との比較

本解析による数値解					
$\phi \backslash G$	0	0.01	0.1	1	10
0°	5.36	5.36	5.36	5.36	5.36
10°	9.12	9.13	9.20	9.79	13.5
20°	16.4	16.4	16.8	19.5	32.4
30°	33.7	33.9	35.2	46.0	102
40°	84.4	85.4	92.7	135	366

特性曲線法の解 (Cox, 1962)					
$\phi \backslash G$	0	0.01	0.1	1	10
0°	5.14	5.14	5.14	5.14	5.14
10°	8.34	8.35	8.42	9.02	13.6
20°	14.83	14.87	15.2	17.9	37.8
30°	30.14	30.29	31.6	42.9	127
40°	75.31	76.13	83.0	139	574

(3) 内部摩擦角 ϕ とシェイクダウン限界荷重の関係

次に同じ解析結果を利用して、パラメータ G を固定して、内部摩擦角 ϕ の違いによる荷重係数と無次元移動距離 d/B の関係を整理する。内部摩擦角の増加に伴って支持力が指数的に増加するため、荷重係数はシェイクダウン限界荷重がほぼ一定値に収束したと判断できる無次元移動距離 $d/B = 3.5$ の場合の荷重係数で除した正規化を行った。パラメータ $G = 0, G = 5, G = 10$ での無次元移動距離 d/B とシェイクダウン限界荷重の関係をそれぞれ図-11, 図-12, 図-13 に示す。

(4) 限界移動距離

シェイクダウン限界荷重がほぼ一定値に収束する限界移動距離 $(d/B)^*$ と、パラメータ G , 内部摩擦角 ϕ の関係を表-2 にまとめる。ここで収束を判定する基準としては、限界移動距離 $d/B = 3.5$ のシェイクダウン限界支持力に対してシェイクダウン限界支持力の差が 10%, 20% 以内の 2 つの基準を用いた。また、解析の都合上、無次元限界移動距離の最小単位は $G = 0$ の場合、0.167, それ以外の場合は 0.25 である。内部摩擦角 ϕ が大きくなると、無次元限界移動距離も大きくなる。これは、内部摩擦角が大きい材料ほど塑性崩壊領域が大きくなることに起因すると考えられる。一方、パラメータ G と無次元限界移動距離の関係について、本解析の結果からははっきりした傾向が現れなかった。これについては、今後さらに細かいメッシュを用いた解析を行う必要がある。表-2 の結果は、移動荷重の影響範囲を定量的に表しており、工学的にも有用であると考えられる。

(5) 無限に移動する荷重と静止荷重での支持力の違い

これまでの議論から、限界移動距離 $(d/B)^*$ よりも移動距離が大きい場合は、シェイクダウン限界荷重がほぼ一定値に収束することが分かった。したがって、無限に移動する荷重、つまり移動範囲が $-\infty \sim +\infty$ となる移動荷重に対しても塑性安定を示すシェイクダウン限界荷重が評価できる。

次に、このような無限に移動する荷重のシェイクダ

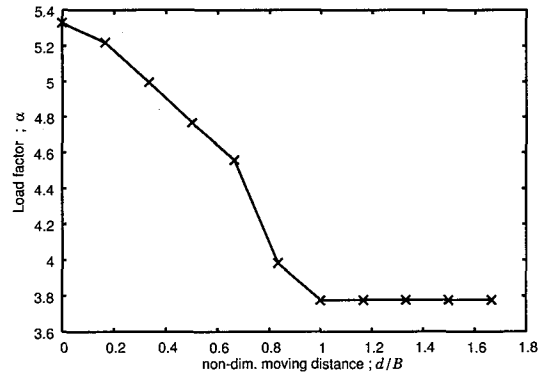


図-6 $\phi = 0^\circ$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係 (すべての G について一定)

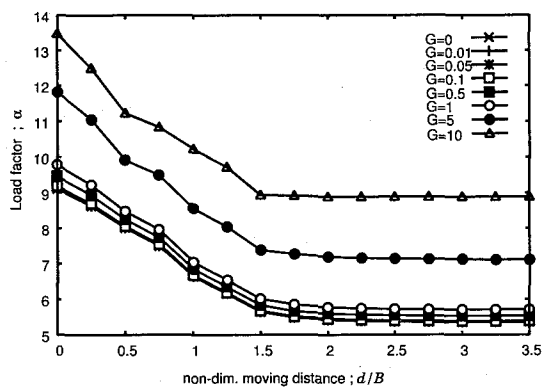


図-7 $\phi = 10^\circ$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

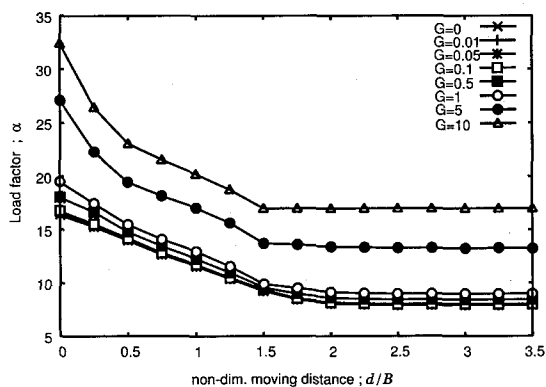


図-8 $\phi = 20^\circ$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

ウン限界荷重と静止荷重に対する極限荷重の比を表-3 に示す。表-3 は、内部摩擦角 ϕ が大きく場合ほど、またパラメータ G が大きくなって自重の効果が卓越する場合ほど、静止荷重と比較して移動荷重の支持力が大きく低下することを示している。

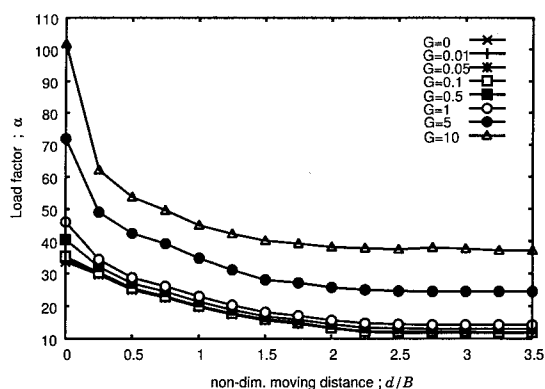


図-9 $\phi = 30^\circ$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

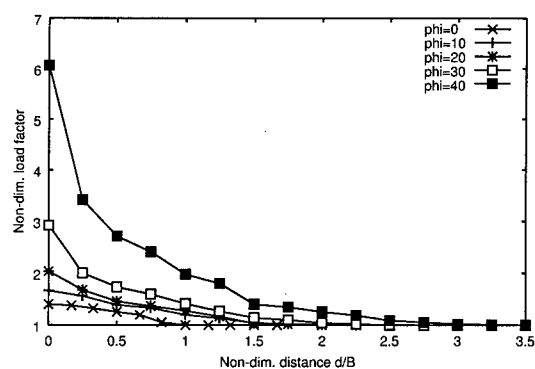


図-12 パラメータ $G = 5$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

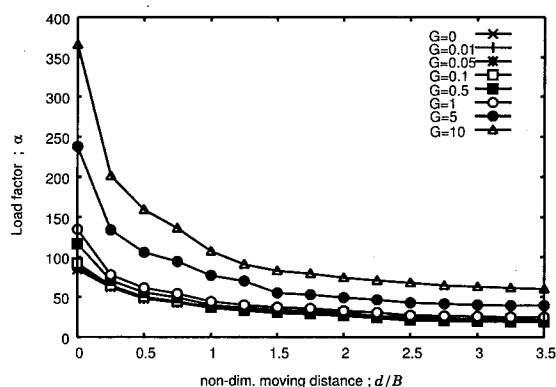


図-10 $\phi = 40^\circ$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

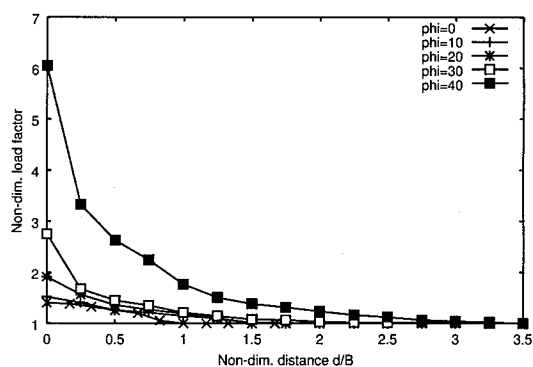


図-13 パラメータ $G = 10$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

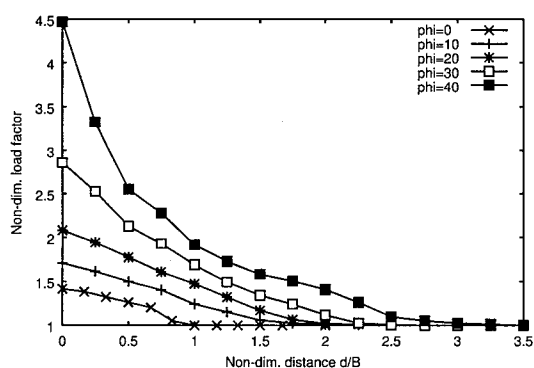


図-11 パラメータ $G = 0$ での無次元移動距離とシェイクダウン限界荷重の関係

表-2 無次元限界移動距離 $(d/B)^*$ とパラメータ G 、内部摩擦角 ϕ の関係

収束判定基準: 10%

$G \setminus \phi$	0°	10°	20°	30°	40°
0	0.83	1.5	1.75	2.25	2.5
5	0.83	1.5	1.5	2.0	2.5
10	0.83	1.25	1.5	1.5	2.75

収束判定基準: 20%

$G \setminus \phi$	0°	10°	20°	30°	40°
0	0.83	1.25	1.5	2.0	2.5
5	0.83	1.0	1.25	1.75	2.25
10	0.83	1.0	1.0	1.25	2.25

4. シェイクダウン解析法の利点

ここでは移動荷重問題を念頭に、直接法であるシェイクダウン解析法と増分形の弾塑性解析法について特徴を比較し、シェイクダウン解析法の利点についてまとめる。

4.1 移動荷重の表現

荷重状態 Γ_j から荷重状態 Γ_{j+1} への荷重の移動を表現する方法として、図-14に示すように、その間を細かく分割して中間的な荷重状態 $\Gamma^{(k)}$ を内挿表現する方法がしばしば用いられる。これは、重み $\omega^{(k)}$ による線形和

$$\Gamma^{(k)} = \omega^{(k)} \Gamma_j + (1 - \omega^{(k)}) \Gamma_{j+1}, \quad 0 \leq \omega^{(k)} \leq 1 \quad (45)$$

表-3 無限に移動する荷重と静止荷重での支持力の違い

$G \setminus \phi$	0°	10°	20°	30°	40°
0	0.71	0.59	0.48	0.35	0.22
5	0.71	0.60	0.49	0.34	0.16
10	0.71	0.66	0.52	0.36	0.17

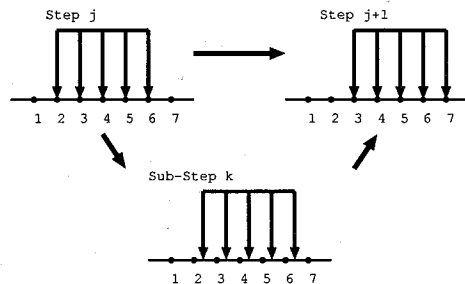


図-14 水平に移動する荷重の表現

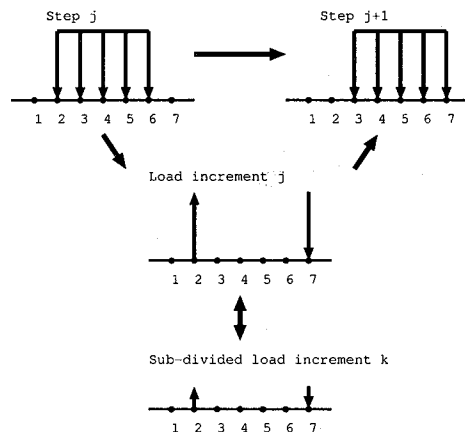


図-15 水平移動荷重による荷重増分の表現

として表現される。これを荷重領域で考えれば、線形外接領域 Γ_0 の隣り合う 2 つの頂点を結んだ辺上の荷重状態を表していることになる。前述のとおり、本論文で示したシェイクダウン解析の定式化では、2 つの荷重状態ベクトル Γ_j, Γ_{j+1} が荷重空間内に張る荷重領域の塑性安定性を評価するためには、その 2 つの荷重状態に対するシェイクダウン解析を行えば十分である。したがって、荷重の移動を表現するためには、節点 1 つ分ずつずらした荷重を考えれば良いことになる。

一方、増分形の解析の場合には、図-15 に示すように、節点荷重増分を与えて解く。このとき、荷重増分の大きさを適切に選択しなければ数値計算が不安定となる。そこで、一般的には荷重 Γ_j と荷重 Γ_{j+1} の荷重増分をそのまま用いるのではなく、図-14 に示した中間的な荷重状態 $\Gamma^{(k)}$ を考え、より細かな荷重増分（図-15 中の下図）を用いて計算する。さらに、安定した数値計算を行うために要求される荷重増分の大きさについては、数値計算前に知ることは難しいため、通常は数値実験的に安定性を確認する。このように、増分形の

解析では、荷重増分を細かくとるために解析ステップ数が増加する点、数値的な安定性を事前に知ることが難しい点が不利である。

4.2 メッシュ分割と数値計算量の関係

同じ境界値問題を解く際に、メッシュ分割による空間的な離散化の程度と数値計算量の関係がどのように表せるか着目してみる。メッシュ分割に伴って、節点力として移動荷重を作用させる節点数が増加するが、シェイクダウン解析では解くべき方程式の配列寸法の増加と線形外接領域 Γ_0 の頂点の数の増加が容易に分かる。さらに、主双対内点法による収束計算過程では、解くべき連立方程式の大きさは頂点の数によらないことや、内点法の収束計算では計算規模に対して必要とされる繰返し計算回数が鈍感とされることを考慮すると、数値計算量を決める要因はメッシュの節点数、要素数が支配的であると予想され、数値解析上シェイクダウン解析の利点である。

一方、増分形の弾塑性解析法では、荷重増分の大きさを事前に見積もることが難しいため、メッシュ分割と計算量の関係は必ずしも明確でない。これは、空間離散化の程度と時間離散化の程度のバランスが計算前には不明確であると言い替えても良い。なお、ここで言うバランスは定性的なもので、例えばメッシュは粗くても時間域で細かい離散化（あるいは細かな荷重増分）を要するような解析はバランスが悪く、メッシュの粗さに応じた時間域の離散化が可能な解析はバランスが良いと考える。

移動荷重に対する支持力問題を弾塑性解析法で解く場合、荷重係数、移動距離をパラメトリックに変化させた解析シリーズを行う必要があり、しかも個々の解析では数値的に安定な適切な荷重増分を決めてやる必要がある。もちろん、弾塑性解析法で移動荷重に対する支持特性を評価することは可能であるが、交通荷重や活荷重をキーワードとして地盤の支持力に関する弾塑性解析例を検索しても、系統的な解析例は殆んどないのが実情である。

5. 結論

本論文では、著者らが提案してきた混合型シェイクダウン解析法に関する研究の一環として、拘束圧に依存した剪断強度を示す $c-\phi$ 材料に対する混合型シェイクダウン解析法の数値解析プログラムを新たに開発した。さらに開発したプログラムを、移動荷重を受ける $c-\phi$ 材料の支持力問題へ適用し、その定量的な評価を試みた。その結果、以下の成果を得た。

- 材料物性として、内部摩擦角 ϕ と自重 ρg と粘着力 c の相対的な関係を表すパラメータ $G = \frac{\rho g B}{2c}$ に着目し、無次元移動量 d/B とシェイクダウン限界荷重の関係について系統的な解析を実施し、定量的な結果を得た。
- シェイクダウン限界荷重が一定値に収束する無次元限界移動距離 $(d/B)^*$ と材料物性の関係として、表-2 の結果を得た。

- 無限に移動する荷重に対するシェイクダウン限界荷重と静止荷重に対する極限支持力の比を求めたところ、表-3の結果を得た。
- これらの結果は、移動荷重を受ける $c-\phi$ 地盤の支持特性を知る上で基本的な情報であり、交通荷重を受ける路面の安定性評価などへの工学的展開を図るためにも重要な情報である。

さらに、直接法による解析法の展望について触れておく。

土構造物の性能照査設計を考えれば、本研究で評価したシェイクダウン限界荷重は、作用荷重に対する構造物の破壊に関わる終局限界を評価したことに当たる。一方で、常時の構造物の供用を考えれば、変形量で規定される使用限界を適切に評価することも、重要な課題である。直接法に属する残留変形量評価法も提案されている¹⁴⁾が、現段階では理論的な検討のレベルに留まっており、実際の数値解析例はない。

直接法を設計に用いるメリットとして、解析結果として得られる物理量が安全率や荷重係数のように設計上重要なインデックスであるため、工学的に理解しやすいことが挙げられる。この意味で、直接法による限界状態設計法の体系化も重要な課題であると考えられる。

謝辞

本研究の一部は平成17年度 文部科学省 科学研究費補助金若手研究(B) 15760360 (研究代表者: 小林俊一) の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Melan, E.: Theorie stasisch unbestimmter systeme, *Proc. 2nd Cong. Int. Assoc. Bridge and Struc. Eng.*, Berlin, pp. 43-64, 1936.
- 2) Koiter, W.: General theorem for elastic-plastic solids, in *Progress in Soild Mechanics*, North Holland, pp. 165-221, 1960.
- 3) Martin, J.B.: *Plasticity*, MIT Press, 1975.
- 4) Kamenjarzh, J.A.: *Limit analysis of solids and structures*, CRC Press, 1996.
- 5) Maier, G.: On some issues in shakedown analysis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, pp. 799-808, 2001.
- 6) Weichert, D. & Maier, G. (Eds.): *Inelastic behaviour of structures under variable repeated loads: direct analysis methods*, CISM, Springer Verlag, 2002.
- 7) Staat, M. & Heitzer, M. (Eds.): *Numerical Methods for Limit and Shakedown Analysis*, NIC Series 15, John von Neumann-Institut für Computing, 2003.
- 8) 小林俊一, 西川雅規, 田村 武: 混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズムに関する研究, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 561-570, 土木学会, 2004.
- 9) Kobayashi, S. & Nishikawa, M.: An Algorithm of Hybrid Type Shakedown Analysis, *Proc. WCCM VI in conjunction with APCOM '04*, Beijing, CD-ROM, 2004.
- 10) 福島雅夫: 数理計画入門, 朝倉書店, 1996.
- 11) 小島政和, 土屋 隆, 水野真治, 矢部 博: 内点法, 朝倉書店, 2001.
- 12) Cox, A.D.: Axially symmetric plastic deformation in soils - II - indentation of ponderable soils, *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 4, 371-380, 1962.
- 13) 小林 俊一, 酒井 拓磨, 田村 武: 混合型剛塑性有限要素法による摩擦性材料の支持力解析, 応用力学論文集 Vol. 7, pp. 483-492, 土木学会, 2004.
- 14) 小林俊一: 直接法による永久変形量の評価法について, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 535-542, 土木学会, 2004.

(2006年4月14日 受付)