

進行する界面剥離の簡易モデルと複合材料有限要素

A simple model of progressive debonding and a finite element of composite materials

河原 佳武*・谷田貝 圭介**・小山 茂***・岩熊 哲夫****

Yoshitake KAWARA, Keisuke YATAGAI, Shigeru KOYAMA and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修士(工) 千葉県(〒260-8667 千葉市中央区市場町1-1)

**TIS(株)(〒105-8624 東京都港区海岸1-14-5 TIS 竹芝ビル)

***正会員 博士(工) 信州大学工学部社会開発工学科(〒380-8553 長野市若里4-17-1)

****正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字6-6-06)

Partial debonding along interface of inclusions becomes an important problem in the initial stage of fracture phenomena of composite materials. We here employed a debonding model that takes stress transmission characteristics of inclusion into account, and built this model into a finite element. In its numerical procedure, stress re-distribution due to softening effect by developing debonding was considered. Furthermore, from a different point of view, damage model was introduced to take progressive debonding effect into account. Simple boundary value problems were solved to show feasibility of the models.

Key Words : composites, partial debonding, Mori-Tanaka theory, finite element

1. はじめに

材料の複合化は材料開発の有効な方法であり、土木分野に限らず、機械工学や電子工学の分野においても新材料開発が盛んである。実際、コンクリートの場合には靱性を高めるために鋼繊維を混入したFRC橋梁^{1),2)}も建設されている。その設計においては、最終的に用いられる構造システムでのマクロな挙動と、材料開発という観点からのミクロな挙動とのふたつを同時に検討する必要がある。FRPやFRCを用いた桁部材等の設計指針^{3),4),5)}においては、古典的な平均化手法に加えて、有限要素法を用いた均質化法が紹介され、材料開発の効率化に用いられようとしている。しかし、古典的な手法は精度が悪い一方、均質化法ではミクロとマクロを連成させる計算には手間がかかることも知られている。

これに対し著者らは、有限要素に解析的な平均化手法を組み込む提案をし、取扱が楽な森・田中理論⁶⁾に基づく平均化手法を用いてきた。この平均化では、対象が等方材料で介在物形状が楕円体でなければならないが、その精度についても多くの報告がある。また若干の改良で精度を上げられるという報告^{7),8)}もある。

さて、複合材料の強度を支配する要因の一つに介在物界面での剥離現象がある。この界面は製造過程で異物質が析出する場所であったり、また介在物形状によっては応力集中する場所でもある。そこでは、何らかの影響で界面で剥離が発生し、生じた剥離部分が亀裂となって界面に沿って、あるいは材料中に進展したり、ボイドになったりすること⁹⁾も確かめられている。この剥離を平均化手法に組み込むことができれば、より現実的な複合材料の強度把握が可能になる。

解析的な観点からの界面剥離問題の研究の中に Zhao と Weng による研究¹⁰⁾がある。このモデルでは、剥離発生以前には健全だった等方性介在物を、完全付着はしたまま界面剥離方向には応力を伝達しない直交異方性を持った仮想的な介在物(以後、仮想介在物と呼ぶ)で置き換えることによって、界面剥離を擬似的に表現している。このモデルの長所は、そのまま森・田中等の解析的な平均化手法に直接組み込むことができる点である。ただし、Zhao と Weng は進行性の剥離をモデル化したわけではなく、剥離の存在する材料特性をモデル化したに過ぎない。したがって剥離基準も提案されておらず、この剥離基準については、正確に実測したような文献を今のところみつけることができていない。これに対し著者ら¹¹⁾は、単純に界面の最大引張り主応力の向きに直交した面に剥離が生じるとしたが、進行性的な現象については剥離する領域が拡がることによって表現せざるを得なかった。

そこで、本研究では、剥離基準は上述のままとするが、剥離が進行することを、介在物の剛性低下による周りの応力再配分によって表すモデルと、損傷理論の考えを用いたモデルとを提示し、その有用性を検討する。

2. 界面剥離モデルと剥離基準

2.1 仮想介在物の横等方弾性係数

ここには文献^{12),13)}を参考にして、Zhao と Weng が提案したモデルを概説する。まず初期状態では介在物は等方弾性体であるとし、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) の x_1 方向を法線とする面が剥離した場合を例に考える。介在物内部の応力とひずみを σ_i, ε_i とし、弾性テンソル C_i の成

分を Voigt 表記して c_{ij} とする。つまり（下添え字 I を省略して）

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} \quad (1a)$$

$$\sigma_{22} = c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22} + c_{23}\varepsilon_{33} \quad (1b)$$

$$\sigma_{33} = c_{31}\varepsilon_{11} + c_{32}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33} \quad (1c)$$

$$\sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23} \quad (1d)$$

$$\sigma_{31} = 2c_{55}\varepsilon_{31} \quad (1e)$$

$$\sigma_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12} \quad (1f)$$

と書くことができる。界面剥離すると

$$\sigma_{11} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 \quad (2)$$

のように応力伝達が無くなる。したがってこの条件式 (2) を式 (1a), (1e), (1f) に代入すれば、

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} = 0 \quad (3a)$$

$$\sigma_{31} = 2c_{44}\varepsilon_{31} = 0 \quad (3b)$$

$$\sigma_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12} = 0 \quad (3c)$$

となる。また式 (3a) から、

$$\varepsilon_{11} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}\varepsilon_{22} - \frac{c_{13}}{c_{11}}\varepsilon_{33} \quad (4)$$

の関係が得られるため、以上を元の式 (1) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0 \\ \sigma_{22} &= \left(c_{22} - \frac{c_{21}c_{12}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{22} + \left(c_{23} - \frac{c_{21}c_{13}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= \left(c_{32} - \frac{c_{31}c_{12}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{22} + \left(c_{33} - \frac{c_{31}c_{13}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= 2c_{44}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} &= 0 \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。この応力ひずみ関係を

$$\sigma_i = C_i^d \varepsilon_i \quad (6)$$

と記すことにする。これが界面剥離をした仮想介在物内部の応力ひずみ関係であり、 C_i^d が Zhao と Weng によって提案された仮想介在物の弾性テンソルである。

2.2 剥離基準の設定

複合材料の界面剥離に関する実験に基づいて、円柱形ファイバーの長軸直角方向の界面強度に注目した研究¹⁴⁾がある。その研究では最終的に、円断面の法線方向応力が界面剥離に対して最も重要な要因であると結論づけている。この結論は直感的にも理解しやすい。本研究では、球形介在物の場合の界面剥離基準を次のように設

定することとした。後述のように、本解析では平均応力のみを未知関数としており、介在物中の平均応力の第 1 主引張り応力は、剥離前は界面のその主方向の応力と一致している。したがって、介在物内部の第 1 主引張り応力がある値に達したときにその主方向に直交する界面で剥離が発生するとした。この限界応力値をここでは「剥離応力」と呼ぶことにする。

一方、球ではない介在物形状が回転楕円体の場合には状況は少し難しく、長軸が他の 2 軸に比べてかなり長い針型の回転楕円体の場合、その長軸方向に界面剥離が発生しても、側面の付着によってまだ十分に応力を伝達するだろうということは容易に想像できる。同じことを Zhao と Weng¹⁰⁾も言及している。著者らの前の研究¹¹⁾でも楕円形介在物の場合には、界面剥離の発生は楕円長軸直角方向のみに限定し、その発生基準は楕円長軸直角方向の法線応力が剥離応力に達したときとしていた。しかし、繊維を除けば、土木材料で介在物とみなされる物体は比較的球体に近いと考えられるため、ここでは扁円・扁長介在物の場合にも、最大主引張り応力が界面剥離を支配すると仮定する。

2.3 増分理論に組み込んだ場合の問題点

後述のように、塑性を増分理論で与えることから、本研究では荷重増分に対する応答を累積させて解を求める方法をとる。このようにすると、界面剥離が発生した瞬間に解放されるはずの介在物の応力を零にして、その分を周囲に再分配される計算を厳密に行うことができない。そこで本研究の前半では、界面剥離による材料剛性の変化にのみ着目し、有限要素を解くプロセス内での介在物の応力の再分配を試みる。したがって、剥離した介在物中の応力は、剥離後も変化せず、零にはならないという問題は残ったままである。また本研究の後半では、剛性低下を考慮しない代わりに、損傷理論を用いた簡易モデルによって介在物の剛性そのものを変化させて応力の再分配をさせるモデルを提案する。

3. 森・田中理論を用いた巨視的弾塑性挙動予測と有限要素法への適用

3.1 二相弾塑性複合材料の森・田中理論

この手法は文献¹⁵⁾にも詳しいので、その概要を説明する。またここでは、介在物は補強材としてのみ働くと考え、降伏は介在物では起こらず母材でのみ生じるものとする。弾性的には等方な母材中に、ただ 1 種類の形状と材料特性を持つ無数の回転楕円体形状の等方弾性な介在物が同じ方向を向いて不規則に分布しているものとする。その接線弾性係数テンソルをそれぞれ C_m , C_i とする。このとき、母材と介在物各相の「平均の」増分応

力・ひずみ関係は

$$\dot{\sigma}_M = C_M (\dot{\epsilon}_D - \dot{\epsilon}_M^p) \quad (7a)$$

$$\dot{\sigma}_I = C_I \dot{\epsilon}_I \quad (7b)$$

と表せる。ここに $\dot{\sigma}_M$, $\dot{\epsilon}_D$ は母材部分の応力増分・ひずみ増分の体積平均量を表し, $\dot{\sigma}_I$, $\dot{\epsilon}_I$ は介在物内部の応力増分・ひずみ増分の体積平均量である。また $\dot{\epsilon}_M^p$ は母材部分の塑性ひずみ増分の体積平均量を表す。

森・田中理論では, もし介在物がなければ $\dot{\epsilon}_D$ のひずみが生じている部分に, 介在物が存在することによって乱れ成分 $\dot{\gamma}$ が生じると考えるので

$$\dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma} \quad (8)$$

という関係になるとしている。介在物同士の距離がある程度離れていると近似した場合, この介在物周辺の応力場・ひずみ場は, ほぼ無限体のそれで近似できるとする。このようにすると, Eshelby¹⁶⁾により乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は介在物部分の領域においては一定であることが分かっている。また, Mura¹⁷⁾の等価介在物法の考えを用いれば, この問題は, 実は介在物部分の材料を母材と同様の材料にした上で, そこに何らかの等価な増分 $\dot{\epsilon}^*$ (非適合ひずみ) を導入した問題と同じになることもわかっている。つまり式(7b)に式(8), (7a)を代入して

$$\dot{\sigma}_I = C_I (\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}) = C_I (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma} + \dot{\epsilon}_M^p) \quad (9a)$$

$$= C_M \{ C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma} + \dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^* \} \quad (9b)$$

が成立する。また乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は領域内の非適合ひずみと

$$\dot{\gamma} = -S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \quad (10)$$

という関係になることは Eshelby の発見である。ここに S は Eshelby テンソルと呼ばれ, つり合い方程式を解くことによって求められるテンソルであり, 母材のポアソン比と介在物形状のみで決まる定数パラメータである。したがって式(9)に式(10)を代入すれば

$$\dot{\sigma}_I = C_I C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - C_I S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) + C_I \dot{\epsilon}_M^p \quad (11a)$$

$$= \dot{\sigma}_M - C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \quad (11b)$$

となる。ここに I は4階の単位テンソルを表す。この式(11)の二つの式同士を等置することにより

$$\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^* = -\{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \{ (C_M - C_I) C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - C_I \dot{\epsilon}_M^p \} \quad (12)$$

が得られる。

巨視的な応力増分・ひずみ増分は体積平均で

$$\dot{\bar{\sigma}} = (1 - f) \dot{\sigma}_M + f \dot{\sigma}_I \quad (13a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (1 - f) \dot{\epsilon}_D + f \dot{\epsilon}_I \quad (13b)$$

と定義できる。ここに f は介在物の体積比率である。式(13a)に式(11b)を, 式(13b)に式(8), (7a), (10)をそれぞれ代入すれば

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= (1 - f) \dot{\sigma}_M + f \{ \dot{\sigma}_M - C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \} \\ &= \dot{\sigma}_M - f C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= (1 - f) (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p) \\ &\quad + f \{ (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p) - S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \} \\ &= C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - f S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) + \dot{\epsilon}_M^p \end{aligned} \quad (14b)$$

となる。さらに式(14)に式(12)をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \left[I + f C_M (S - I) \right. \\ &\quad \left. \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M \\ &\quad - f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_I) \right] C_M^{-1} \dot{\sigma}_M \\ &\quad - f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p + \dot{\epsilon}_M^p \end{aligned} \quad (15b)$$

が得られる。

すると式(15a)より母材部分の平均応力増分は

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_M &= \left[I + f C_M (S - I) \right. \\ &\quad \left. \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \\ &\quad \left[\dot{\bar{\sigma}} + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \right] \end{aligned} \quad (16)$$

となり, また介在物内部の平均応力増分は式(11b)に式(12)を代入して整理することにより

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_I &= \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M \\ &\quad - C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

式(15b), (16), (17)を整理すれば, 母材部分, 介在物部分の応力増分およびひずみ増分は最終的に次のような関係で表現できる。

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}} + D \dot{\epsilon}_M^p \quad (18a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B \dot{\bar{\sigma}} - E \dot{\epsilon}_M^p \quad (18b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} + F \dot{\epsilon}_M^p \quad (18c)$$

ここに, 平均剛性 $\bar{C}$ と A , B , D , E , F はすべて4階のテンソルで次のような形を持つ。

$$\bar{C}^{-1} = \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right]$$

$$\left[C_M + f C_M (S - I) \right. \\ \left. \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (19a)$$

$$A \equiv \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (19b)$$

$$B \equiv \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \\ \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (19c)$$

$$D \equiv \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (19d)$$

$$\left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ E \equiv \left[C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ - \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \\ \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (19e)$$

$$\left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ F \equiv I - \left[f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ + \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right] \\ \left[C_M + f C_M (S - I) \right. \\ \left. \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (19f) \\ \left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right]$$

界面剥離が発生した場合には、介在物の弾性テンソル C_I を式(6)で定義した仮想ファイバーの弾性テンソル C_I^d で置き換える。また、式(19)のテンソル計算は、介在物が球形ではない場合には、文献¹⁸⁾にある手法を用い行列計算によって実行した。楕円体介在物の向きは、楕円体の長軸方向を Euler 角 (φ, θ, ψ) を用いて表現した上で、各種テンソルの座標変換の中に組み込んだ。

3.2 母材部分の流れ則

母材は von Mises の降伏条件に従い、硬化則はべき乗則に従うものとし

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - F_M, \quad F_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sigma_M^y + h_M (\varepsilon_M^{eq})^{n_M} \right\} \quad (20)$$

を満たすものとする。ここに σ_M^y は母材の単軸引張り初期降伏応力、 h_M と n_M は硬化パラメータである。また相

当応力と相当塑性ひずみは

$$\sqrt{(J_2)_M} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_M : \sigma'_M}, \quad \varepsilon_M^{eq} \equiv \sqrt{2 \varepsilon_M^p : \varepsilon_M^p} \quad (21)$$

で定義した。

流れ則は関連流れ則に従うものとし

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M, \quad H_M \equiv - \frac{\partial F_M}{\partial \sigma_M} \frac{\partial F_M}{\partial \varepsilon_M^p} \quad (22)$$

と設定するが、べき乗則を用いていることから、式(20)を用いて

$$H_M = \frac{2^{(n_M/2)-1} n_M h_M}{\sqrt{3} (J_2)_M} (\varepsilon_M^p : \varepsilon_M^p)^{(n_M/2)-1} (\sigma'_M : \varepsilon_M^p) \quad (23)$$

という関係になる。

3.3 二相複合材料の弾塑性構成関係

有限要素に組み込むためには、巨視的な応力ひずみ関係が必要なので、その陽な表現を求めておく。まず式(22)に式(18a)を代入すると

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} + \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \dot{\varepsilon}_M^p \quad (24)$$

となり、母材部分の塑性ひずみ増分は

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (25)$$

となる。これを式(18c)に代入すると

$$\dot{\varepsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (26)$$

となり、最終的に巨視的な応力ひずみ関係が次のように求められる。

$$\dot{\sigma} = \left[\bar{C}^{-1} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \right]^{-1} \dot{\varepsilon} \quad (27)$$

この関係を

$$\dot{\sigma} = X \dot{\varepsilon} \quad (28)$$

と書けば、右辺の弾塑性係数テンソル X を有限要素法における要素接線剛性を作成する際に用いることになる。

3.4 有限要素法への適用

一般的な有限要素法における構成則だけを変更すればいい。要素は、文献¹⁹⁾に詳しい8節点アイソパラメトリック6面体要素を、非線形解析に対応させるため増分型に改訂したものを用いる。その場合、要素 e の要素接線剛性方程式は次のように書ける。

$$K_e \dot{d}_e = \dot{F}_e \quad (29)$$

d_e は節点変位ベクトル増分, F_e は節点荷重ベクトル増分である. K_e は要素接線剛性行列で,

$$K_e = \int_{\Omega_e} (\partial N_e)^T \{X\} (\partial N_e) dV \quad (30)$$

で定義される. N_e は形状関数, ∂ は適切な微分演算子からなる行列である. ここで用いている行列 $\{X\}$ が, 式 (28) の接線係数テンソル X に対応した行列である.

3.5 界面剥離による応力再分配

剥離の生じた介在物周辺では, その介在物が支えている分の応力が周りに再分配される. この現象を増分計算で近似的に追跡するために, 本研究の前半では, 剥離したことによる全体接線剛性の増分分に相当する応力を再分配する手法を用いる. ある任意の状態の複合材料の接線剛性方程式が

$$\dot{F} = K \dot{u} \quad (31)$$

であったとする. ここである介在物界面に剥離が発生すると, その介在物の剛性が仮想介在物の直交異方剛性に変化するため, 対応する全体接線剛性も ΔK だけ変化する. この変化分に相当する変位の変化分を $\Delta \dot{u}$ とすると, この剥離が生じて応力の再分配が行われている状態は, 外力が不変な過程だと仮定すると

$$\dot{F} = (K + \Delta K) (\dot{u} + \Delta \dot{u}) \approx K \dot{u} + K \Delta \dot{u} + \Delta K \dot{u} \quad (32)$$

となる. したがって式 (31) との差をとって

$$-\Delta K \dot{u} = K \Delta \dot{u} \quad (33)$$

によって求められる $\Delta \dot{u}$ が, 応力再分配によって生じる節点変位になる. ただし, この再分配を施した場合に, 新たに剥離基準に達した要素が現れた場合は, それが無くなるまで繰り返し計算を行うこととした.

4. 応力再分配モデルによる数値解析結果 — 3次元問題

4.1 1軸引張り

最初に本手法の特性と適用性を確認するために, 最も単純な問題である1軸引張り問題を例に検討する. 一様応力状態なので1要素で解析してもよさそうだが, 本手法では一要素には一種類の介在物しか含まれないため, 実際の材料のように介在物の向きがランダムな場合を対象とする場合には, 複数の要素を用いる必要がある. また, 順次剥離が発生するのを見るためにも, 解析対象は図-1のような, 桁高1m, 軸方向5m, 幅0.5mの棒とし, 要素は軸方向に50分割, 桁高方向に10分割, 幅方向に6分割とした3000要素でモデル化する. 変位境界条件は, 左端の全ての節点を軸方向に固

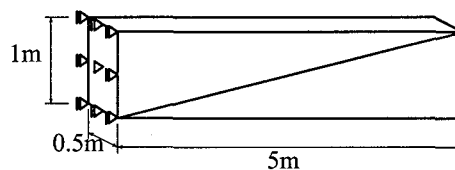


図-1 解析対象

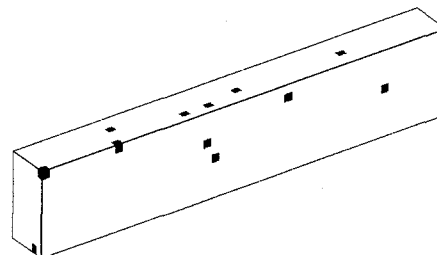


図-2-a $p = 84 \text{ MPa}$ の場合

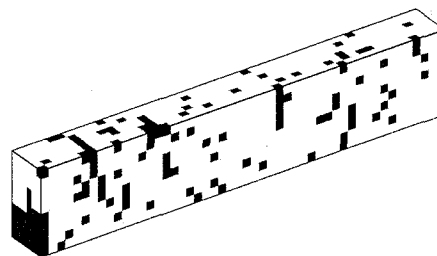


図-2-b $p = 96.6 \text{ MPa}$ の場合

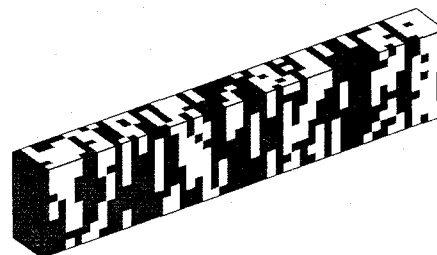


図-2-c $p = 105 \text{ MPa}$ の場合

図-2 回転楕円体の介在物がランダムに分布した場合の状態図

定し, 左端中央の一点のみ3方向全て固定する. 荷重条件は, 梁右端に等分布荷重増分 $\Delta p = 0.42 \text{ MPa}$ を与える. 材料は, 2124Al 母材中に補強材として SiC 繊維を体積比 20% で介在させた複合材料を想定し, 文献²⁰⁾から 2124Al の材料定数をヤング率 $E_M = 60 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu_M = 0.3$, 降伏応力 $\sigma_M^Y = 180 \text{ MPa}$ ¹⁾, 硬化パラメータ $h_M = 700 \text{ GPa}$, $n = 0.55$ とした. 一方, SiC 繊維の材料定数をヤング率 $E_f = 450 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu_f = 0.2$ とした. 介在物の形状は球体, もしくは半径比 1:1.2 のランダムな向きを持つ扁長回転楕円体とする.

¹⁾ 文献²⁰⁾の平均的降伏応力から Voigt 平均として逆算した値.

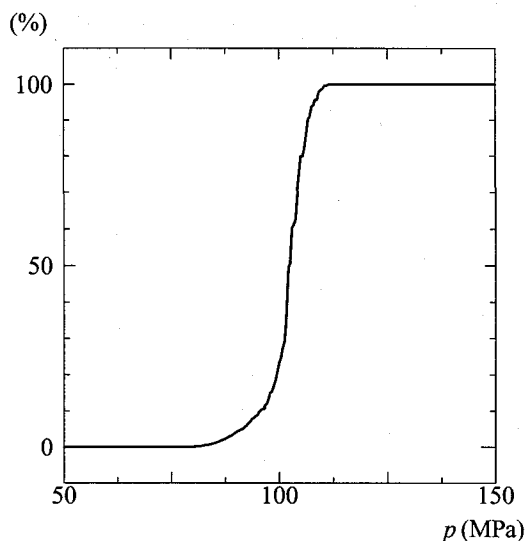


図-3 剥離が発生した要素の比率

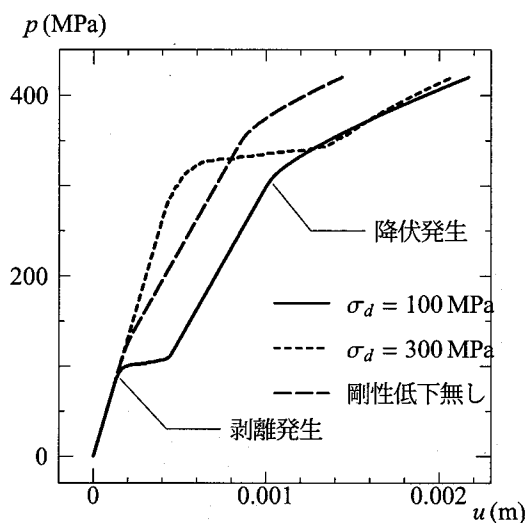


図-4 剥離応力 σ_d が違う場合の荷重変位曲線

(1) 応力再配分による影響

図-2は各荷重段階での要素の状態図である。ここでは、剥離応力は $\sigma_d = 100$ MPa とした。白い部分は剥離も降伏も発生していない状態を表し、濃い灰色は剥離のみ発生した要素を表している。ここでの設定では弾性域で剥離が発生しているため、図-2には白色と濃い灰色の要素しか描かれていない。介在物がランダムに分布しているため、図-2-a から図-2-c に向かって、剥離はランダムに発生し、荷重が進むに連れて剥離範囲が広がって行く。このときの剥離した要素数の全体に対する割合を示したのが図-3である。また図-4の実線が、荷重-変位曲線である。最初の剥離以後、小さい荷重増分の間に次々と剥離が多数生じてくるため、荷重変位曲線は変位する方向に急にシフトしている。図-2-c の状態ではほぼすべての要素で剥離が生じるので、再度剛性が高くなり、降伏に向かう。なお、破線は応力再配分をしない場合の応答である。

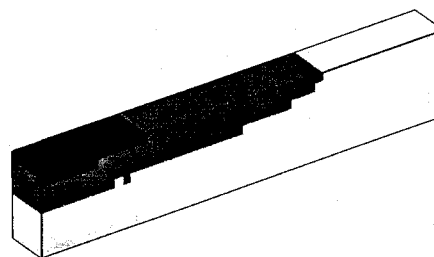


図-5-a 応力再配分を考慮した場合

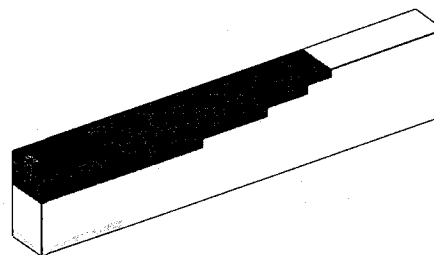


図-5-b 応力再配分を考慮しない場合

図-5 球形介在物の場合の状態図 ($p = 150$ MPa)

(2) 剥離応力による影響

前の例は剥離応力が小さかったため、弾性状態でほとんどすべての要素で剥離が生じた。ここでは剥離応力を $\sigma_d = 300$ MPa と大きくし、その影響を検討する。この場合の荷重変位曲線が図-4の点線である。この設定では、剥離と母材の降伏がほぼ同時に広がった。また界面剥離により発生する応力再配分によって、その要素で剥離が起こると同時に母材に再配分された応力が付加されるため、降伏が促されている要素も存在した。また、剛性の変化 ΔK による応力再配分によって生じる変位量は、周りの塑性変形をさらに増加させ、剥離による荷重変位曲線の不連続性が比較的急になっている。載荷荷重が $p = 350$ MPa になると双方とも全ての要素で剥離と降伏が起こっているため、それぞれの接線剛性はほぼ等しくなっている。前述のように、剥離後の介在物の応力は剥離直前のままで変化しないため、文献²¹⁾のような応力低下(軟化)は生じないが、変位のジャンプはうまく捉えることができた。

4.2 片持ち梁の曲げ

次に最も単純な境界値問題の例として、図-1に示した領域の右端に、鉛直下向きに分布荷重を載荷した曲げ問題の解析を行った。代表的な例として剥離応力は $\sigma_d = 100$ MPa とし、介在物は球形とした。

載荷荷重が 150 MPa レベルでの状態を図-5に示した。黒い部分は剥離と降伏が生じており、濃い灰色は剥離のみの、薄い灰色は降伏のみの、白い部分は弾性状態を表している。界面剥離は引張り応力でしか起こらないため、当然、梁の上層でのみ界面剥離が発生している。界

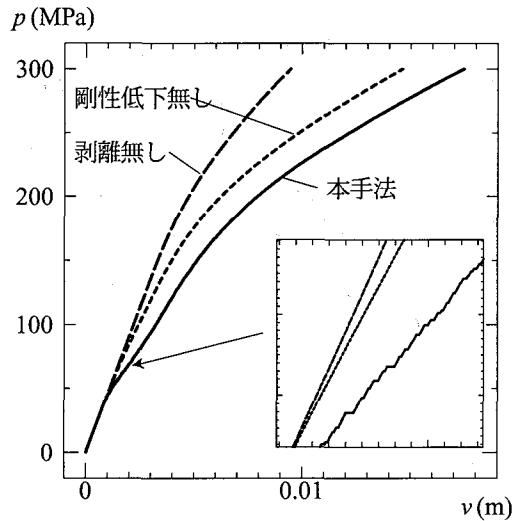


図-6 応力再配分を考慮した場合の荷重変位曲線

面剥離による応力再配分を考慮した場合は、無視した場合よりも剥離領域が若干広がっている。これは、一つの要素が剥離したことにより発生する再分配応力によってその周辺の要素が誘発的に剥離するためである。また、上層に注目してみると、剥離による応力再配分を考慮した場合は、無視した場合と比較して、母材の降伏領域が広がっている。これも再配分の影響である。

図-6には、片持ち梁の右端中央節点の下向き方向の荷重-変位曲線を示した。実線は剥離による応力再配分を考慮に入れた場合、点線は界面剥離は発生するが剥離による応力再配分は考慮しない場合、破線は剥離が発生しない場合の結果である。剥離が発生した段階で剛性に変化が生じ、誘発的に発生する剥離も考慮した場合が最も軟らかい結果になっている。図-6の右下には、剥離発生直後のそれぞれの荷重変位曲線を拡大した図も示した。界面剥離による応力再配分を考慮した場合には曲線が階段状になっている。前節の一軸引張りでは、小さい荷重増分の間にほぼすべての要素で剥離が生じていたために大きなジャンプが生じたが、曲げの場合は要素ごとに異なる荷重ステップで発生した剥離によって、応力再配分に相当する変位が細かいジャンプをしながら、荷重も次第に上昇している。

5. 損傷理論によるモデル化 — 平面ひずみ問題

次に、進行性の剥離をモデル化するのに損傷理論の適用を試みる。この節では、第3.5節で導入した剛性低下の演算を行わず、その代わりに、界面に生じた剥離が界面に沿って（とは必ずしも制限はしていないが）発達するのを、損傷パラメータで代表させ、そのパラメータで介在物の剛性を低下させる手法を提案する。つまり図-7の中央の図に示したように、上下方向の最大主引張り

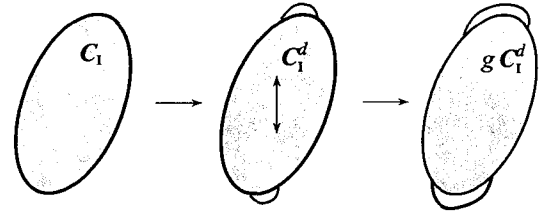


図-7 剥離発生とその進展・剛性低下

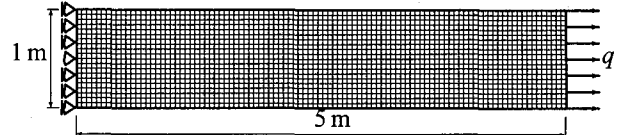


図-8 解析対象のモデル

応力が剥離応力に達した瞬間に、介在物の剛性が仮想介在物のそれと置き換わる。その後はある損傷パラメータ g ($0 \leq g \leq 1$) を導入し、それに従って介在物の剛性 C_1^d が低下するモデル（右図）を考える。研究開始時には、界面でのせん断によるモード II の破壊も検討する積もりでいたため、応力分布の向きを容易に把握できる平面ひずみ問題での定式化をこの節では行う。そういう点では、前節の3次元解析とは比較ができなくなっていることに注意して欲しい。

損傷パラメータ g は、文献²²⁾等でも示されたように、実験結果等を参考にして

$$g \equiv \exp(-H\varepsilon^d) \quad (34)$$

と定義する。ここで ε^d は母材の損傷を代表する何らかのひずみ尺度である。 H は損傷に関する材料パラメータで、この進展則を求めると

$$\dot{g} = -H\varepsilon^d g \quad (35)$$

となり、パラメータ H は文献²²⁾のモデルを簡略化して

$$H = \frac{\sqrt{\pi d} \sigma_M^y}{K_{IC}} \quad (36)$$

で与える。ここに d は介在物の大きい方の粒径、 σ_M^y は母材の降伏応力、 K_{IC} は母材の破壊靱性である。つまり図-7の中央と右の図に示したように、最初の剥離で生じる初期剥離（初期亀裂）の大きさは粒径に依存すると考える。大きい介在物に生じる剥離は比較的大きいとするのである。それが進展するときには、モード I の破壊と同じような現象が生じるとモデル化し、初期亀裂長さを代表する粒径の平方根と破壊靱性を含んだパラメータ H によって、現象が支配されるというモデル²²⁾になっている。

そして初期剥離が生じた後は、仮想介在物の剛性 C_1^d が g の変化に伴って減少していくことで、剛性低下をモデル化する。つまり

$$g := g + \dot{g}, \quad C_1^d := g C_1^d(\text{初期剥離時}) \quad (37)$$

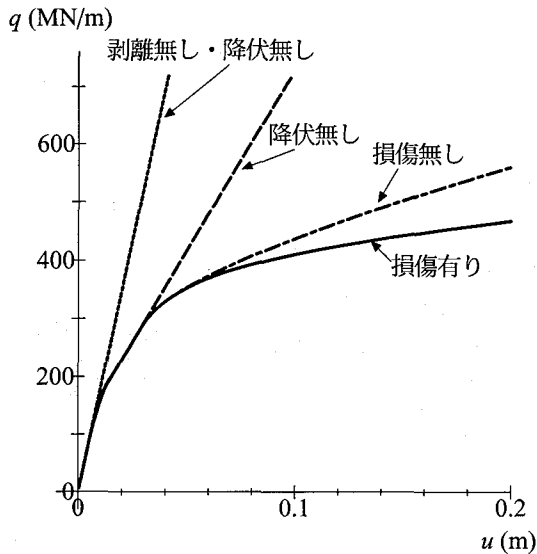


図-9 典型的な荷重変位関係

と設定する。なお、剥離が引張りで生じるとしているので、ここで用いる ε^d は、その剥離が生じた最大主引張り応力方向の母材の塑性ひずみ成分を用いることにした。

前節の例と同様、図-8 に示した引張りモデルの挙動を求める。ここでは平面ひずみの四節点アイソパラメトリック四辺形要素を用い、水平方向に 100 分割、上下方向に 20 分割した 2000 要素で解析した。材料は前節と同様だが、母材の初期降伏応力は元々の文献²⁰⁾に指定された複合材料全体の実験値 $\sigma_M^y = 290 \text{ MPa}$ に設定した。剥離応力は $\sigma_d = 200 \text{ MPa}$ とし、介在物は 1:5 の楕円柱で最初は長径が $d = 100 \text{ mm}$ であると設定した。破壊靱性は実際には例えば文献²²⁾にもあるように $50 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ 程度の値をアルミニウム合金は持つようだが、上記のような設定でそのままの値を用いると、粒径の及ぼす影響が小さすぎたため、ここでは極端な例として $K_{Ic} = 0.11 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ と小さくした。

図-9 が典型的な荷重変位関係であり、ここで導入した損傷の影響で、剛性がかなり小さくなっていることが明らかである。特にここでは強度の粒径依存がどのようにモデル化できているかを観察したいので、次の図-10 に示したように数種類の粒径に対する同様の荷重変位曲線を求めた。本解析モデルでは、単純に硬化するだけの母材であるため、明確なピーク強度を示さないで、高張力鋼等で用いられる 0.2% オフセット耐力の考え方を流用し、この荷重変位曲線で伸び変位が 0.5 m のオフセットを持つ荷重レベルを強度とみなした。用いた材料パラメータの範囲では 10% もの伸びた状態を比較していることになり非現実的ではあるが、このようにしたのが同図の点線のオフセットである。破線の $d = \infty$ というのは、剥離した瞬間に介在物の剛性を零にした場合 ($g = 0$) の応答に対応する。このオフセット強度を粒径

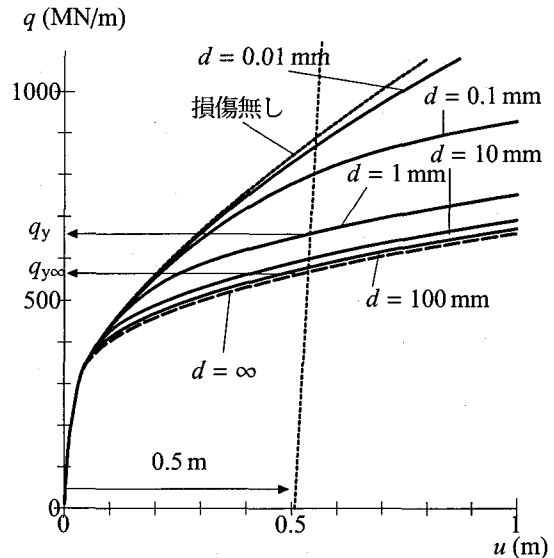


図-10 粒径を変更したときの荷重変位関係

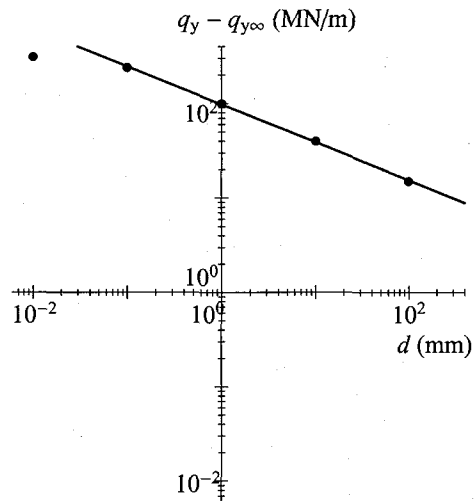


図-11 粒径と近似的な強度との関係

と両対数グラフにプロットしたのが図-11 である。 $d = 0.01 \text{ mm}$ の結果では、このオフセット値のレベルではまだ十分な剥離の進展が終わっていないため、このデータを除いて最小二乗法で結んだのが実線である。この勾配は約 0.4 であった。つまり剛性低下の程度を粒径の 0.5 乗としてモデル化した場合、その強度は粒径の 0.4 乗で小さくなることを示すことができた。

6. おわりに

解析的な平均化手法である森・田中理論と相性のよい Zhao と Weng による界面剥離モデルを組み込み、2つの方法で進行性剥離をモデル化した。その結果、数値解析手法としての応力再分配を行った場合には

- 文献²¹⁾のような、剥離後の応力再分配に伴う変位の

ジャンプを予想できた。

- 剥離応力レベルの違いによって、剥離発生の初期段階付近の材料の挙動には大きな差が生じるが、剥離の進展がある程度進みきった場合にはその差は小さくなる。
- 剥離した介在物の応力再分配によって、その周辺では付加的な界面剥離や降伏が誘発されることも示すことができた。

という結論を得た。また、損傷モデルを導入した場合には、次のような知見を得た。

- 剥離による損傷の程度が粒径に依存する破壊力学的なモデルを用いた場合、複合材料強度も粒径に依存し、その依存の割合の程度の例を示すことができた。

なお、ここで考えた2つのモデルは、当初は同じ現象を異なる観点から考慮したものと捉えて研究を始めたが、結果を検討するにつれ、両者共に考慮したモデルが実態に近いと考えるようになった。これについては今後の課題としたい。

最後に、進行性剥離をこのように扱う場合の重大な問題点の一つあり、そこでは大きな仮定をしている。つまり、剥離した介在物は仮想介在物になり、その剛性は等方性ではなく横等方性になる。そのような場合のEshelbyテンソルを厳密に求めることは困難であるため、ここでは応力集中の程度を把握する部分だけにはこの横等方性を無視している。もちろん、介在物内の応力値は横等方性材料の剛性を用いて求めているが、この部分は解析的な手法のメリットを活かす限界とも考えられる。

参考文献

- 1) 田中良弘, 武者浩透, 大竹明朗, 下山善秀: 超高強度繊維補強コンクリートによるPC歩道橋の設計施工法, コンクリート工学年次論文集, Vol.24, pp.1603-1609, 2002.
- 2) 武者浩透, 大竹明朗, 児玉明彦, 小林忠司: 超高強度コンクリート系新素材「ダクタール」を用いたPC橋梁の設計・施工—酒田みらい橋—, プレストレストコンクリート, Vol.45, pp.40-48, 2003.
- 3) 土木学会構造工学委員会FRP橋梁研究小委員会: FRP橋梁—技術とその展望—, 構造工学シリーズ14, 2004.
- 4) 土木学会コンクリート委員会SFRCを用いたRC柱部材の設計方法検討小委員会: 鋼繊維補強鉄筋コンクリート部材の設計指針(案), コンクリートライブラリー97, 1999.
- 5) 土木学会コンクリート委員会超高強度繊維補強コンクリート研究小委員会: 超高強度繊維補強コンクリートの設計・施工指針(案), コンクリートライブラリー113, 2004.
- 6) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metal.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 7) Ju, J.W. and Zhang X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.
- 8) Iwakuma, T. and Koyama, S.: An estimate of average elastic moduli of composites and polycrystals, *Mech. Mater.*, Vol.37, pp.459-472, 2005.
- 9) Gamstedt, E.K. and Sjogren, B.A.: Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse piles, *Composite Sci. and Tech.*, Vol.59, pp.167-178, 1999.
- 10) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.493-507, 1997.
- 11) 樋口耕平, 岩熊哲夫: 界面剥離を組み込んだ複合材料有限要素, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.8, pp.367-376, 2005.
- 12) Ju, J.W. and Lee, H.K.: A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of partially debonded ductile matrix composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.307-332, 2001.
- 13) Zheng, S.F., Denda, M. and Weng, G.J.: Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite, *Mech. Mater.*, Vol.34, pp.493-507, 1997.
- 14) Tandon, G.P.: Evaluation of interfacial normal strength in a SCS-0/epoxy composite with cruciform specimens, *Comp. Sci. Tech.*, Vol.60, pp.2281-2295, 2000.
- 15) 岩崎智昭, 岩熊哲夫, 小山茂: 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.273-282, 2002.
- 16) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 17) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
- 18) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, 1993.
- 19) 富田佳宏: 数値弾塑性力学—有限要素シミュレーション基礎と応用—, 養賢堂, 1990.
- 20) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- 21) 松井 和己, 寺田 賢二郎: 界面剥離を考慮した弾塑性体のマルチスケール解析, 計算工学講演会論文集, Vol.7, pp.513-516, 2002.
- 22) Horstemeyer, M.F. and Gokhale, A.M.: A void-crack nucleation model for ductile metals, *Int. J. Solids Structures*, Vol.36, pp.5029-5055, 1999.

(2006年4月13日受付)