

BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析

Vibration analysis of rectangular Mindlin plates by BF-spline Ritz method

名木野 晴暢*・水澤 富作**・三上 隆***

Harunobu Nagino, Tomisaku Mizusawa and Takashi Mikami

* 工(修) 日本学術振興会特別研究員 DC 北海道大学大学院博士後期課程 工学研究科北方圏環境政策工学専攻
(〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

** 工博 大同工業大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

*** 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

This paper presents a numerical method, the BF-spline Ritz method, for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates with arbitrary boundary conditions. The proposed method utilizes admissible functions comprising the B-spline functions multiplied by a boundary function to define the Ritz trial function for the transverse displacement and rotations of the Mindlin plates. The geometric boundary conditions of the plate at edges are automatically satisfied using boundary functions. To demonstrate the validity and accuracy of the BF-spline Ritz method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by exact and other numerical methods. Excellent convergence and high accuracy are obtained by the present method regardless of arbitrary boundary conditions. The effects of thickness-width ratio, aspect ratio and boundary conditions on frequency parameters of rectangular Mindlin plates are shown in tabular forms to serve as benchmark data for future development of new numerical methods.

Key Words: BF-spline Ritz method, boundary function, free vibration, Mindlin plate

キーワード: BF-spline Ritz 法, 境界関数, 自由振動, Mindlin 板

1. まえがき

構造物の大型化や構造の合理化にともない, 比較的板厚の大きな平板が構造要素として用いられている. このような厚板の振動問題では, 面外せん断変形や回転慣性の影響が顕著に現れるので, これらの影響を考慮した種々のせん断変形板理論が提案されている¹⁾. 平面保持の仮定を修正した Mindlin 板理論²⁾は, それぞれ独立したたわみと 2 つの回転角で表される 3 元連立偏微分方程式で与えられる. したがって, 任意の境界条件を有する Mindlin 板の閉じた解を求めることが困難になるので^{3), 4)}, Ritz 法や有限要素法などの数値解析法を用いて解析されている.

種々の試験関数を適用した Ritz 法⁵⁾は, 定式化の簡便さや比較的早い解の収束性を有しているので, 平板の振動解析法として, 古くから多用されて来ている. エネルギー変分原理に基づく Ritz 法で仮定される試験関数には, 1) 少なくとも幾何学的境界条件を満たす許容関数, 2) 剛体モードを表す係数項を含む関数と 3) 汎関数に現れる導関数の最高次数以上の連続性を有する滑らかな関数であるこ

とが必要である. ここで, 1)の幾何学的境界条件に対する許容関数は, 級数の各項毎に満たす方法と, 級数で表される全体関数に対して満足させる方法に分けられる. 平板解析に用いる試験関数には, はりの固有関数⁶⁾⁻⁸⁾, ベキ級数多項式⁹⁾, 直交多項式¹⁰⁾や Chebyshev 多項式¹¹⁾などの全体関数(global functions)が挙げられる. 幾何学的境界条件を自動的に満たすために, 境界関数(boundary function)を導入したベキ級数多項式, 直交多項式や Chebyshev 多項式が Ritz 法の許容関数として用いられている.

Leissa⁹⁾は, はりの固有関数を Ritz 法の許容関数に仮定し, 任意の境界条件を有する長方形板の振動解析を行っている. Liew ら¹⁰⁾は, 自動的に幾何学的境界条件を満足させるために境界関数を導入した直交多項式を Ritz 法に適用し, 任意の境界条件を持つ長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている. また, 成田⁹⁾は, ベキ関数と境界インデックス(境界関数)を組み合わせた許容関数を Ritz 法の試験関数に適用して, 任意の境界条件を有する積層板の振動解析を行っている. Zhou・Cheung⁹⁾は, 分布荷重を受ける Timoshenko 梁の静的たわみ関数を誘導し, これを許容関

数に採用した Ritz 法を用いて長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている。また、最近、Zhou ら¹¹⁾は、Chebyshev 多項式に境界関数を導入した許容関数を Ritz 法の変位関数に仮定し、3次元弾性論に基づく長方形厚板の振動解析を行っている。

このような許容関数を Ritz 法の試験関数に適用すれば、解の収束が早くなるが、級数項を増大すると多項式の次数が急増してくるので、係数行列を求めるための数値積分に時間を要する。また、積分点の増大にともない演算回数が増加し、計算誤差が入りやすくなると思われる。また、任意の全体関数に対して、幾何学的境界条件に対応する仮想バネを導入する方法^{12)・14)}や Lagrange 乗数を適用した修正 Ritz 法¹⁵⁾も用いられているが、仮想バネ値の決定方法や Lagrange 乗数を適用した修正 Ritz 法で定式化される係数行列の非正値化が数値計算上の課題になっている。

一方、局所基底で表される B-spline 関数などの区分的多項式関数(piecewise polynomial function)が、Ritz 法の試験関数に用いられている。 $k-1$ 次の B-spline 関数は、 $k-2$ 階の導関数までの高次の連続性を有する任意の区分的多項式であるので、与えられた幾何学的境界条件を満たすために種々の境界条件の導入法が提案されている。これまでに提案されている境界条件の導入法を大きく分けると、以下のように4つに分類される。

(i) 多重節点法: $k-1$ 次の B-spline 関数を構築するために、解析領域に設ける区分点(knot)の他に、1次元問題では境界点を含む領域外にそれぞれ $k-1$ 個の付加区分点が必要になるが、この付加区分点を境界点に重ね合わせて境界条件を導入する方法である。Antes¹⁶⁾は、3 次の B-spline 関数と多重節点法を適用した Ritz 法を用いて、長方形板の曲げ解析を行っている。また、Fujii¹⁷⁾は、B-spline 関数と多重節点法を適用した混合法の定式化を用いて、長方形板の振動解析を行っている。しかしながら、節点を重ねることにより B-spline 関数の導関数の連続性が低下する。

(ii) 局所 spline 関数法:境界条件を満たすために、境界点に関係する spline 関数のみを修正した修正 B-spline 関数を誘導し、重み付き残差法や Ritz 法の試験関数に仮定する方法であり、古くから微分方程式の解法として用いられている。Fan ら¹⁸⁾は、3 次の B-spline 関数の局所 B-spline 関数を用いた修正 B-spline 関数と単純多項式を仮定した spline 有限帯板法を定式化し、平板の曲げ、振動や座屈解析に適用している。Dawe ら¹⁹⁾は、Fan ら¹⁸⁾の方法を一般化して、局所 B-spline 関数の座標変換から5次までの修正 B-spline 関数を誘導している。

(iii) 仮想バネ法^{12)・13)}:幾何学的境界条件に対応する鉛直バネと2つの回転バネのひずみエネルギーを求めて、全ポテンシャルエネルギーに付加したペナルティ法の一方法であり、点支持や局所的な拘束も容易に考慮できる。また、Ritz 法の試験関数に任意の B-spline 関数を適用できるという利点があるが、仮想バネの大きさにより係数行列が悪条件になるという問題が生じるため、その値は試行錯誤で求め

る必要がある。

(iv) Lagrange 乗数法¹⁵⁾:Lagrange 乗数を用いて境界条件を導入した修正 Ritz 法であり、幾何学的および力学的境界条件の両方を考慮できる。しかしながら、定式化された係数行列は、対称であるが正値でなくなるので、標準固有値問題として解析する必要があり、自由度も大きくなる。

しかしながら、先に述べた境界関数と B-spline 関数とを組み合わせた許容関数の定式化の試みと Ritz 法への適用については、著者らの知る限りにおいて未だ検討されておらず、検討する価値があると思われる。

本論文の目的は、 $k-1$ 次の任意の B-spline 関数が幾何学的境界条件を自動的に満足するように、境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義し、これを Ritz 法の変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法(Boundary Function-spline based Ritz method)を定式化することである。本手法を長方形 Mindlin 板の振動解析へ適用し、解の収束性や解析精度について検討を行い、本手法の有用性および解の妥当性について明らかにしている。また、厳密解を得ることが困難な境界条件を有する厚板の振動特性に与える幅厚比、辺長比や境界条件などの影響についても明らかにしている。

2. BF-spline Ritz 法

ここでは、境界関数を導入した B-spline 関数を許容関数に仮定した Ritz 法を定式化する。図-1 に示すように、定式化には、次式の無次元座標系(ξ, η)と無次元たわみ $w(\xi, \eta)$ を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, w = W/h \quad (1)$$

ここで、 a, b, h は、それぞれ長方形板の長さ、幅と厚さであり、 $W(\xi, \eta)$ は面外たわみである。

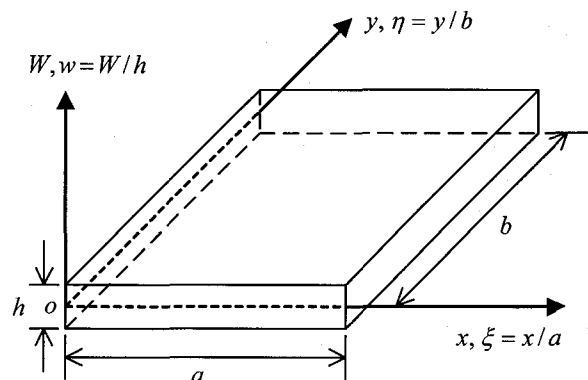


図-1 長方形 Mindlin 板と座標系

2.1 B-spline 関数

局所的な基底関数で表される B-spline 関数は、切斷べき関数の k 階差分商で定義され、直交性を有する区分的多項式である。また $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証された滑らかな関数である²⁰⁾。

この関数の代数的特性については、Boor の論文²¹⁾で詳述されているので、ここでは基本式について簡単に述べる。

今、すべての i について、 $x_i \leq x_{i+1}$ なる関係を満たす実変数 x_i に対して、次の関数を定義する。

$$g_k(s; x) = (s - x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s - x)^{k-1} & s \geq x \\ 0 & s < x \end{cases} \quad (2)$$

この関数の k 次差分商として、B-spline 関数 $M_{i,k}(x)$ は、次式のように定義される。

$$\begin{aligned} M_{i,k}(x) &= g_k(x_i, \dots, x_{i+k}; x) \\ &= \{g_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; x) \\ &\quad - \{g_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}; x)\} / (x_{i+k} - x_i)\} \end{aligned} \quad (3)$$

また、正規化された B-spline 関数 $N_{i,k}(x)$ は次式で表される。

$$N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) M_{i,k}(x) \quad (4)$$

したがって、この関数を組み合わせて、次式のような任意の関数を作り出すことができる。

$$f(x) = \sum_i C_i N_{i,k}(x) \quad (5)$$

ここで、 C_i は未定係数である。

式(5)に示す関数の x に関する j 回微分は、式(7)のような漸化式で計算される。

$$\frac{d^j f(x)}{dx^j} = \sum_i C_i N_{i,k}^{(j)}(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_{i,k}^{(j)}(x) &= (k-1) \{N_{i,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k-1} - x_i) \\ &\quad - N_{i+1,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k} - x_{i+1})\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$N_{i,k}^{(0)}(x) = N_{i,k}(x) \quad (8)$$

である。

2.2 境界関数および許容関数

$k-1$ 次の区分的多項式で定義される B-spline 関数は、与えられた境界条件を満足しない任意の関数である。ここでは、領域 $[0, 1]$ で幾何学的境界条件を自動的に満足させるための境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義する。

表-1 に示す $F_x(\xi), F_y(\xi), F_w(\xi)$ は、それぞれ η 軸に平行な境界辺 ($\xi = 0, 1$) で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数であり、また $G_x(\eta), G_y(\eta), G_w(\eta)$ は、それぞれ ξ 軸に平行な境界辺 ($\eta = 0, 1$) で与えられる境界関数である。ただし、表中の S, C, F は、それぞれ単純支持、固定

表-1 種々の幾何学的境界条件に対応した境界関数

B.C.	$\xi = 0, 1$			$\eta = 0, 1$		
	$F_x(\xi)$	$F_y(\xi)$	$F_w(\xi)$	$G_x(\eta)$	$G_y(\eta)$	$G_w(\eta)$
S-S	1	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	1	$4(\eta - \eta^2)$
S-F	1	ξ	ξ	η	1	η
F-S	1	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \eta$	1	$1 - \eta$
S-C	$4(\xi - \xi^2)$	ξ	$4(\xi - \xi^2)$	η	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$
C-S	ξ	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	η	$4(\eta - \eta^2)$
C-C	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$
C-F	ξ	ξ	ξ	η	η	η
F-C	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \eta$	$1 - \eta$	$1 - \eta$
F-F	1	1	1	1	1	1

および自由の境界条件を示す。

Mindlin 板理論で仮定される独立した3つの変位関数(たわみ w と2つの回転角 ϕ_x, ϕ_y) は、表-1 に示す境界関数と B-spline 関数を掛け合わせて、それぞれ次式で仮定する。

$$\phi_x(\xi, \eta) = F_x(\xi) G_x(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta),$$

$$\phi_y(\xi, \eta) = F_y(\xi) G_y(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta),$$

$$w(\xi, \eta) = F_z(\xi) G_z(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad (9)$$

ただし、 $N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\eta)$ は、 $k-1$ 次の正規化された B-spline であり、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数である。 $i_x = k-2 + M_x, i_y = k-2 + M_y$ 、 $k-1$ は B-spline 関数の次数、 M_x と M_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向に設けた区分点の数である。この許容関数は、B-spline 関数の特性である $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証されることを確認している。

2.3 BF-spline Ritz 法による固有方程式の定式化

均質かつ等方性である長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U は、次式で与えられる²²⁾。

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ &\quad + \nu \left(\frac{b}{a} \right) \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \\ &\quad + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[\left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + \phi_x \right]^2 \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + \phi_y \right]^2 \right\} d\eta d\xi \\ &= \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \{ \Delta \}_{mn}^T [K]_{mnr} \{ \Delta \}_{rs} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ は剛性マトリックス、 D は板の曲げ剛性である。また、 κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である。

また、この Mindlin 板の運動エネルギー T は、調和振動を仮定すれば、次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 ab^3 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right\} d\eta d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \rho h \omega^2 ab^3 \{ \Delta \}_{mn}^T [M]_{mnrs} \{ \Delta \}_{rs} \quad (11)$$

ここで、 $[M]_{mnrs}$ は質量マトリックスであり、また、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

長方形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Π は式(10)および式(11)を用いて、次式で与えられる。

$$\Pi = U - T \quad (12)$$

ここで、 U と T はそれぞれ、ひずみエネルギーと運動エネルギーである。

したがって、Ritz 法を適用して、 Π を未定係数ベクトルで極値化すれば、次の固有方程式が得られる。

$$\delta \Pi / \delta \{ \Delta \}_{rs}^T = \left([K]_{mnrs} - n^{*2} [M]_{mnrs} \right) \{ \Delta \}_{mn} = 0 ;$$

$$m, r = 1, 2, \dots, i_x, \quad n, s = 1, 2, \dots, i_y \quad (13)$$

ここで、

$$\{ \Delta \}_{mn} = \left\{ \{ \delta_A \}_{mn} \quad \{ \delta_B \}_{mn} \quad \{ \delta_C \}_{mn} \right\}^T \quad (14-a)$$

$$\{ \delta_A \}_{mn} = \left\{ A_{11} \quad A_{12} \quad \dots \quad A_{i_x i_y} \right\}^T,$$

$$\{ \delta_B \}_{mn} = \left\{ B_{11} \quad B_{12} \quad \dots \quad B_{i_x i_y} \right\}^T, \quad (14-b)$$

$$\{ \delta_C \}_{mn} = \left\{ C_{11} \quad C_{12} \quad \dots \quad C_{i_x i_y} \right\}^T$$

また、 n^* は振動数パラメータであり、次式で定義する。

$$n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D} \quad (15)$$

式(10)と式(11)に示す剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ および質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は、それぞれ式(16)と式(17)で示すサブマトリックスで表される。

$$[K]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [K_{\phi_x \phi_x}] & [K_{\phi_x \phi_y}] & [K_{\phi_x W}] \\ [K_{\phi_y \phi_x}] & [K_{\phi_y \phi_y}] & [K_{\phi_y W}] \\ [K_{W \phi_x}] & [K_{W \phi_y}] & [K_{WW}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[M]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [M_{\phi_x \phi_x}] & [0] & [0] \\ [0] & [M_{\phi_y \phi_y}] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{WW}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

これらのサブマトリックスは、Legendre-Gauss の数値積分公式により求めている。ここで、 ξ および η 方向の積分点数 n は $k+2$ を採用しており、 k は spline 階数である。

付録には、サブ剛性マトリックス $[K_{ij}]$ およびサブ質量マトリックス $[M_{ij}]$ が示してある。ここで、一般に、全体関数を仮定した Ritz 法では、得られる係数行列は対称のフルマトリックスになるが、本手法では、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ の大きさは $3(k-2+M_x)(k-2+M_y)$ で表され、常に対称のバンドマトリックスになる。

したがって、式(18)の振動数方程式を解けば、固有値および固有ベクトルが求められる。

$$\det(\mathbf{K} - n^{*2} \mathbf{M}) = 0 \quad (18)$$

なお、固有値計算には Householder-QR 法を用いており、固有ベクトルは逆反復法で求めている。

3. 数値計算例および考察

ここでは、任意の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の自由振動解析への本手法(BF-spline Ritz 法)の適用について検討するために、本手法の解の収束性と精度比較について示す。また、既に提案されている仮想パネ法を用いた B-spline Ritz 法(AS-spline Ritz 法)¹³⁾との解の収束性の相違について検討する。さらに、種々の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動特性に与える幅厚比 b/h 、辺長比 a/b や境界条件の影響についても示す。

ここで、長方形板の4辺で与えられる境界条件は、例えば、CS-FSのように表し、それぞれ ξ 軸に垂直な2つ境界辺($\xi=0, 1$)で固定辺(C)、単純支持辺(S)であり、 η 軸に垂直な2つの境界辺($\eta=0, 1$)で自由辺(F)、単純支持辺(S)に相当している。

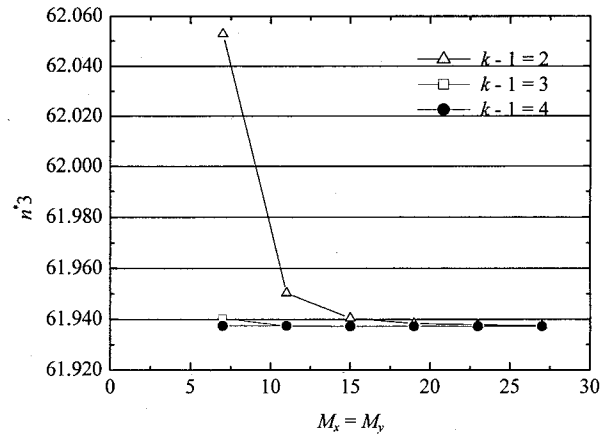
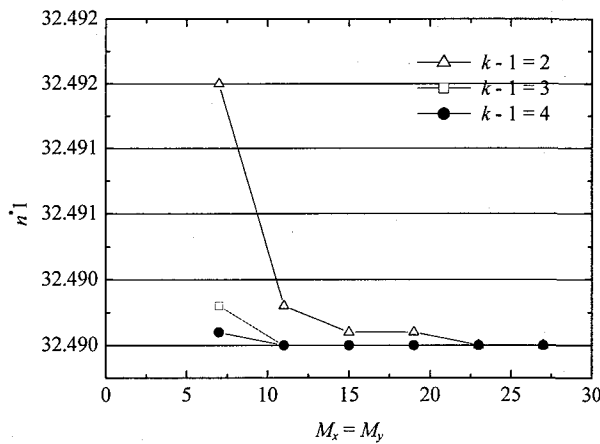
3.1 本手法の解の収束性

まず、本手法の解の収束性に与える spline 次数 $k-1$ の影響について検討する。図-2 には、周辺固定された正方形厚板(CC-CC, $a/b=1$)の基本振動数パラメータ n_1^* と3次の振動数パラメータ n_3^* の収束性に与える spline 次数 $k-1$ の影響が示されている。ただし、 $b/h=10$ 、区分点の数 $M_x=M_y$ は7から27まで変化させ、また $k-1$ は2次から4次まで変えている。

これより、spline 次数を高めれば、収束が早くなり、少ない区分点の数で収束値が得られている。

次に、種々の幅厚比 b/h に対しても同様の収束状態が得られるか確認する。表-2 には、周辺固定された正方形板(CC-CC, $a/b=1$)の1次から10次までの振動数パラメータ n^* の収束性に与える区分点の数 $M_x \times M_y$ の影響が示してある。ここで、幅厚比 b/h は5, 10, 100, 1000に仮定し、また区分点の数 $M_x=M_y$ は7から35まで変化させ、spline 次数 $k-1$ は2次、3次、4次に仮定している。

これより、幾何学的境界条件を自動的に満足させた本手法(BF-spline Ritz 法)の解は、幅厚比 b/h および振動次数に係わらず、少ない区分点の数で収束値が得られている。



(a) n_1^* の収束性に与える $k-1$ の影響

(b) n_3^* の収束性に与える $k-1$ の影響

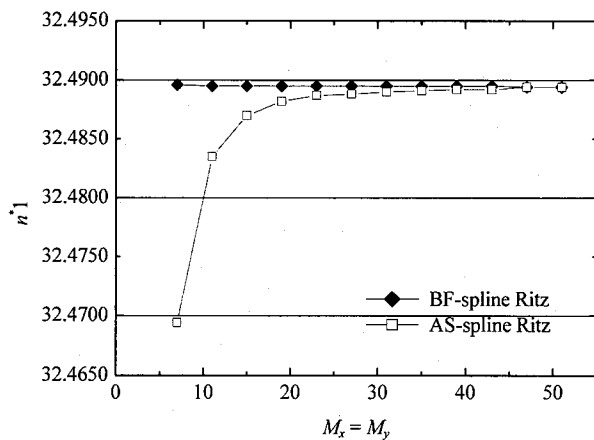
図-2 振動数パラメータ n^* の収束性に与える $k-1$ の影響: $a/b=1, b/h=10, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12, \text{CC-CC}$

表-2 周辺固定された正方形厚板の振動数パラメータ n^* の収束性: $a/b=1, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12, \text{CC-CC}$

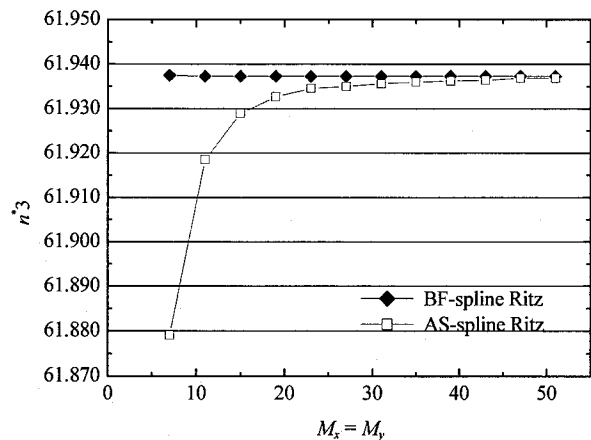
b/h	$k-1$	$M_x=M_y$	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
5	4	7	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5489	71.5216	83.6970	83.6970	98.3907	98.3907
		11	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5488	71.5215	83.6970	83.6970	98.3885	98.3885
		15	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5488	71.5214	83.6969	83.6969	98.3885	98.3885
		19	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5488	71.5214	83.6969	83.6969	98.3885	98.3885
		23	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5488	71.5214	83.6969	83.6969	98.3885	98.3885
		27	26.4534	46.1349	46.1349	61.9297	70.5488	71.5214	83.6969	83.6969	98.3885	98.3885
	2	7	32.4915	62.0529	62.0529	86.9047	103.594	104.612	124.650	124.650	157.338	158.224
		11	32.4898	61.9503	61.9503	86.7933	102.342	103.325	123.701	123.701	151.224	151.224
		15	32.4896	61.9405	61.9405	86.7821	102.238	103.218	123.620	123.620	150.667	150.667
		19	32.4896	61.9384	61.9384	86.7796	102.218	103.197	123.604	123.604	150.566	150.566
		23	32.4895	61.9378	61.9378	86.7788	102.212	103.190	123.599	123.599	150.536	150.536
		27	32.4895	61.9375	61.9375	86.7785	102.209	103.188	123.597	123.597	150.525	150.525
10	3	7	32.4898	61.9404	61.9404	86.7819	102.306	103.290	123.664	123.664	151.711	151.711
		11	32.4895	61.9374	61.9374	86.7784	102.209	103.188	123.597	123.597	150.544	150.544
		15	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.186	123.596	123.596	150.517	150.517
		19	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.515	150.515
		23	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.515	150.515
		27	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.515	150.515
	4	7	32.4896	61.9375	61.9375	86.7786	102.215	103.194	123.601	123.601	150.714	150.714
		11	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.186	123.596	123.596	150.516	150.516
		15	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.515	150.515
		19	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.514	150.514
		23	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.514	150.514
		27	32.4895	61.9373	61.9373	86.7782	102.207	103.185	123.596	123.596	150.514	150.514
100	4	7	35.9422	73.2455	73.2455	107.899	131.599	132.242	164.615	164.615	216.318	216.318
		11	35.9419	73.2375	73.2375	107.889	131.133	131.764	164.298	164.298	209.627	209.627
		15	35.9419	73.2372	73.2372	107.888	131.125	131.757	164.292	164.292	209.457	209.457
		19	35.9419	73.2372	73.2372	107.888	131.125	131.756	164.291	164.291	209.450	209.450
		23	35.9418	73.2371	73.2371	107.888	131.125	131.756	164.291	164.291	209.450	209.450
		27	35.9418	73.2371	73.2371	107.888	131.125	131.756	164.291	164.291	209.450	209.450
1000	4	7	35.9859	73.4306	73.4306	108.250	133.370	134.041	166.159	166.159	221.263	229.190
		11	35.9849	73.3946	73.3946	108.217	131.695	132.323	165.074	165.074	212.610	212.610
		15	35.9848	73.3925	73.3925	108.214	131.587	132.211	165.001	165.001	210.704	210.704
		19	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.578	132.202	164.994	164.994	210.538	210.538
		23	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.577	132.201	164.994	164.994	210.517	210.517
		27	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.577	132.201	164.994	164.994	210.517	210.517
		31	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.576	132.200	164.993	164.993	210.512	210.512
		35	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.576	132.200	164.993	164.993	210.511	210.511

表-3 片持ち Mindlin 板の振動数パラメータ n^* の収束性: $a/b=1, k-1=4, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12, \text{CF-FF}$

b/h	$M_x=M_y$	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
5	9	3.33825	7.33990	17.5457	22.4433	23.8451	38.2646	42.4944	45.2982	48.2164	59.3992
	13	3.33816	7.33981	17.5455	22.4433	23.8449	38.2643	42.4942	45.2980	48.2160	59.3985
	17	3.33812	7.33977	17.5454	22.4433	23.8448	38.2642	42.4941	45.2979	48.2159	59.3983
	21	3.33810	7.33975	17.5453	22.4433	23.8447	38.2642	42.4940	45.2979	48.2159	59.3983
	25	3.33809	7.33973	17.5453	22.4433	23.8447	38.2642	42.4940	45.2979	48.2159	59.3983
	27	3.33808	7.33973	17.5453	22.4433	23.8447	38.2642	42.4940	45.2979	48.2159	59.3983
10	5	3.43089	8.06885	20.0870	25.5119	28.2657	47.6086	54.1019	57.1250	61.6243	78.3750
	9	3.43041	8.05765	20.0793	25.4886	28.2259	47.4897	54.0578	56.9682	61.4945	78.0560
	13	3.43034	8.05701	20.0787	25.4877	28.2236	47.4844	54.0565	56.9658	61.4904	78.0481
	17	3.43031	8.05692	20.0785	25.4877	28.2232	47.4838	54.0562	56.9656	61.4898	78.0475
	21	3.43029	8.05688	20.0785	25.4877	28.2231	47.4837	54.0561	56.9655	61.4896	78.0474
	25	3.43028	8.05686	20.0784	25.4876	28.2230	47.4837	54.0560	56.9655	61.4895	78.0474
1000	27	3.43028	8.05685	20.0784	25.4876	28.2230	47.4836	54.0560	56.9655	61.4895	78.0474
	9	3.47205	8.51048	21.2971	27.2462	30.9762	54.3319	61.7495	65.2464	71.6959	94.7475
	13	3.47130	8.50768	21.2873	27.2011	30.9602	54.1986	61.2845	64.2174	71.0158	93.0539
	17	3.47111	8.50678	21.2854	27.1988	30.9565	54.1876	61.2576	64.1485	70.9715	92.9391
	21	3.47105	8.50638	21.2846	27.1984	30.9549	54.1844	61.2543	64.1418	70.9644	92.9266
	25	3.47102	8.50616	21.2842	27.1982	30.9541	54.1828	61.2533	64.1407	70.9617	92.9236
	27	3.47101	8.50608	21.2841	27.1981	30.9538	54.1822	61.2531	64.1404	70.9609	92.9228
	31	3.47100	8.50597	21.2839	27.1980	30.9533	54.1813	61.2528	64.1402	70.9598	92.9217

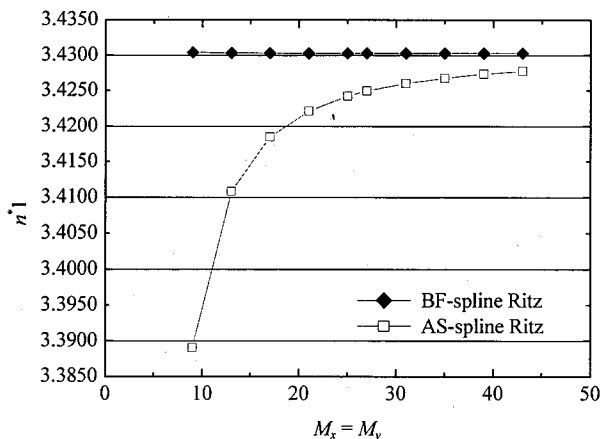


(a) 基本振動数パラメータ n_1^* の収束性の比較

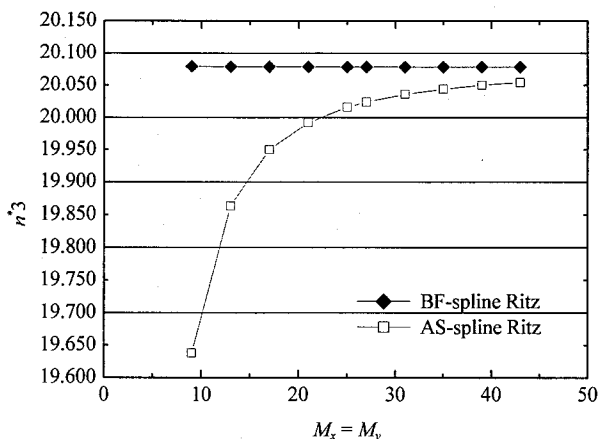


(b) 3次振動数パラメータ n_3^* の収束性の比較

図-3 振動数パラメータ n^* の収束性の比較: $a/b=1, b/h=10, k-1=4, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12, \text{CC-CC}$



(a) 基本振動数パラメータ n_1^* の収束性の比較



(b) 3次振動数パラメータ n_3^* の収束性の比較

図-4 片持ち Mindlin 板の振動数パラメータ n^* の収束性の比較: $a/b=1, b/h=10, k-1=4, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12, \text{CF-FF}$

表-4 正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $a/b=1, k-1=4, M_x=M_y=25, \nu=0.3, \kappa=0.8667$

B. C.	b/h	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
CC-SS	1000	28.95059	54.74238	69.32573	94.58311	102.2142	129.0918	140.2003	154.7703	170.3430	199.8019
	Leissa ⁶⁾	28.9509	54.7431	69.3270	94.5853	102.2162	129.0955	140.2045	154.7752		
	Exact ³⁾	28.9505	54.7423	69.3257	94.5831	102.2141	129.0914	140.2002	154.7700		
	100	28.92496	54.67434	69.19860	94.36864	102.0112	128.6907	139.7821	154.2164	169.8081	198.9371
	Exact	28.9250	54.6743	69.1986	94.3686	102.0112	128.6906	139.7820	154.2163	169.8080	
	10	26.73694	49.26064	59.48013	79.19508	87.20719	102.0186	112.6778	119.7031	135.3588	149.3531
	Exact	26.7369	49.2606	59.4801	79.1951	87.2072	102.0186	112.6777	119.7031	135.3588	
	5	22.50991	40.13838	45.05690	59.12267	66.37057	71.39039	81.14926	83.11869	96.08455	99.72336
	Exact	22.5099	40.1384	45.0569	59.1227	66.3706	71.3904	81.1493	83.1187	96.0845	
	1000	12.68720	33.06432	41.70137	63.01322	72.39579	90.60953	103.1579	111.8932	131.4263	152.7670
CF-SS	Leissa	12.6874	33.0651	41.7019	63.0148	72.3976	90.6114	103.1617	111.8964	131.4287	
	Exact	12.6862	33.0600	41.6993	63.0064	72.3896	90.6054	103.1439	111.8848	131.4175	
	100	12.67507	33.00227	41.65197	62.87529	72.23080	90.42899	102.8227	111.5885	131.0107	152.1675
	Exact	12.6728	32.9925	41.6472	62.8595	72.2171	90.41940	102.7904	111.5689	130.9964	
	10	12.26060	30.47426	38.71284	55.97355	62.95274	78.81199	86.27131	94.09057	106.1656	121.6423
	Exact	12.2606	30.4743	38.7128	55.9736	62.9527	78.8120	86.2713	94.09060	106.1656	
	5	11.39313	25.89750	33.07474	45.04449	48.89111	61.30141	64.61475	70.72017	76.05733	87.00458
	Exact	11.3931	25.8975	33.0747	45.0445	48.8911	61.3014	64.6148	70.72020	76.05730	
	1000	9.631339	16.13438	36.72444	38.94455	46.73713	70.73751	75.28141	87.98508	96.03799	111.0206
	Leissa	9.6314	16.1348	36.7256	38.9450	46.7381	70.7401	75.2834	87.9867	96.0405	
FF-SS	Exact	9.6311	16.1313	36.7161	38.9433	46.7317	70.7222	75.2692	87.9819	96.0288	
	100	9.627585	16.10412	36.63054	38.90724	46.65234	70.52101	75.08293	87.82257	95.79972	110.5708
	Exact	9.627000	16.09710	36.61120	38.90430	46.63930	70.48460	75.05540	87.81510	95.77770	
	10	9.445770	15.40539	33.91605	36.42458	42.88701	62.33041	66.37198	76.90421	82.71899	92.97177
	Exact	9.4458	15.4054	33.9160	36.4246	42.8870	62.3304	66.3720	76.9042	82.7190	
	5	8.999676	14.13408	29.25582	31.43376	36.16462	49.89530	52.80120	60.10637	63.79605	69.97570
	Exact	8.9997	14.1341	29.2558	31.4338	36.1646	49.8953	52.8012	60.1064	63.7960	

また、かなり薄肉の $b/h=1000$ に対しても一様な収束状態が得られている。

以後の数値計算では、spline 次数 $k-1$ は 4 次を用いる。

表-3 には、片持ち正方形板(CF-FF, $a/b=1$)の 1 次から 10 次までの振動数パラメータ n^* の収束性に与える区分点の数 $M_x \times M_y$ の影響が示してある。ここで、幅厚比 b/h は 5, 10, 1000 に仮定し、また区分点の数 $M_x=M_y$ は 7 から 31 まで変化させている。

これより、表-2 とほぼ同様の収束状態が得られているが、周辺固定正方形板は、有効数字 6 桁程度まで収束値が得られているのに対して、片持ち正方形板では、有効数字 5 桁程度となっている。この原因は、前者は満たすべき境界条件は幾何学的境界条件のみであり、これは許容関数によって全て満たされている。他方、後者は自由辺を含むので満たすべき境界条件に力学的境界条件が必要になる。Ritz 法では、級数項を無限に取った場合に近似的な意味で力学的境界条件が満たされるため、異なった収束状態が得られているものと考えられる。

3.2 本手法と AS-spline Ritz 法の解の収束性の相違

ここでは、本手法(BF-spline Ritz 法)と既に提案されている仮想バネ法を用いた B-spline Ritz 法(AS-spline Ritz 法)¹³⁾との収束状態を比較し、境界条件の処理方法が解の収束性に与える影響について検討する。図-3 および図-4 には、それぞれ周辺固定された正方形厚板(CC-CC, $a/b=1$)と BF-spline Ritz 法と AS-spline Ritz 法¹³⁾を用いて求めた基本振動数パラメータ n_1^* と 3 次の振動数パラメータ n_3^* の収束性の比較が示されている。ただし、 $b/h=10$ に仮定して、

区分点の数 $M_x=M_y$ は 7 から 51 まで変化させている。ここで、B-spline 関数の導関数の連続性を同一にし、境界条件の処理方法の比較をするために両方法とも $k-1=4$ を用いている。しかしながら、BF-spline Ritz 法では、2 次の境界関数を B-spline 関数に乗じているので、6 次以下の区分的多項式になっていることに留意する。

これより、幾何学的境界条件を自動的に満足させた BF-spline Ritz 法の解は、早い収束状態を示し、比較的少ない区分点で収束値が得られている。これに対して、AS-spline Ritz 法では、それぞれたわみと 2 つの回転角に対応する仮想バネを固定辺上の区分点に導入するので、区分点を増大させると、比較的遅く一定値に向かった下方からの収束状態が得られている。したがって、Ritz 法の試験関数として、全体関数および局所関数を問わず、幾何学的境界条件を自動的に満足させた許容関数を適用した方が、少ない未知数で、解の収束を早めることができる。

3.3 本手法の解の精度比較

表-4 には、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺がそれぞれ固定、単純支持および自由である正方形 Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較が示してある。ここで、 $\kappa=0.86667, M_x=M_y=25$ にとり、また b/h は、1000 から 5 まで変化させてある。比較のために、Hashemi・Arsanjani により求められた Mindlin 板の厳密解³⁾と Leissa による薄板の厳密解⁶⁾が示してある。

表-5 長方形 Mindlin 板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $k-1=4, M_x=M_y=25, \nu=0.3, \kappa=5/6$

B. C.	a/b	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
CC-CC	1	5	26.5241	46.2956	46.2956	62.1636	70.8310	71.8103	84.0440	84.0440	98.8200	98.8200
		pb-Ritz ¹⁰⁾	26.525	46.295	46.295	62.164	70.831	71.810	84.045	84.045	98.8204	98.8204
		DSC-Ritz ²³⁾	26.525	46.296	46.296	62.165	70.831	71.811				
	1	10	32.5243	62.0386	62.0386	86.9490	102.434	103.412	123.892	123.892	150.923	150.923
		pb-Ritz	32.524	62.038	62.038	86.949	102.435	103.412	123.892	123.892	150.924	150.924
		DSC-Ritz	32.524	62.041	62.041	86.960	102.436	103.414				
	1000	1000	35.9848	73.3923	73.3923	108.213	131.576	132.200	164.993	164.993	210.512	210.512
		pb-Ritz	35.988	73.394	73.394	108.217	131.577	132.204	164.997	164.997	210.515	210.515
		Thin plate ⁶⁾	35.992	73.413	73.413	108.27	131.64	132.24				
	2	5	19.2406	24.2046	32.4722	41.4992	43.1359	45.3840	51.7742	55.3676	60.3413	67.7899
		pb-Ritz	19.241	24.204	32.481	41.499	43.136	45.384	51.774	55.368	60.342	67.790
		DSC-Ritz	19.241	24.205	32.473	41.500	43.138	45.386				
CF-FF	1	10	22.7912	29.1303	40.1772	54.9811	55.3340	60.4566	69.7281	73.7978	82.6665	94.8790
		pb-Ritz	22.791	29.130	40.177	54.981	55.335	60.457	69.729	73.799	82.668	94.890
		DSC-Ritz	22.792	29.134	40.180	54.983	55.344	60.466				
	1000	1000	24.5775	31.8257	44.7691	63.3303	63.9820	71.0749	83.2709	87.2566	100.7900	116.388
		pb-Ritz	24.581	31.828	44.772	63.332	63.984	71.078	83.274	87.293	100.799	116.546
		Thin plate	3.33924	7.34782	17.5723	22.4683	23.8881	38.3427	42.6035	45.3956	48.3259	59.5436
	1	5	3.33924	7.34782	17.5723	22.4683	23.8881	38.3427	42.6035	45.3956	48.3259	59.5436
		pb-Ritz	3.340	7.348	17.574	22.468	23.889	38.344	42.605	45.396	48.328	59.546
		DSC-Ritz	3.43064	8.06026	20.0888	25.4992	28.2441	47.5302	54.1156	57.0138	61.5590	78.1431
	1000	1000	3.4307	8.0615	20.091	25.499	28.247	47.534	54.119	57.016	61.568	78.149
		pb-Ritz	3.47100	8.50597	21.2839	27.1980	30.9534	54.1814	61.2528	64.1402	70.9599	92.9218
		Sigillito ²⁴⁾	3.5027	8.5214	21.298	27.204	30.972	54.203	61.267	64.144	70.994	92.932
CF-SF	1	5	0.847793	3.31683	5.05690	10.4523	13.2794	19.0387	20.1737	24.0809	25.6266	29.4377
		pb-Ritz	0.8478	3.317	5.057	10.453	13.281	19.040	20.173	24.082	25.627	29.440
		DSC-Ritz	0.855547	3.54606	5.27217	11.4343	14.5051	21.6128	22.2782	27.7457	29.4858	34.9171
	2	10	0.8557	3.5461	5.2723	11.436	14.506	21.617	22.279	27.748	29.489	34.926
		1000	0.859817	3.70028	5.35836	12.0439	15.0371	23.1288	23.2752	29.6118	31.7310	38.1936
		pb-Ritz	0.9514	3.728	5.378	12.056	15.048	23.142	23.281	29.620	31.743	38.210
		Sigillito	0.8604		5.3618		15.048		23.561	29.668		
	1	5	4.91733	16.2720	19.9557	31.9807	39.6672	43.9439	51.9149	54.1876	68.1617	71.0857
		pb-Ritz	4.918	16.272	19.956	31.981	39.667	43.944	51.916	54.188	68.162	71.088
		10	5.19084	18.0829	23.0573	38.7027	47.9321	55.9998	66.7099	70.9861	90.2941	97.5413
	2	10	5.191	18.083	23.058	38.705	47.933	56.004	66.713	70.989	90.298	97.548
		1000	5.35084	19.0743	24.6695	43.0846	52.7063	63.7549	77.4866	83.6599	106.310	120.367
		pb-Ritz	5.375	19.084	24.679	43.096	52.709	63.771	77.496	83.673	106.313	120.391
		Thin plate	5.3639	19.171	24.768	43.191	53.000	64.050				
	1	5	2.01506	7.06100	14.2535	15.3897	19.5358	25.7931	27.5325	37.2717	37.9305	39.1503
		pb-Ritz	2.015	7.062	14.254	15.391	19.536	25.794	27.533	37.273	37.932	39.151
		10	2.08264	7.50068	15.4752	16.9678	21.9202	30.0007	32.1564	45.2880	45.9676	47.3337
	2	10	2.0825	7.5019	15.476	16.970	21.921	30.005	32.160	45.296	45.974	47.339
		1000	2.12654	7.73857	16.0354	17.7404	23.2313	32.1990	34.8705	49.9613	50.6340	52.1549
		pb-Ritz	2.1743	7.7536	16.042	17.750	23.237	32.210	34.876	49.964	50.645	52.161

これより、本手法で求めた解は、 b/h の値や振動次数に係わらず、厳密解に対してわずかに大きめの値を示しており、本手法の妥当性が確認できる。また、厳密解を求めることが困難な境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較が表-5 に示してある。ここで、 κ は $5/6$ に仮定している。表の中で、pb-Ritz は、Liew ら¹⁰⁾ が境界関数と直交多項式を組み合わせた許容関数を変位関数に仮定した Ritz 法により求めた値である。また、DSC-Ritz²³⁾ は、Hou らが discrete singular convolution を基底関数に仮定し、境界関数と組み合わせた許容関数を Ritz 法に適用して求めた値である。幅厚比が 1000 の場合には、はりの固有関数を変位関数に仮定し、薄板理論に基づく Ritz 法により求めた解⁶⁾ も示してある。これより、本手法で求めた解は、境界条件や幅厚比に関係なく、Liew らの直交多項式を用いて求めた解と良く一致した結果を示し

ている。また、周辺固定された長方形 Mindlin 板の精度比較より、本手法の解は、Hou らの DSC-Ritz 法の解および Liew らの pb-Ritz 法で求めた値と比較して、やや小さな値を示している。片持ち薄板には、Sgillito²⁴⁾ が Legendre 関数を併用して求めた上界値も示してある。本手法の値は、pb-Ritz 法やはり関数を仮定した Ritz 法の解と比較して、Sgillito の上界値に近い結果を示している。したがって、本手法を用いれば、長方形 Mindlin 板の振動数パラメータのより精度の高い上界値が求められる。

表-6 種々の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動数パラメータ n^* のに与える幅厚比 b/h と
辺長比 a/b の影響 : $k-1=4, M_x=M_y=25, \nu=0.3, \kappa=\pi^2/12$

Boundary conditions	a/b	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
CC-CC	1	100	35.942	73.237	73.237	107.89	131.13	131.76	164.29	164.29	209.46	209.46
		20	34.971	69.831	69.831	101.06	121.63	122.40	150.16	150.16	188.31	188.31
		10	32.490	61.937	61.937	86.778	102.21	103.19	123.60	123.60	150.51	150.51
		5	26.453	46.135	46.135	61.930	70.549	71.521	83.697	83.697	98.389	98.389
	1.5	100	26.980	41.650	65.999	66.402	79.625	100.56	102.84	124.89	135.61	138.14
		20	26.414	40.459	63.221	63.758	75.742	95.107	96.809	116.36	125.95	127.92
		10	24.896	37.439	56.533	57.443	66.892	82.999	83.893	98.442	106.55	107.28
		5	20.871	30.243	42.508	44.073	49.634	60.467	60.728	68.390	74.053	74.718
	2	100	24.557	31.793	44.712	63.225	63.866	70.933	83.081	87.067	100.52	116.04
		20	24.079	31.051	43.412	60.898	61.257	67.787	78.955	83.015	94.836	109.32
		10	22.772	29.103	40.133	54.897	55.262	60.361	69.612	73.683	82.519	94.707
		5	19.196	24.146	32.387	41.358	43.009	45.230	51.597	55.186	60.129	67.520
CF-CF	1	100	6.9087	23.854	26.545	47.490	62.566	65.397	85.348	88.017	120.94	123.64
		20	6.8267	23.324	26.006	45.694	60.261	63.021	80.735	83.457	113.67	116.12
		10	6.6708	22.129	24.705	41.955	54.842	57.358	71.348	73.968	98.178	100.15
		5	6.2392	18.936	21.179	33.692	42.790	44.820	53.417	55.638	70.314	71.797
	1.5	100	4.9626	13.215	23.249	30.066	34.058	52.084	55.930	62.556	72.588	78.260
		20	4.9204	13.012	22.842	29.425	33.122	50.149	54.183	60.399	69.492	74.599
		10	4.8406	12.584	21.816	27.895	31.072	46.028	49.969	55.129	62.600	66.845
		5	4.6104	11.378	18.887	23.813	26.025	36.896	40.050	43.220	48.161	51.203
	2	100	4.2763	9.0808	18.327	22.703	28.743	32.859	39.648	52.095	54.711	62.010
		20	4.2491	8.9640	18.038	22.338	28.070	32.175	38.450	50.595	52.722	59.916
		10	4.1952	8.7320	17.384	21.373	26.543	30.506	35.845	46.945	48.418	54.741
		5	4.0331	8.0737	15.531	18.554	22.562	26.043	29.631	38.120	38.847	42.968
CF-SF	1	100	5.3432	19.042	24.633	42.955	52.619	63.626	77.218	83.370	106.05	119.82
		20	5.2880	18.733	24.167	41.567	51.239	61.358	73.791	79.363	101.18	112.24
		10	5.1895	18.076	23.043	38.669	47.896	55.937	66.633	70.892	90.180	97.385
		5	4.9139	16.254	19.922	31.917	39.592	43.831	51.787	54.039	67.974	70.865
	1.5	100	3.0707	12.064	17.045	28.401	29.821	47.761	50.843	55.650	62.298	74.639
		20	3.0443	11.909	16.858	27.768	29.246	46.257	49.628	53.985	60.253	71.506
		10	3.0011	11.583	16.413	26.422	27.847	43.011	46.559	49.911	55.621	64.699
		5	2.8831	10.627	15.064	22.913	24.025	35.371	38.668	40.275	44.950	50.331
	2	100	2.1242	7.7303	16.023	17.723	23.193	32.158	34.800	49.887	50.532	52.078
		20	2.1079	7.6505	15.863	17.497	22.785	31.532	33.959	48.547	49.128	50.699
		10	2.0823	7.4988	15.471	16.961	21.910	29.982	32.135	45.250	45.932	47.294
		5	2.0142	7.0557	14.241	15.372	19.512	25.749	27.486	37.194	37.851	39.074
CF-CS	1	100	17.517	35.946	51.722	70.887	74.136	105.49	108.95	124.93	132.34	163.31
		20	17.257	34.950	50.139	67.867	70.980	99.849	102.44	117.06	123.81	150.29
		10	16.612	32.667	46.234	61.102	63.838	87.367	89.092	100.72	106.06	125.69
		5	14.734	27.077	36.985	47.043	48.957	63.892	65.054	72.209	75.276	87.099
	1.5	100	16.201	24.142	40.614	50.525	58.841	66.082	75.507	100.41	100.84	104.41
		20	15.998	23.684	39.529	49.050	56.838	63.667	72.289	95.217	95.675	98.929
		10	15.461	22.571	36.946	45.330	52.002	58.009	65.002	83.790	84.514	86.679
		5	13.820	19.540	30.589	36.371	41.060	45.544	49.935	62.189	62.890	63.484
	2	100	15.795	20.125	29.130	43.151	50.158	54.752	62.272	63.970	77.959	86.451
		20	15.609	19.818	28.537	42.021	48.718	53.046	60.186	61.665	74.644	82.762
		10	15.104	19.029	27.076	39.273	45.053	48.794	55.197	56.160	67.080	74.246
		5	13.533	16.750	23.189	32.489	36.179	38.848	43.881	44.020	51.469	56.671
CF-FF	1	100	3.4701	8.4845	21.263	27.150	30.863	53.962	61.152	63.996	70.753	92.513
		20	3.4583	8.3293	20.935	26.632	29.995	51.770	59.112	61.884	67.845	87.641
		10	3.4303	8.0569	20.078	25.488	28.223	47.484	54.056	56.966	61.490	78.047
		5	3.3381	7.3397	17.545	22.443	23.845	38.264	42.494	45.298	48.216	59.398
	1.5	100	1.5345	5.1680	9.5358	17.435	23.769	27.359	35.564	37.805	53.069	59.276
		20	1.5312	5.0846	9.4672	17.075	23.430	26.927	34.598	36.697	51.575	56.900
		10	1.5243	4.9477	9.2808	16.401	22.618	25.783	32.550	34.489	47.809	52.142
		5	1.5029	4.5890	8.6528	14.634	20.246	22.523	27.449	29.200	38.661	41.823
	2	100	0.85966	3.6914	5.3567	12.017	15.028	23.079	23.256	29.577	31.663	38.110
		20	0.85825	3.6345	5.3333	11.804	14.886	22.585	22.978	29.053	30.961	37.094
		10	0.85551	3.5450	5.2714	11.430	14.500	21.601	22.272	27.730	29.470	34.891
		5	0.84770	3.3144	5.0542	10.442	13.265	19.012	20.158	24.043	25.593	29.383

3.4 種々の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動数パラメータ

3.1, 3.2 および 3.3 で検討したように, 本手法の解析精度は, 区分点の数 M_x, M_y と spline 次数 $k-1$ に関係する. ここでは, 厳密解を求めることが困難な 5 種類の境界条件を持つ長方形 Mindlin 板の振動解析について示す. ただし, 以下に示す計算例では, $\kappa = \pi^2/12$, $k-1=4$, $M_x=M_y=25$ を用いる.

表-6 には, それぞれ境界条件が CC-CC, CF-CF, CF-SF, CF-CS および CF-FF である長方形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える幅厚比 b/h と辺長比 a/b の影響が示してある. ここで, b/h は, 100 から 5 まで変化させ, また a/b は, 1, 1.5, 2 としている.

これより, 長方形 Mindlin 板の振動数パラメータの値は, 境界条件, 幅厚比や辺長比に大きく依存している. また, この表に示した値は, より精度の高い上界値を示すので, 他の数値解析法の解析精度を評価するためのベンチマークテストに適用できる.

4. あとがき

本論文では, 自動的に幾何学的境界条件を満たした許容関数を求めるために, 境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を提案した. この許容関数を変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化し, 任意の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動解析への適用について検討を行った. 本手法の解の収束性や精度比較を行い, 本手法の有用性および妥当性について検討した. また, 厳密解を求めることが困難な境界条件を有する厚板の振動特性に与える幅厚比, 辺長比や境界条件の影響についても検討を行っている.

本論文で得られた新たな知見をまとめると, 以下のとおりである.

- 1) 幾何学的境界条件を自動的に満足させる境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を仮定する BF-spline Ritz 法は, 一様な収束性を示し, またその収束値は, 解析解や他の数値解析法の値と比較して, 良く一致した結果が得られている.
- 2) 幾何学的境界条件に対応する仮想バネを導入する AS-spline Ritz 法の収束結果と比較して, BF-spline Ritz 法は, かなり少ない区分点の数で収束値が得られており, また spline 次数を高めれば, 少ない区分点の数で収束値が得られる.
- 3) 本手法で求めた振動数パラメータは, 厳密解に対してわずかに大きめの値を示し, かつ他の Ritz 法よりも小さな値であることから, 長方形 Mindlin 板の振動数パラメータのより精度の高い上界値が得られている.
- 4) ベキ関数などの全体関数を仮定した Ritz 法の定式化では係数行列がフルマトリックスになるが, 本手法は, 局所基底で表される B-spline 関数を用いるので, 得ら

れる係数行列は比較的小さい対称行列になる. また spline 次数を一定に保ったまま, 区分点の数を増大すれば, 解析精度が高められる.

最後に, 本論文で示した表の振動数パラメータ n^* の値が他の数値解析法のベンチマークテストに使って頂ければ幸いである. 今後, 直交異方性厚板や 3 次元弾性体の振動問題や幾何学的非線形問題への本手法の適用性についても検討していきたい.

謝辞: 本研究は第一著者が日本学術振興会特別研究員奨励費の援助を, 第二著者が大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったものである. また, 査読者からは, 本論文に関する貴重なご意見およびご指摘を頂きました. ここに, 記して感謝の意を表します.

付録

式(16)で与えられるサブ剛性マトリックスは, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 [K_{\phi_x \phi_x}] = & \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\int_0^1 F_x^{(1)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
 & + \int_0^1 F_x^{(1)} F_x^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{11} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \Big) \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_x^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_x^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{10} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{11} d\eta \Big) \\
 & + 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
 [K_{\phi_x \phi_y}] = & \nu \left(\frac{b}{a}\right) \left(\int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
 & + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \Big) \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{b}{a}\right) \left(\int_0^1 F_x^{(0)} F_y^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_y^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_y^{(1)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_y^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_y^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{10} d\eta \\
 & + \int_0^1 F_x^{(0)} F_y^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{10} d\eta \Big)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi, w}] &= 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \times \\
&\quad \left(\int_0^1 F_x^{(0)} F_w^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 F_x^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right) \\
[K_{\phi, \phi_x}] &= \nu \left(\frac{b}{a} \right) \left(\int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(1)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(1)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{10} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{10} d\eta \left. \right) \\
&\quad + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \left(\int_0^1 F_y^{(1)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(1)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{01} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \left. \right) \\
[K_{\phi, \phi_y}] &= \int_0^1 F_x^{(1)} F_x^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(1)} F_x^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(1)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{11} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \frac{1-\nu}{2} \left(\int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_x^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(1)} G_x^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(1)} J_{ns}^{10} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{11} d\eta \left. \right) \\
&\quad + 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{h} \right)^2 \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi, w}] &= 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \times \\
&\quad \left(\int_0^1 F_y^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_w^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 F_y^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \right) \\
[K_{w, \phi_x}] &= 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \times \\
&\quad \left(\int_0^1 F_w^{(1)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(1)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 F_w^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right) \\
[K_{w, \phi_y}] &= 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \times \\
&\quad \left(\int_0^1 F_x^{(1)} F_y^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(1)} G_y^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 F_w^{(0)} F_y^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{10} d\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{ww}] &= 6(1-\nu)\kappa \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \times \right. \\
&\quad \left(\int_0^1 F_w^{(1)} F_w^{(1)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \right. \\
&\quad + \int_0^1 F_w^{(1)} F_w^{(0)} I_{mr}^{01} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_w^{(0)} F_w^{(1)} I_{mr}^{10} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_w^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{11} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \left. \right) \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(1)} G_w^{(1)} J_{ns}^{00} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_x^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(1)} G_w^{(0)} J_{ns}^{01} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 F_w^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(1)} J_{ns}^{10} d\eta \\
&\quad \left. + \int_0^1 F_w^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{11} d\eta \right]
\end{aligned}$$

また、式(17)で与えられるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
[M_{ww}] &= \int_0^1 F_w^{(0)} F_w^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_w^{(0)} G_w^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
[M_{\phi, \phi_x}] &= \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \int_0^1 F_x^{(0)} F_x^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_x^{(0)} G_x^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta \\
[M_{\phi, \phi_y}] &= \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \int_0^1 F_y^{(0)} F_y^{(0)} I_{mr}^{00} d\xi \times \int_0^1 G_y^{(0)} G_y^{(0)} J_{ns}^{00} d\eta
\end{aligned}$$

ただし、 I_{mi}^{tu} と J_{nj}^{tu} は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{tu} &= \frac{\partial^t N_{m,k}(\xi)}{\partial \xi^t} \frac{\partial^u N_{i,k}(\xi)}{\partial \xi^u} \\
J_{nj}^{tu} &= \frac{\partial^t N_{n,k}(\eta)}{\partial \eta^t} \frac{\partial^u N_{j,k}(\eta)}{\partial \eta^u}
\end{aligned}$$

ここで、 t と u は、導関数の次数である。また、

$$\begin{aligned}
F_x^{(i)} &= \frac{d^i F_x(\xi)}{d\xi^i}, \quad F_y^{(i)} = \frac{d^i F_y(\xi)}{d\xi^i}, \quad F_w^{(i)} = \frac{d^i F_w(\xi)}{d\xi^i}, \\
G_x^{(i)} &= \frac{d^i G_x(\eta)}{d\eta^i}, \quad G_y^{(i)} = \frac{d^i G_y(\eta)}{d\eta^i}, \quad G_w^{(i)} = \frac{d^i G_w(\eta)}{d\eta^i}
\end{aligned}$$

である。

参考文献

- 1) Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H.: Shear deformable beams and plates, Elsevier, New York, 2000.
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* Vol.18, pp.1031-1036, 1951.
- 3) Hashemi, S.H. and Arsanjani, M.: Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates, *International Journal Solids and Structures*, Vol.42, pp.819-853, 2005.
- 4) Yu, S.D. and Cleghorn, W.L.: Accurate free vibration analysis of clamped Mindlin plates using the method of superposition, *Transactions Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 17, pp. 243-255, 1993.
- 5) Leissa, A.W.: The historical bases of the Rayleigh and Ritz

- methods, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.287, pp.961-978, 2005.
- 6) Leissa, A.W.: The free vibration of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.31, pp.257-293, 1973.
 - 7) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration* Vol.69, pp.345-359, 1980.
 - 8) Cheung, Y.K. and Zhou, D.: vibrations of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions, *Computers and Structures* Vol.78, pp.757-768, 2000.
 - 9) 成田吉弘: 境界条件の自由な組み合わせを考慮した FRP 積層長方形板の振動解析法, 日本複合材料学会誌, Vol. 18, pp.113-120, 1992.
 - 10) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick rectangular plates-I Comprehensive sets of boundary conditions, *Computers and Structures* Vol.49, pp.1-29, 1993.
 - 11) Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. and Lo, S.H.: Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal Solids and Structures*, Vol.39, pp.6339-6353, 2002.
 - 12) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions, *Journal of Sound and Vibration* Vol.62, pp.301-308, 1979.
 - 13) Mizusawa, T. and Kondo, Y.: Application of the spline element method to analyze vibration of skew Mindlin plates with varying thickness in one direction, *Journal of Sound and Vibration* Vol.241, pp.484-501, 2001.
 - 14) 板倉和則: ペナルティ関数法を用いた厚肉斜板の自由振動解析(四辺単純支持の場合), 構造工学論文集, Vol. 42B, pp.213-220, 1996.
 - 15) Mizusawa, T. and Kajita, T.: Analysis of skew plate problems with various constraints, *Journal of Sound and Vibration* Vol.73, pp.573-584, 1980.
 - 16) Antes, H.: B-cubic fundamental splines in plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.8, pp.503-511, 1974.
 - 17) Fujii, F.: Spline-Functionen mit mehrfachen Knoten in der gemischten Platten-rechnung, *Ingenieur-Archiv* Vol.50, pp. 365-375, 1981.
 - 18) Fan, S.C. and Cheung, Y.K.: Flexural free vibrations of rectangular plates with complex support conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.93, pp.81-94, 1984.
 - 19) Dawe, D.J. and Wang, S.: Vibration of shear deformable beams using a spline-function approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.33, pp.819-844, 1992.
 - 20) Prenter, P.M. : Splines and variational methods, John Wiley & Sons, New York, 1975.
 - 21) Boor, C. D.: On calculating with B-spline, *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, pp.50-62, 1972.
 - 22) Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Vibration of Mindlin plates – Programming the p-Version Ritz method, Elsevier Science, Oxford, 1998.
 - 23) Hou, Y., Wei, G.W. and Xiang, Y.: DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.62, pp.262-288, 2005.
 - 24) Sigillito, V.G.: Improved upper bounds for frequencies of rectangular free and cantilever plates. Eng. Memo. EM-4012, Appl. Phys. Lab., The Johns Hopkins Univ., 1965.

(2006 年 4 月 13 日 受付)