

クロスプライ積層偏平シェルの対称・非対称座屈挙動解析

Symmetrical and Unsymmetrical Buckling Behavior Analysis of
Cross-ply Laminated Shallow Shells

森田千尋*・田中哲也**・松田 浩***・崎山 毅****・黄 美†・白濱敏行‡

Chihiro MORITA, Tetsuya TANAKA, Hiroshi MATSUDA, Takeshi SAKIYAMA,
Mei HUANG and Toshiyuki SHIRAHAMA

*正会員 博(工学) 長崎大学助教授 大学院生産科学研究科システム科学専攻(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

**学生会員 長崎大学大学院生 生産科学研究科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

***正会員 工博 長崎大学教授 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

****正会員 工博 長崎大学教授 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

†正会員 博(工学) 長崎大学助手 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

‡非会員 長崎大学 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

In this paper, a discrete method is proposed to analyze the geometrical nonlinear problems of cross-ply laminated composite shallow shells. The discrete solutions of partial differential equations governing the geometrical nonlinear behavior of laminated shallow shells are obtained in discrete forms. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The nonlinear problems are solved by the iteration and the displacement incremental procedure.

The effects of rise-thickness ratio, boundary condition, lamina stack sequences and moduli ratio on nonlinear behavior of cross-ply laminated shallow shells are investigated. Moreover, symmetrical and unsymmetrical buckling behavior of laminated shallow shells are shown.

Key Words : laminated shallow shells, geometrical nonlinear analysis, a discrete method, buckling behavior

1. 緒 言

軽量性, 高比強度, 高比剛性を持つ繊維強化プラスチック (FRP) に関する技術の発達はめざましいものがあり, 土木や建築などのさまざまな分野において適用事例が増加している. その適用理由としては, 軽量化による施工性・経済性の向上や, 優れた耐食性を生かした耐久性の向上による維持補修費の低減などが挙げられる¹⁾. このような一方向強化複合材を積層状に重ねた積層構造は, 単一の材料にはなかった特性を生みだしており²⁾, その異方性を積極的に利用して, FRP を構成している繊維の方向や積層数, 積層順序を変えることにより, 力学的に有利な材料設計が可能となる.

積層偏平シェルの対称座屈問題に関する研究は, 次のようなものがある. Chang ら³⁾ は, ガラス・エポキシの材料特性を持つ薄肉円筒殻に関して, 有限要素法を用いて有限変形解析を行っている. Liao ら⁴⁾ は, 単純支持された逆対称クロスプライおよびアングルプライ積層偏平シェルの座屈安定性に関して, 有限要素法を用いて解析しており, さらに, 補強材の効果について明らかにしている. 一方, 非対称座屈問題に関しては, Leicester⁵⁾ が級数解を用いて, 対称および非対称座屈荷重を四辺単純支持の場合のみ求めており, Ramm⁶⁾ は, 同様の問題を有限要素法を用いて求めている. し

かしながら, これらは等質・等方性のものばかりであり, 異方性材料の非対称座屈問題に関する研究については, 著者らの知る限りでは見当たらないようである.

そこで, 本論文では, 離散的近似解法⁷⁾を用いて繊維強化複合材料からなる積層偏平シェルの幾何学的非線形解析を行い, ライズ高シェル厚比, 境界条件, 積層数, 弾性係数比などの違いがクロスプライ積層偏平シェルの対称・非対称座屈挙動に及ぼす影響を明らかにすることを目的としている.

2. 解析手法

2.1 積層偏平シェルの応力-ひずみ関係

解析に用いるシェルは N 層のラミナから成り, 各ラミナは均質な直交異方性材料とする. 密度および厚さは同じであり, それぞれ完全に密着しているものとする. 図-1 に示すような積層偏平シェルの考え, 材料の異方性主軸を 1, 2, 3 で表わし, 主軸 3 は板厚方向 z に平行で, 主軸 1, 2 はそれぞれ x 軸, y 軸に対して傾き θ だけ傾いているものとする. k_x, k_y は各軸の曲率である.

図-2 はシェルの断面を表わしている. いま, 中央面から z_{k-1} だけ離れた k 番目の層について考えると, 材料の主軸方向における応力-ひずみ関係は次式のように

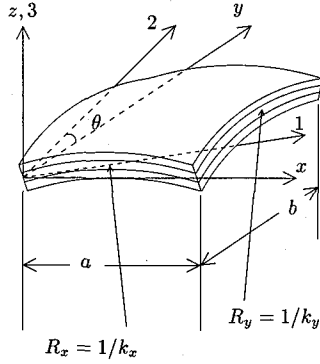


図-1 積層偏平シェルの直交異方性軸

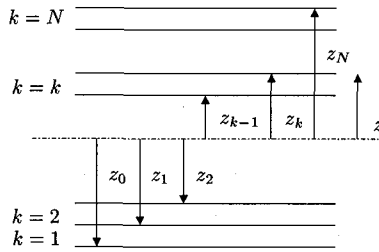


図-2 板厚方向における基準線

与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (1)$$

ここに、

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

であり、 E_1 、 E_2 は材料軸方向の弾性係数、 ν_{12} 、 ν_{21} はポアソン比、 G_{12} はせん断弾性係数である。

式 (1) より $x-y$ 座標系における応力-ひずみ関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (2)$$

ここに、 $\bar{Q}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}l^4 + 2(Q_{12} + Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(l^4 + m^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})l^2m^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}l^4 \\ \bar{Q}_{16} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})l^3m \\ &\quad - (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})lm^3 \\ \bar{Q}_{26} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})lm^3 \\ &\quad - (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})l^3m \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})l^2m^2 \\ &\quad + Q_{66}(l^4 + m^4) \\ l &= \cos\theta, \quad m = \sin\theta \end{aligned}$$

2.2 増分形基礎微分方程式

積層偏平シェルの幾何学的非線形解析における増分形基礎微分方程式は、Yang, Norris, Stavsky による一次せん断変形理論 (YNS 理論)⁸⁾ に基づいて以下になる。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left[k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Delta N_x + \left[k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Delta N_y \\ + 2 \left[k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \Delta N_{xy} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} N_y \\ + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} N_{xy} + \Delta N_c = -\Delta q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} = \Delta Q_x \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} = \Delta Q_y \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= B_{11} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + B_{12} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + B_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ &\quad + D_{11} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_y &= B_{12} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + B_{22} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + B_{26} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ &\quad + D_{12} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{xy} &= B_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + B_{26} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + B_{66} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ &\quad + D_{16} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (11)$$

$$\Delta Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= A_{11} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + A_{12} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + A_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2k_{xy}\Delta w + \Delta W_{xyc}) \\
& + B_{11}\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial y} + B_{16}\left(\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial x}\right) \quad (13) \\
\Delta N_y = & A_{12}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial x} - k_x\Delta w + \Delta W_{xc}\right) \\
& + A_{22}\left(\frac{\partial\Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial y} - k_y\Delta w + \Delta W_{yc}\right) \\
& + A_{26}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial x} \right. \\
& \left. - 2k_{xy}\Delta w + \Delta W_{xyc}\right) \\
& + B_{12}\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial y} + B_{26}\left(\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial x}\right) \quad (14) \\
\Delta N_{xy} = & A_{16}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial x} - k_x\Delta w + \Delta W_{xc}\right) \\
& + A_{26}\left(\frac{\partial\Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial y} - k_y\Delta w + \Delta W_{yc}\right) \\
& + A_{66}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial x} \right. \\
& \left. - 2k_{xy}\Delta w + \Delta W_{xyc}\right) \\
& + B_{16}\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial\Delta\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\theta_y}{\partial x}\right) \quad (15)
\end{aligned}$$

ここで、 $\kappa = \frac{5}{6}$ はせん断修正係数、 $\Delta q = \Delta q(x, y)$ は鉛直方向増分荷重強度、 A_{ij} は面内剛性、 B_{ij} はカップリング剛性、 D_{ij} は曲げ剛性であり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned}$$

また、 ΔN_c , ΔW_{xc} , ΔW_{yc} , ΔW_{xyc} は各増分段階における不平衡力および非線形項であり、APPENDIX に示す。

2.3 基礎微分方程式の無次元化と離散化

せん断力 ΔQ_y , ΔQ_x , モーメント ΔM_{xy} , ΔM_y , ΔM_x , 面内力 ΔN_{xy} , ΔN_y , ΔN_x , たわみ角 $\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_x$, および変位 Δw , Δv , Δu に関して、次の無次元量

$$\begin{aligned}
\Delta X_1 &= \frac{a^2 \Delta Q_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad \Delta X_2 = \frac{a^2 \Delta Q_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\
\Delta X_3 &= \frac{a \Delta M_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad \Delta X_4 = \frac{a \Delta M_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\
\Delta X_5 &= \frac{a \Delta M_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\
\Delta X_6 &= \Delta\theta_y, \quad \Delta X_7 = \Delta\theta_x, \quad \Delta X_8 = \frac{\Delta w}{a}, \quad \Delta X_9 = \frac{\Delta v}{a}, \\
\Delta X_{10} &= \frac{\Delta u}{a}, \quad \Delta X_{11} = \frac{a^2 \Delta N_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\
\Delta X_{12} &= \frac{a^2 \Delta N_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad \Delta X_{13} = \frac{a^2 \Delta N_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\
\eta &= \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{b}, \quad \xi = \frac{z}{h}
\end{aligned}$$

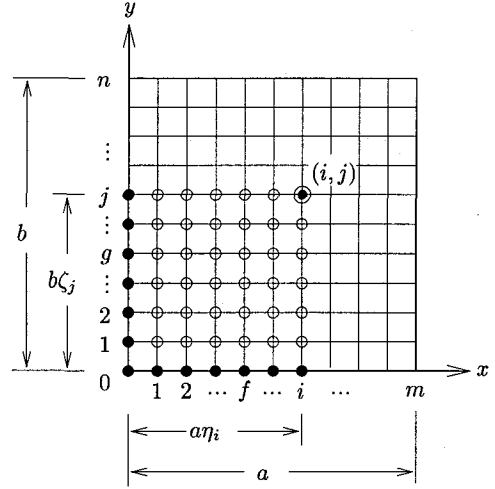


図-3 積層偏平シエルの矩形の離散化モデル

を式 (3)~(15) に導入すると、無次元化された次式を得る。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ F_{1ts} \frac{\partial X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} X_s \right\} + f_t = 0 \quad (16)$$

($t = 1, 2, \dots, 13$)

ここで、 F_{1ts} , F_{2ts} , F_{3ts} は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり、 a, b は積層シエルの横、縦の辺長、 $\mu = \frac{b}{a}$ は辺長比、 $D_0 = \frac{E_2 h_0^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ は基準シエル剛度、 h_0 は基準シエル厚である。

式 (16) の解析解を一般的に求めるのはほとんど不可能であると考えられる。そこで、図-3 に示すような矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする。図-3 に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 (f, g) に関する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを領域 $[i, j]$ と表記することとする。○印を付けた交点 (i, j) をこの領域 $[i, j]$ の主要点と称し、領域 $[i, j]$ 内の主要点以外の交点 (f, g) , $f = 0, 1, \dots, i, g = 0, 1, \dots, j$ をこの領域の従属点と称することとする。さらに、従属点に関しては、 $\eta = 0$ および、 $\zeta = 0$ の境界上にある●印をつけた交点 $(f, 0)$ および $(0, g)$ を境界従属点と称し、その他の○印をつけた交点 (f, g) を内部従属点と称し区別することとする。

2.4 基礎微分方程式の積分方程式への変換と離散化

前節で求められた基礎微分方程式を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換する。式 (3) を無次元化し、積分方程式に変換すると、

$$\int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\partial \Delta X_{11}(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} d\eta d\zeta + \mu \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\partial \Delta X_{13}(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta$$

$$-\int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \bar{k}_x(\eta, \zeta) \Delta X_2(\eta, \zeta) = 0 \quad (17)$$

となる。以下同様に式(4)～(15)を変換する。

次に、求められた積分方程式の離散化を行う。積分方程式を等間隔の数値積分法の応用により、領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 (f, g) の諸量を用いて離散表示すれば、無次元化された断面力および変形 $\Delta X_p (p=1 \sim 13)$ の主要点 (i, j) における値 ΔX_{pij} に関する連立方程式が得られる。式(17)は以下のように離散表示される。

$$\begin{aligned} & \beta_{ii} \Delta X_{11ij} + \mu \beta_{jj} \Delta X_{13ij} - \beta_{ii} \beta_{jj} \bar{k}_{xij} \Delta X_{2ij} \\ &= \sum_{k=0}^i \beta_{ik} [\Delta X_{11k0} - \Delta X_{11kj} (1 - \delta_{ki})] \\ &+ \mu \sum_{l=0}^j \beta_{jl} [\Delta X_{130l} - \Delta X_{13il} (1 - \delta_{lj})] \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 β_{ik}, β_{jl} は数値積分における重み係数、 δ_{ij} はKronecker's deltaである。以下同様に積分方程式に変換された式(4)～(15)を離散表示する。

次に離散表示された式の左辺の係数マトリックスを $[\bar{\gamma}_{tp}]$ 、右辺を $A_t (t=1 \sim 13)$ とおいて、マトリックス表示すると、

$$[\bar{\gamma}_{tp}] [\Delta X_{pij}] = [A_t]$$

と表わすことができる。具体的には、領域 $[i, j]$ における主要点 (i, j) の諸量 ΔX_{pij} と境界従属点 (f, g) の諸量 ΔX_{pfg} との間の関係式が求められ、次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta X_{pij} = & \sum_{t=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [\Delta X_{tk0} - \Delta X_{tkj} (1 - \delta_{ik})] \right. \\ & + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pt} [\Delta X_{t0l} - \Delta X_{til} (1 - \delta_{lj})] \\ & + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{ptkl} \Delta X_{tkl} (1 - \delta_{ik} \delta_{jl}) \left. \right\} \\ & - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} A_{pi} \Delta \bar{q}_{kl} \end{aligned} \quad (19)$$

各領域の主要点の諸量 ΔX_{pij} を式(19)により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量 ΔX_{pfg} として、式(19)の右辺に逐次代入していくと、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) における諸量 ΔX_{pij} は、この領域の境界従属点 $(f, 0), (0, g)$ における諸量 $\Delta X_{rf0}, \Delta X_{s0g}, (r=1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (s=2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13)$ のみによって表わされることになり、次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{f=0}^i a_{pijfd} \Delta X_{rf0} + \sum_{g=0}^j b_{pijgd} \Delta X_{s0g} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (20)$$

この式(20)を用いて、各増分段階において APPENDIX に示す不平衡力および非線形項を計算し、逐次代入し

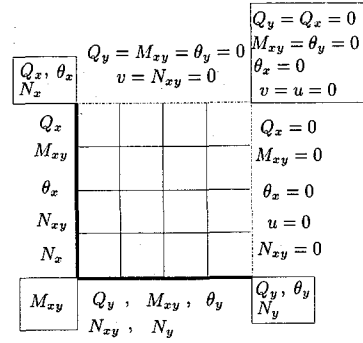


図-4 四辺単純(ピン)支持 1/4 部分

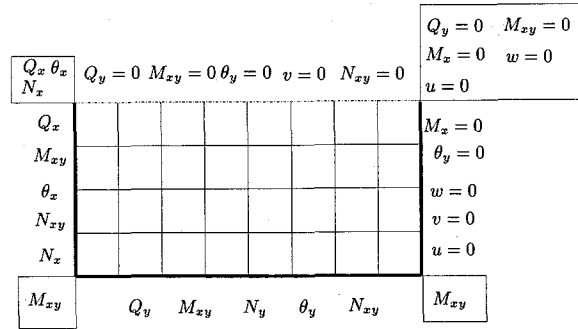


図-5 四辺単純(ピン)支持 1/2 部分

て収束計算を行うことにより非線形解析が行われる。なお、ここでの収束判定は増分荷重量によって行い、収束条件は $n-1$ 回目の増分荷重量を Δq_{n-1} とすると、

$$\left| \frac{\Delta q_{n-1} - \Delta q_n}{\Delta q_n} \right| < 10^{-3} \quad (21)$$

としている。

2.5 積分定数と境界条件

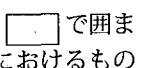
積層偏平シェルを解析する上で、必要となる境界条件について述べる。各辺上における積分定数および境界条件は、幾何学的に求められる。また、で囲まれた積分定数および境界条件は、隅角点におけるものである。隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において交差する二境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。

図-4に四辺単純(ピン)支持での1/4部分の積分定数と境界条件を、図-5に1/2部分の積分定数と境界条件を示す。なお、全体部分の解析によりこれらの境界条件を満足することを確認している。

3. 積層偏平シェルの対称座屈挙動

本論文で用いた積層偏平シェルは、 $a/b=1$ の正方形のクロスプライ偏平シェルであり、等分布荷重を満

表-1 材料特性および諸量

弾性係数比	: $E_1/E_2 = 25$
せん断弾性係数比	: $G_{12}/E_2 = 0.5$
	$G_{23}/E_2 = 0.2$
ポアソン比	: $\nu_{12} = 0.15, \nu_{21} = 0.006$
辺長シェル厚比	: $a/h = 100$
微小変位増分	: $\Delta \bar{w}_c = 0.02$

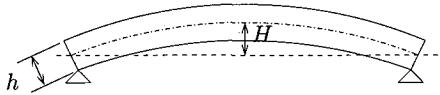


図-6 ライズ高 H と板厚 h

載するものとする。材料特性および諸量は、既往の解⁴⁾と比較するために表-1に示す値を用いており、数値解析では特に断りのない限りこの値を用いる。

ここでは対称座屈問題のみ取り扱っているため、 $x = 0.5a$ および $y = 0.5b$ の2軸対称性を考慮してシェルの1/4部分を対象とし、幾何学的非線形挙動を追跡するために微小変位増分 $\Delta \bar{w}_c = 0.02$ により計算を進め、各変位ステップにおいては収束計算を行った。

なお、図中で用いる無次元量パラメーターは以下のとおりであり、 w_{center} は中央点のたわみ、 H はライズ高(図-6参照)である。また、今回は等厚シェルのみを取り扱っているため、 $h_0 = h$ となる。

$$\bar{q} = \frac{qa^4}{64E_2h_0^2H^2}, \quad \bar{w}_c = \frac{w_{center}}{h_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_0},$$

$$\bar{M}_x = \frac{aM_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad \bar{N}_x = \frac{a^2N_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

3.1 本解法の実用性

本解法の収束性および精度を明らかにするために、 x, y 軸方向の分割数 $m = n = 2, 3, 4, 5$ (板全体では4, 6, 8, 10) と変化させて、2層逆対称積層偏平シェル($0^\circ/90^\circ$)の幾何学的非線形解析を行った。ここでは、ライズ高とシェル厚の比 $H/h = 1.25$ とし、境界条件は四辺単純(ピン)支持としている。

図-7は積層偏平シェルの中央点での荷重-たわみ曲線である。同図より、 x, y 軸方向の分割数を増加させるにつれて、本解析値は一様に収束しており、飛び移り現象も十分に追跡できている。さらに、分割数 $m = n = 4$ 程度でも Liao らによる解⁴⁾ともほぼ一致していることから、以後、シェルの1/4部分の横縦方向の分割数を $m = n = 4$ とする。

3.2 ライズ高シェル厚比 H/h による影響

ライズ高シェル厚比 H/h による影響を調べるために、 H/h を0.5~1.25まで変化させ、4層逆対称積層偏平

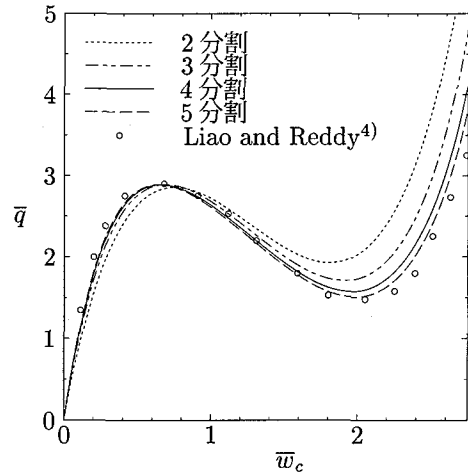


図-7 収束性および既往の解との比較

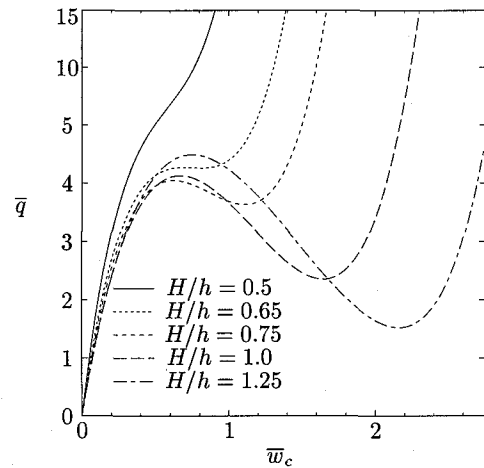


図-8 H/h による影響 (ピン支持)

シェル($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)の解析を行った。なお、境界条件は四辺単純(ピン)支持としている。

図-8は中央点における荷重-たわみ曲線である。なお、ここでは Leicester⁵⁾の表現と同様に、荷重の極大値を Snap-Through (以下、S.T. と略す) 荷重、極小値を Snap-Back (以下、S.B. と略す) 荷重と称することとする。 H/h を増加させると、 $H/h = 0.65$ 程度で飛び移り現象を生じることになる。さらに増加させると、S.T. 荷重は若干増加していくが、S.B. 荷重は減少していく。また、S.T. 時のたわみはほとんど同じ値となっており、 H/h には影響されないようである。

3.3 境界条件による影響

境界条件による影響を調べるために、四辺固定支持、四辺単純(ピン、ローラー)支持とした場合の4層逆対称積層偏平シェル($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)の解析を行った。なお、ライズ高シェル厚比 $H/h = 1.25$ としている。

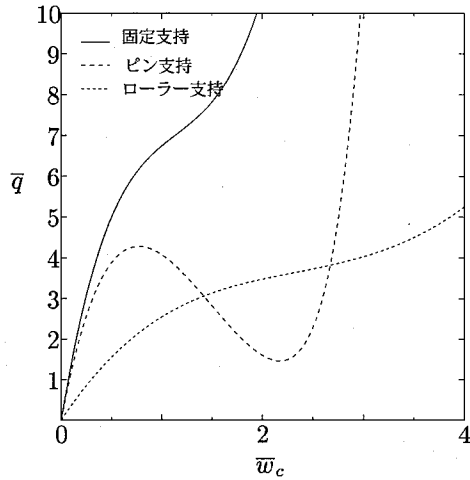


図-9 境界条件による影響

表-2 材料特性および諸量	
せん断弾性係数比	$G_{12}/E_2 = 0.4$
	$G_{23}/E_2 = 0.2$
ポアソン比	$\nu_{12} = 0.15$
辺長シェル厚比	$a/h = 100$
微小変位増分	$\Delta \bar{w}_c = 0.01$
境界条件	四辺単純 (ピン) 支持

図-9 はそれぞれの境界条件の場合の中央点における荷重-たわみ曲線である。同図よりまず単純支持を比較すると、ピン支持では飛び移り現象を生じているのに対し、ローラー支持では生じていないため、水平方向の拘束があることにより、飛び移り現象が生じやすくなる。さらに、固定支持とピン支持を比較すると、回転方向の拘束があることにより、逆に飛び移り現象が生じにくくなる。

4. 積層偏平シェルの非対称座屈挙動

偏平シェルに関しては、シェル厚が薄い場合には、対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈を起こす場合がある。そこで、積層偏平シェルの非対称座屈挙動を明らかにするために、シェル厚が薄い場合についての幾何学的非線形解析を行った。

非対称座屈問題においては、 $y = 0.5b$ の 1 軸対称性を考慮してシェルの 1/2 部分を対象とするため、分割数は $m = 8$ 、 $n = 4$ とし解析を行った。数値解析に用いた材料特性および諸量を表-2 に示す。

4.1 対称座屈挙動と非対称座屈挙動の比較

対称座屈挙動と非対称座屈挙動の比較を行うため、 $H/h = 1.8$ 、 $E_1/E_2 = 25$ とした場合の 4 層逆対称積層

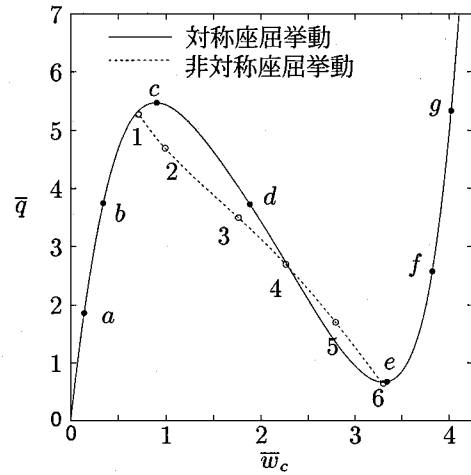


図-10 対称・非対称座屈挙動

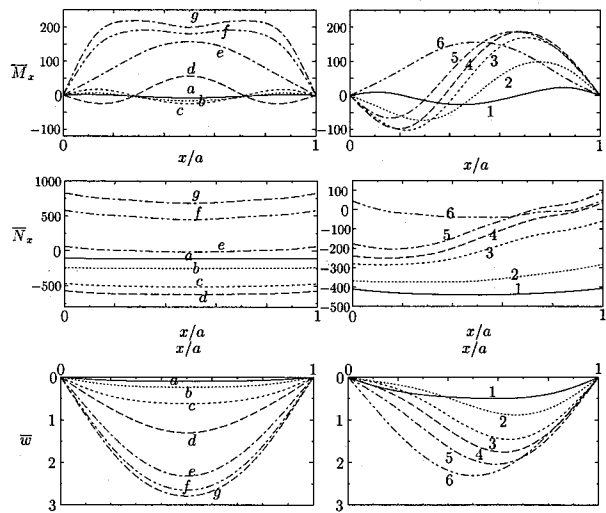


図-11 断面力およびたわみの分布

偏平シェル ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) の解析を行った。

図-10 には、非対称座屈を起こす場合の中央点における荷重-たわみ曲線を破線で示している。同図の実線は 1/4 部分を対象とした解析により得られた対称座屈挙動の場合であり、対称座屈荷重値よりも低い点 1 で破線の非対称座屈挙動に移行し、やがて点 6 で対称座屈挙動に戻っている。

図-10 の代表的な荷重段階 ($a \sim g$, $1 \sim 6$) における、 $y = 0.5b$ 上の曲げモーメント、面内力およびたわみの分布を図-11 に示す。曲げモーメント、たわみは非対称な分布が顕著に現われている。面内力は、はじめは圧縮力 ($a \sim b$) として増加していくが、非対称座屈が生じると減少していく ($1 \sim 5$)。その後、対称座屈挙動に戻ると引張力となり ($6, e$)、面内力は増加していく ($f \sim g$)。

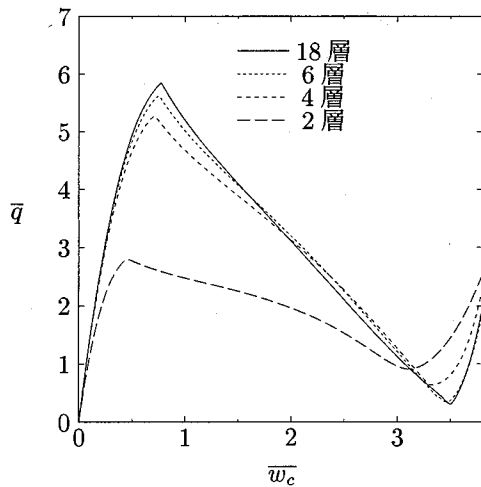


図-12 積層数による非対称座屈挙動の変化 ($E_1/E_2 = 25$)

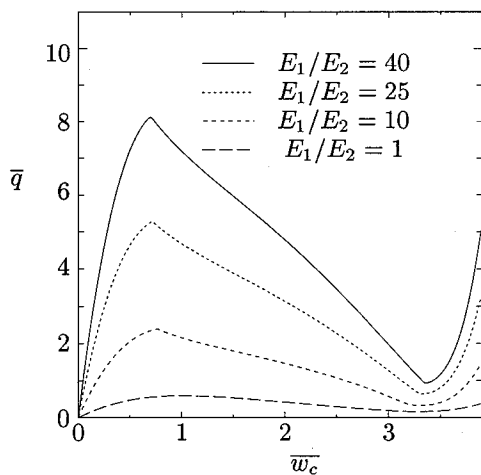


図-13 弾性係数比による非対称座屈挙動の変化 ($N = 4$)

4.2 積層数、弾性係数比の影響

積層数、弾性係数比における影響を調べるために $H/h = 1.8$ を一定とし、積層数 $N = 2, 4, 6$ (弾性係数比 $E_1/E_2 = 25$ と一定) および弾性係数比 $E_1/E_2 = 10 \sim 40$ (積層数 $N = 4$ と一定) と変化させ、逆対称クロスプライ積層偏平シェルの解析を行った。それらの結果を図-12、図-13にそれぞれ示す。なお、比較のために図-12には積層数 $N = 18$ の場合を、図-13には弾性係数比 $E_1/E_2 = 1$ (等方性材料) の場合の結果も示している。

図-12より層数を変化させた場合、層数を多くするにしたがって、S.T. 荷重は大きくなり、逆にS.B. 荷重は小さくなる。4, 6層ではS.T. 荷重にさほど差はないが、2層ではおよそ半分まで低下している。これは、積層数にかかわらず、面内剛性 A_{ij} 、曲げ剛性 D_{ij} は同じ値であるのに対し、カップリング剛性 B_{11}, B_{22} が、4, 6層の場合と比べて、2層の場合が大きいためであると

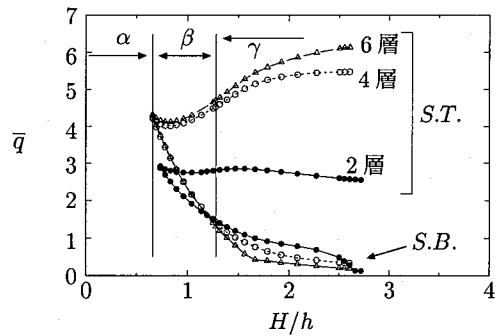


図-14 積層数の変化における S.T. 荷重, S.B. 荷重 ($E_1/E_2 = 25$)

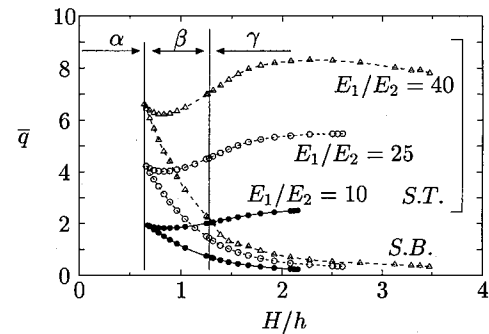


図-15 弾性係数比の変化における S.T. 荷重, S.B. 荷重 ($N = 4$)

考えられる。

図-13より弾性係数比を変化させた場合、弾性係数比を大きくするにしたがって、S.T. 荷重もS.B. 荷重も大きくなる。弾性係数比にかかわらずその時のたわみはほぼ同じである。

4.3 H/h による S.T. 荷重, S.B. 荷重の変化

前節の条件で各層数ごとに H/h を変化させた場合 (弾性係数比 $E_1/E_2 = 25$ と一定) の S.T. 荷重, S.B. 荷重を図-14に、弾性係数比を変えた場合 (積層数 $N = 4$ と一定) の S.T. 荷重, S.B. 荷重を図-15にそれぞれ示す。

なお、座屈を生じない H/h の領域を α 、対称座屈挙動を生じる領域を β 、非対称座屈挙動を生じる領域を γ としている。

図-14、図-15より、 H/h を増加させると、S.T. 荷重は対称座屈挙動が生じはじめた後若干低下し、その後増加してある一定値に近づいていく。S.B. 荷重は一樣に減少する。

次に、図-14、図-15における各層数および各弾性係数比での H/h の領域 α, β, γ の範囲を表-3に示す。表-3より、2層の場合のみ β の範囲は若干狭いが、他の場合はほぼ同じ範囲 ($0.64 \sim 0.68 \leq \beta \leq 1.26 \sim 1.30$) をとる。また、弾性係数比の増加とともに非対称座屈

表-3 各層数, 弾性係数比における H/h の範囲

	H/h
2 層	$\alpha \leq 0.74 \leq \beta \leq 1.24 \leq \gamma \leq 2.71$
4 層	$\alpha \leq 0.66 \leq \beta \leq 1.28 \leq \gamma \leq 2.60$
6 層	$\alpha \leq 0.66 \leq \beta \leq 1.28 \leq \gamma \leq 2.60$
$E_1/E_2 = 10$	$\alpha \leq 0.68 \leq \beta \leq 1.30 \leq \gamma \leq 2.16$
$E_1/E_2 = 25$	$\alpha \leq 0.66 \leq \beta \leq 1.28 \leq \gamma \leq 2.60$
$E_1/E_2 = 40$	$\alpha \leq 0.64 \leq \beta \leq 1.26 \leq \gamma \leq 3.47$

領域 γ が増加しており, 同じ積層数の場合, 弾性係数比が大きくなると異方性が強くなり非対称座屈現象が生じやすくなると考えられる。

5. まとめ

本研究は, 積層偏平シェルの対称・非対称座屈挙動を把握するための一解析手法として, 離散的近似解法を用いた解析法を提示した。

本解析法による積層偏平シェルの対称座屈解析結果と既往の解との比較により, 本解法による数値解は一樣に収束性を持つこと, 比較的粗い分割による解析においても事実上十分の精度を持つ解が得られることなどが確認された。また, 飛び移り現象の追跡も可能であり, ライズ高シェル厚比, 境界条件の違いによる対称座屈挙動特性を明らかにした。

さらに, 対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈挙動の追跡も可能であり, 対称座屈挙動における曲げモーメント, 面内力の分布の比較により, 非対称座屈挙動における応力状態を明らかにした。また, 積層数, 弾性係数比の違いがクロスプライ積層偏平シェルの非対称座屈挙動に及ぼす影響を明らかに

し, 対称座屈挙動および非対称座屈挙動を生じるライズ高シェル厚比を明らかにした。

最後に, 本研究を遂行するにあたり, 数値計算を行って戴いた円田光氏 (研究当時, 大学4年生) に感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 土木学会: FRP 橋梁—技術とその展望— 構造工学シリーズ14, 丸善, 2004.
- 2) 福田 博, 邊 吾一: 複合材料の力学序説, 古今書院, 1989.
- 3) Chang, T.Y. and Sawamiphakdi, K.: Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method, Comput. Structures, Vol.13, pp.331-340, 1981.
- 4) Liao, C.L. and Reddy, J.N.: Analysis of Anisotropic, Stiffened Composite Laminates Using a Continuum-Based Shell Element, Comput. Structures, Vol.34, No.6, pp.805-815, 1990.
- 5) Leicester, R.H.: Finite Deformation of Shallow Shells, Proc. of ASCE, Vol.94, No.EM6, pp.1409-1423, 1968.
- 6) Ramm, E.: Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente, Habilitation, Universität Stuttgart Bericht, Nr.76-2, 1971.
- 7) 森田千尋, 松田 浩, 崎山 毅, 川神雅秀: 変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.111-120, 1994.
- 8) Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, T.: Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates, Int. J. Solids Struct., Vol.2, pp.665, 1965.

APPENDIX

$$\Delta N_c = \Delta N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \Delta N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2\Delta N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y}$$

$$\Delta W_{xc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2, \quad \Delta W_{yc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2,$$

$$\Delta W_{xyc} = \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

(2006 年 4 月 13 日 受付)