

剛塑性体における位相最適化に関する基礎的研究

A FUNDAMENTAL STUDY ON TOPOLOGY OPTIMIZATION OF RIGID-PLASTIC BODY

西藤 潤*
Jun SAITO

*学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

Topology optimization has received a wide range attention since Bendsøe and Kikuchi solved linear elastic problems. Recently non-elastic body problems have been often studied. However, the study of topology optimization for rigid-plastic body cannot be seen though the design with plasticity concept is considered to be important. Therefore, we propose a method of topology optimization for rigid-plastic body. In order to show applicability of this method, we solve a problem which design domain is rectangular. The result of its numerical calculation is quite reasonable.

Key Words : topology optimization, rigid plastic body, interior point method, density

1. はじめに

形状の位置やつながり方などを最適化するいわゆる位相最適化問題は Bendsøe, Kikuchi¹⁾の研究以降、広い分野で注目されている。Bendsøe らは線形弾性体を対象に位相最適化の研究を行った。近年では非線形応答をしめす材料に対しても位相最適化の研究が活発に行われている^{2),3)}。

しかしながら、弾性変形を完全に無視したいいわゆる剛塑性体を対象にした位相最適化の研究は見受けられない。その理由は、主に 2 つ考えられる。

- 1 つめの理由は、剛塑性体では微視的な構造から巨視的な降伏関数をもとめることが難しいことである。弾性体では均質化法を用いて多孔質材料の巨視的な弾性定数を数値的に求めることができるため、空孔の大きさや形状などを設計変数にとって位相最適化を行うことが可能である。しかしながら、剛塑性体では多孔質材料の降伏関数をもとめることは困難であり、また、弾性体の均質化法のように位相最適化に利用できる解析手法は今のところ見当たらない。
- 2 つめの理由は、従来から使用されている剛塑性有限要素法（以下、従来型という）は Drucker-Prager の降伏関数などの限られた降伏基準しか使えないことである。従来型の剛塑性有限要素法は、Hayes, Marçal⁴⁾によって提案された手法で、剛塑性体に対する数値解析法として一般的に使われている。この数値解法では、未知数として応力を含まない形の方程式を解くため、計算過程で応力が消去可能となる降伏関数を使う必要がある。そのため、仮に均質化法のような手法で多孔質材料の降伏関数が求まったとしても、従来型剛塑性有限要素法では解析できないと考えられる。

1 つめの問題は、大変解決困難な問題であり、今後の研究・開発が期待される。一方、2 つめの問題については、小林が提案した混合型剛塑性有限要素法^{5),6)}を用

いることで解決可能である。混合型剛塑性有限要素法は応力に関して 2 階微分可能であればどのような降伏関数を用いてもよいという利点を持っている。

本論文では、多孔質材料の空隙と降伏関数の関係が与えられたと仮定して、剛塑性体の位相最適化問題を解くための基礎的な考え方を示す。

2. 剛塑性体の位相最適化

本章では、変数は全て離散化して表現する。同一項内に同じ添字 i, j, k が表れる場合、総和規約を適用する。ただし、添字 α については総和規約を適用しない。また、変数の表記についての詳細は付録 I に記述した。

2.1 問題の設定

本論文の目的は「ある与えられた外荷重に対して、塑性崩壊しないような構造物の形状のうち、もっともコストが低くなるものをもとめること」である。

本論文で提案する剛塑性体の最適化では、物質の密度分布を用いて形状を決定する。ここで、密度 ρ は空間において物質が占める割合と定義する。物質のない空間には空隙が存在すると仮定する。2 次元の有限要素法の場合、要素 i の密度 ρ_i を次のように定める。

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{\text{要素 } i \text{ において物質が占める面積}}{\text{要素 } i \text{ の面積}} \\ &= 1 - \frac{\text{要素 } i \text{ において空隙が占める面積}}{\text{要素 } i \text{ の面積}}\end{aligned}$$

密度 ρ_i の定義から分かるように、 $\rho_i = 1$ のときには要素 i は全て物質で占められており、 $\rho_i = 0$ のときには要素 i には全く物質が存在しない。なお、弾性体の位相最適化では均質化法を利用できるため、図-1a のように微小なセル内に矩形の空孔をもうけ、その大きさや傾きなどを設計変数としている。剛塑性では、均質化法に相当する手法が使えないため、図-1b のように微小なセルで見ても巨視的な構造と同様空孔を多く含ん

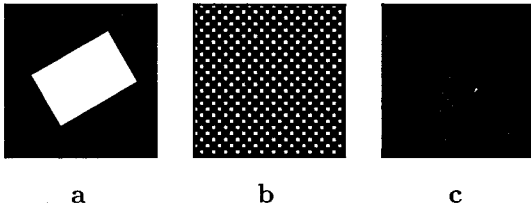


図-1 微視的な構造をもつ材料の微小なセル

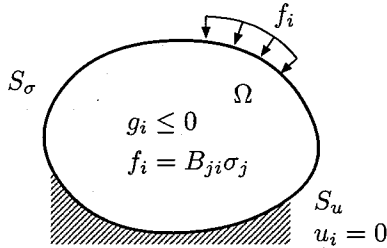


図-2 対象とする剛塑性境界値問題

でいるような理想的な構造を有するものとする。図-1c は空孔のない密度 $\rho_i = 1$ のセルである。

図-2 に境界値問題のモデルを示す。物質の配置を許容する領域を設計領域 Ω とし、この領域内で物質の最適な密度 ρ_i の分布を求める。設計領域 Ω は、斉次 Dirichlet 境界 S_u と Neumann 境界 S_σ によって囲まれている。外荷重 f_i は非斉次 Neumann 境界 S_σ 上で与えられる。

混合型有限要素法の定式化に倣い、静力学的条件を制約条件とすると、解くべき問題は次のように数式で表される。

$$\begin{aligned} C(\rho) \rightarrow \min \\ \text{sub.to} \quad \begin{cases} f_i = B_{ji}\sigma_j \\ g_i(\sigma, \rho) + s_i = 0 \\ 0 \leq s_i \\ 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

目的関数は密度 ρ_i を変数にもつコスト関数 $C(\rho)$ であり、設計変数である密度 ρ_i に関して最小化を行う。密度は材料の量に比例するため、コスト関数は材料費と捉えることも可能である。

問題 (1) の制約条件が持つ意味を以下で説明する。

- 1つめの制約条件は「力の釣合式」を表している。静力学的な要請から与えられた荷重 f_i に対して系は釣り合っていないといけない。ここで、 f_i は斉次 Dirichlet 条件に対応する要素を縮約した荷重を表すベクトルである。 B_{ij} は有限要素法に現れる B マトリクスに要素の面積を乗じ、斉次 Dirichlet 条件に対応する列を縮約したマトリクスである。 σ_i は応力を表すベクトルである。応力 σ_i は要素中央の 1 点で評価している。
- 2つめと 3つめの制約条件は「系が塑性崩壊しないこと」を意味している。要素 i が塑性崩壊して

いないとき $g_i(\sigma, \rho) < 0$ であるような降伏関数を用いると系が塑性崩壊しない条件は $g_i \leq 0$ となる。これを、非負の slack 変数 s_i を用いて等式制約にすると 2つめの制約条件が得られる。3つめは slack 変数 s_i が非負であることを言っているに過ぎない。なお、降伏関数は応力 σ_i だけの関数ではなく、応力 σ_i と密度 ρ_i の関数である。つまり、密度の値によって応力の取り得る値が変化する。

- 4つめの制約条件は「密度 ρ_i が 0 から 1 の間の値をとること」を意味している。この制約条件は、密度の定義より明らかである。

問題 (1) は、 $C(\rho)$ が ρ_i に関して凸関数で実行可能領域が有界な閉集合、つまり、コンパクト集合であれば、非線形最適化理論から解を持つことがいえる⁷⁾。

2.2 コスト関数

コスト関数はさまざまな定義が考えられるが、本論文では、単純のため、コスト関数を密度を領域で積分した値と定義する。コスト関数は、要素の面積 a_i を用いて次のように表される。

$$C(\rho) = \rho_i a_i \quad (2)$$

このコスト関数は密度 ρ_i に関して線形であるため、凸関数であり、2階微分可能である。このコスト関数は、材料の量に比例するため、材料の量を最小化しているとも考えることもできる。

2.3 降伏関数

降伏関数と密度の関係を求めることは大変困難であり、また本論文の目的とするところではないため、ここでは、理想的な降伏関数を仮定する。まず、降伏関数は密度 ρ_i によらず等方性を有していると仮定する。この仮定より、降伏関数は主応力によって表現可能である。

$\rho = 1$ のとき、すなわち空間がすべて物質で占められているとき、次式で表される降伏関数に従うものとする。

$$\begin{aligned} g(\sigma_1, \sigma_2, \rho = 1) \\ = \sqrt{\left\{ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)/2}{M} \right\}^2} - 1 \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 σ_1, σ_2 は主応力であり、 M は十分大きい値とする。この降伏関数は、 $M = \infty$ のとき、粘着力 $c = 1$ の von-Mises の降伏基準と一致する。後述するように、解析では $\rho_i = 0$ の降伏関数と線形補間を行うため、 M は有限の値を用いる。なお、 M が有限であれば、主応力を座標にとったとき降伏曲面は楕円形となる。例えば $M = 5.0$ のとき、降伏曲面は図-3 になる。破線は粘着力 $c = 1$ の von-Mises の降伏基準 ($M = \infty$) を表している。

$\rho = 0$ のとき、すなわち要素内に全く物質が配置されていないときは、降伏基準は次式で示す降伏関数に

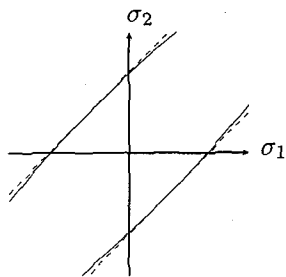


図-3 $\rho = 1$ における降伏曲面 ($M = 5.0$)

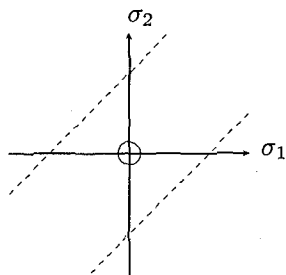


図-4 $\rho = 0$ における降伏曲面 ($m = 0.20$)

従うものとする。

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \rho = 0) = \sqrt{\left\{ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{m} \right\}^2 + \left\{ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)/2}{m} \right\}^2} - 1 \quad (4)$$

主応力を座標にとるとこの降伏曲面は円形で表される。例えば、 $m = 0.20$ のとき降伏曲面は図-4 のようになる。この降伏関数を用いると、要素は微小な応力に対して塑性崩壊し、また、比較的自由な値をひずみ速度としてとることができる。そのため、周囲の変形に応じて自由な変形が可能であり、空間に物質が配置されていないときと似た挙動を示す。以下で、ひずみ速度の値を自由にとれる理由を説明する。主ひずみ速度 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は流れ則より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \end{Bmatrix} = \frac{\lambda}{m^2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

となる。この計算では、塑性崩壊するときは $g = 0$ 、すなわち式 (4) 右辺第 1 項が 1 となることを利用している。式 (5) 最左辺の主応力 σ_1, σ_2 は力の釣合式を満たすものであれば、自由に選ぶことができる。また、主応力 σ_1, σ_2 は図-4 に示すような微小な円の降伏曲面内に応力をとるため、非常に微小な値をとる。そのため、 $\rho \neq 0$ となる要素の釣合式に与える影響はほとんどない。つまり、主応力 σ_1, σ_2 は大きさは微小であるが、方向は自由に選べる変数である。また、塑性定数 λ は要素内で定められる値で周囲の要素の影響を受けないため、自由な値を選択することができる。つまり、 σ_1, σ_2 が方向を、 λ が大きさを自由に選択できるため、式 (5) の $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は値を自由にとることができる。

$0 < \rho < 1$ のときは、降伏関数 $g(\sigma_1, \sigma_2, \rho)$ は $\rho = 0$ と $\rho = 1$ の降伏関数を線形補間することによって作られると仮定する。式 (3), (4) より、線形補間して作られた降伏関数は以下のような式で表される。

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \rho) = \sqrt{\left\{ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{a(\rho)} \right\}^2 + \left\{ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)/2}{b(\rho)} \right\}^2} - 1 \quad (6)$$

$\rho = 1$ のとき、 $a(\rho) = 1, b(\rho) = M$ で、 $\rho = 0$ のとき、 $a(\rho) = m, b(\rho) = m$ である。 ρ と $a(\rho), b(\rho)$ の関係を表-1 に示す。

表-1 ρ と a, b の関係			
	$\rho = 0$	$0 < \rho < 1$	$\rho = 1$
a	m	$\searrow$	1
b	m	$\nearrow$	M

なお、図-3、図-4 から分かるように、 $g(\sigma_1, \sigma_2, \rho = 1) \leq 0$ および $g(\sigma_1, \sigma_2, \rho = 0) \leq 0$ を満足する応力の実行可能領域はコンパクト集合となる。 $0 < \rho < 1$ では、その 2 つを線形補間しているので、結局 $g(\sigma_1, \sigma_2, \rho) \leq 0$ を満足する応力および密度の実行可能領域はコンパクト集合となる。また、式 (6) の形からわかるように 2 階微分可能である。

2.4 主双対内点法による求解

問題 (1) は、非線形の主双対内点法⁸⁾を用いて解くことができる。最適化問題 (1) に対する Lagrange 関数は

$$L(\sigma, s, \rho, u, \lambda, t, v^l, v^u) = C(\rho) + u_i (f_i - B_{ji} \sigma_j) + \lambda_i (g_i + s_i) - t_i s_i - v_i^l \rho_i - v_i^u (1 - \rho_i) \quad (7)$$

として定義される。ただし、 u_i, λ_i は等式制約に対する Lagrange 乗数であり、 t_i, v_i^l, v_i^u は不等式制約に対する非負の Lagrange 乗数である。このとき問題 (1) に対する KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) は次のように表される。

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = f_i - B_{ji} \sigma_j = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i + s_i = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_i} = -B_{ij} u_j + \frac{\partial g_j}{\partial \sigma_i} \lambda_j = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = \lambda_i - t_i = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_i} = \frac{\partial C}{\partial \rho_i} + \frac{\partial g_j}{\partial \rho_i} \lambda_j - v_i^l + v_i^u = 0 \quad (12)$$

$$t_i s_i = 0, \quad t_i \geq 0, \quad s_i \geq 0 \quad (13)$$

$$v_i^l \rho_i = 0, \quad v_i^l \geq 0, \quad \rho_i \geq 0 \quad (14)$$

$$v_i^u (1 - \rho_i) = 0, \quad v_i^u \geq 0, \quad 1 - \rho_i \geq 0 \quad (15)$$

KKT 条件から非負の Lagrange 乗数 t_i, v_i^l, v_i^u を消去するため、式 (11)–(15) を次のようにまとめる。 s_α を式 (11) に乗じると、式 (13) より t_i の項が消え、

$$s_\alpha \lambda_\alpha = 0 \quad (16)$$

を得る。なお、式 (16) およびこれ以降では、 α に関しては総和規約を適用しない。同様に $\rho_\alpha(1 - \rho_\alpha)$ を式 (12) に乗じると、式 (14), (15) より v_i^l, v_i^u の項が消え、

$$\rho_\alpha(1 - \rho_\alpha) \left\{ \frac{\partial C}{\partial \rho_\alpha} + \frac{\partial g_j}{\partial \rho_\alpha} \lambda_j \right\} = 0 \quad (17)$$

を得る。また、式 (11) および t_i の非負性より $\lambda_i = t_i \geq 0$ となる。Lagrange 乗数 t_i, v_i^l, v_i^u が消去されたので、考慮すべき不等式制約は

$$\lambda_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (18)$$

となる。結局、問題 (1) に対する KKT 条件は式 (8), (9), (10), (16), (17), (18) にまとめられる。

ここで、これらの式が持つ物理的意味を考察しよう。

式 (8), (9) は 2.1 節で説明した通り、それぞれ力の釣合式、塑性崩壊しない制約条件を表している。

式 (10) において、 u_i を変位速度とみなすと、 $B_{ij}u_j$ はひずみ速度となる。すると、式 (10) はひずみ速度が降伏関数の応力に関する勾配と同じ方向であることを表しており、これは流れ則に他ならない。ここで、問題 (1) には静力学的な条件しか含まれていないが、KKT 条件から運動学的な条件が導かれていることが分かる。

式 (16) を満足するためには、少なくとも λ_i, s_i のいずれかが 0 にならなければならない。式 (9) から $g_i = -s_i = 0$ となるので、 $s_i = 0$ は要素 i において塑性崩壊が生じていることを表している。また、 $\lambda_i = 0$ は式 (10) の流れ則から分かるように、要素 i においてひずみ速度が発生していないことを表している。つまり、式 (16) は次のいずれかの状態をとることを意味している。

1. $s_i \neq 0, \lambda_i = 0$ 塑性崩壊が生じておらず、ひずみ速度が発生していない。
 2. $s_i = 0, \lambda_i \neq 0$ 塑性崩壊が生じて、ひずみ速度が発生している。
 3. $s_i = 0, \lambda_i = 0$ 塑性崩壊が生じているが、ひずみ速度は発生していない。
- 3 つめの状態については小林の研究⁵⁾で詳細に考察されている。

式 (17) より、 $\frac{\partial C}{\partial \rho_i} + \frac{\partial g_j}{\partial \rho_i} \lambda_j = 0, \rho_i = 0, \rho_i - 1 = 0$ のいずれかを満足しなければならないことが分かる。 $\frac{\partial C}{\partial \rho_i} + \frac{\partial g_j}{\partial \rho_i} \lambda_j = 0$ を密度の最適性条件と呼ぶこととする。この密度の最適性条件は著者らの研究⁹⁾を参照されたい。 $\rho_i = 0$ は、要素 i には物質が存在しないことを表しており、 $\rho_i - 1 = 0$ は、要素 i は全て物質で占められていることを表している。結局、式 (17) は次のいずれかの状態となることを意味している。

- $\rho_i = 0$ 要素 i には物質が存在しない。
- $\rho_i = 1$ 要素 i は全て物質で占められている。
- $0 < \rho_i < 1$ 要素 i の密度は 0 から 1 の間をとり、密度の最適性条件を満足する。

KKT 条件から求めた式 (8), (9), (10), (16), (17), (18) を同時に満足する解を Newton-Raphson 法を用いて求める。初期解は式 (18) の不等式制約を満足するように選ぶ。式 (8), (9), (10), (16), (17) を 1 次の増分系で表すと次のようになる。

$$-B_{ji}\Delta\sigma_j = B_{ji}\sigma_j - f_i \quad (19)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \sigma_j} \Delta\sigma_j + \Delta s_i + \frac{\partial g_i}{\partial \rho_j} \Delta\rho_j = -g_i - s_i \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & -B_{ij}\Delta u_j + \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \Delta\sigma_j + \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial \sigma_i \partial \rho_j} \Delta\rho_j \\ & + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \sigma_j} \right)^t \Delta\lambda_j = B_{ij}u_j - \frac{\partial g_j}{\partial \sigma_i} \lambda_j \end{aligned} \quad (21)$$

$$s_\alpha \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha \Delta s_\alpha = -s_\alpha \lambda_\alpha \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \rho_\alpha(1 - \rho_\alpha) \frac{\partial^2 g_k}{\partial \sigma_j \partial \rho_\alpha} \lambda_k \Delta\sigma_j + \rho_\alpha(1 - \rho_\alpha) \frac{\partial g_j}{\partial \rho_j} \Delta\lambda_j \\ & + \rho_\alpha(1 - \rho_\alpha) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_k} + \frac{\partial^2 g_j}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_k} \lambda_j \right) \Delta\rho_k \\ & - 2\rho_\alpha \left(\frac{\partial C}{\partial \rho_\alpha} + \frac{\partial g_j}{\partial \rho_\alpha} \lambda_j \right) \Delta\rho_\alpha \\ & = -\rho_\alpha(1 - \rho_\alpha) \left(\frac{\partial C}{\partial \rho_\alpha} + \frac{\partial g_k}{\partial \rho_\alpha} \lambda_k \right) \end{aligned} \quad (23)$$

線形方程式 (19)–(23) を解いて得られる増分を用いて解の更新を行う。解の更新は次式のように求めた増分に緩和係数 β を乗じてから行う。

$$\begin{Bmatrix} u_i^* \\ \lambda_i^* \\ \sigma_i^* \\ s_i^* \\ \rho_i^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \lambda_i \\ \sigma_i \\ s_i \\ \rho_i \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta \lambda_i \\ \Delta \sigma_i \\ \Delta s_i \\ \Delta \rho_i \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ただし、更新した解 $\lambda_i^*, s_i^*, \rho_i^*$ が式 (18) を満足するように緩和係数 β を選ぶ。

解の更新後、再び増分をとって計算を繰り返す。計算は、式 (19)–(23) の右辺が十分に小さくなるまで繰り返す。

3. 解析結果

本章では前章の定式化に基づいて行った数値解析の結果を示す。

解析対象は縦の長さ 2.50、横の長さ 1.00 からなる矩形の領域である。左側を固定し、右側の中央に鉛直下向きの力を加える。図-5 左にその問題図を示す。図-5 の右図は解析に用いた有限要素メッシュである。全体の要素数は 640、節点数は 697 である。

まず、設計領域全体が $\rho = 1$ で均質な剛塑性体であると仮定したときの崩壊荷重 P_c を求める。崩壊荷重

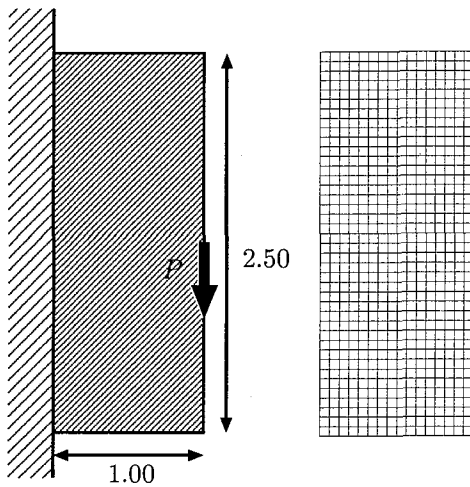


図-5 矩形の設計領域 Ω と境界条件および有限要素メッシュ

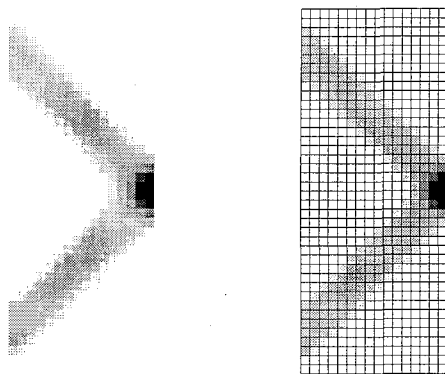


図-6 位相最適化した形状 ($P = P_c/2$)

P_c は混合型剛塑性有限要素法⁶⁾によって求める。2.3 節で示したように $\rho = 1$ のとき、降伏基準はほぼ粘着力 $c = 1$ の von-Mises の降伏関数に従う。解析の結果、崩壊荷重は $P_c = 0.202$ であることが分かった。

次いで、位相最適化を試みた。ここでは簡単のため、均質な場合の崩壊荷重 P_c の $1/2$ の荷重と $1/4$ の荷重を与える 2 つのケースを考える。解析では、十分大きな値を $M = 10^3$ とし、十分小さな値として $m = 10^{-3}$ を用いた。図-6、図-7 にそれぞれ $P = P_c/2$ 、 $P = P_c/4$ のケースにおける位相最適化問題を解いた結果を示す。色の濃いところほど密度が高いことを表している。右側の図は設計領域の有限要素メッシュを重ねた図である。

図-6、図-7 から分かるようにどちらのケースにおいても 2 本の部材からなるトラスのような形状を得た。部材のように見える形状と水平方向のなす角はおおよそ $\pi/4$ である。この結果は付録 II に示した 2 部材トラスの形状最適化問題の解と一致する。ただし、2 部材トラスの問題は、最初から 2 本の部材で構成されているという前提があり、どの断面においても面積および降伏基準が一定と仮定していることに注意が必要である。また、弾性体を対象にした位相最適化問題でも同様に $\pi/4$ の傾きをもつ 2 部材トラスのような結果が報告さ

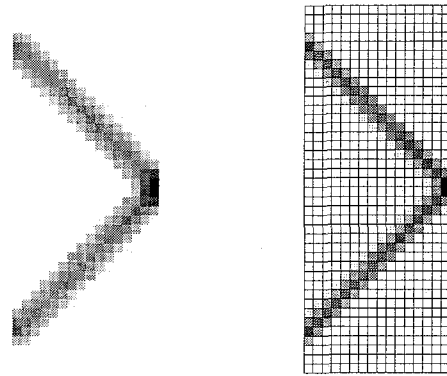


図-7 位相最適化した形状 ($P = P_c/4$)

れている¹⁰⁾。

なお、降伏関数内のパラメータ M, m の値を $M = 10^2, 10^3, 10^4$ や $m = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ などいくつか組み合わせて解析を行ったところ、ほぼ同様の結果を得た。このことから、今回の解析では、最適な位相は M や m にはほとんど依存していないことが分かる。

4. おわりに

本論文で得られた結果を以下に述べる。

- 剛塑性体の位相最適化アルゴリズムを主双対内点法を用いて、具体的に示した。
- 矩形の設計領域を対象に位相最適化を行い、数値解を得た。得られた最適解は納得のいくものであった。ついで、今後の課題を以下に述べる。
- 本論文では、単純な境界値問題しか解いていない。今後は複雑な設定の問題を解き、本論文で示した位相最適化アルゴリズムの適用可能性について検討したい。
- 今回の解析では、問題を解く上で理想的な降伏関数を用いた。今後は、密度と降伏関数の関係を十分に考慮した上で位相最適化を行いたい。

参考文献

- 1) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N. : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.71, pp.197-224, 1988.
- 2) Jung, D. and Gea, H. C. : Topology optimization of nonlinear structures, *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol.40, Num.11, pp1417-1427, 2004
- 3) Maute, K., Schwarz, S. and Ramm, E. : Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Struct. Optim.* Vol.15, Num.2, pp.81-91, 1998
- 4) D. J. Hayes and P. V. Marcal : Determination of upper bounds for problems in plane stress using finite element techniques, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.9, pp245-251, 1966
- 5) 小林俊一：主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法

の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.95-106, 2003.

- 6) Kobayashi, S.: Hybrid type rigid plastic finite element analysis for bearing capacity characteristics of surface uniform loading, *Soils and Found.*, Vol.45, Num.2, pp.17-22, 2005.
- 7) 福島雅夫: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- 8) 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博: 内点法, 朝倉書店, 2001.
- 9) 西藤潤, 田村武, 小林俊一: 剛塑性体における最適な強度分布の探索, 土木学会論文集 (印刷中)
- 10) Suzuki, K. and Kikuchi, N.: A homogenization method for shape and topology optimization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.93, pp.291-318, 1991.

付録 I ベクトルの表記

本論文で使したベクトル変数を以下にまとめる. ベクトル, 物理的意味, 値を評価する場所の順に記した.

f_i	外力	接点	g_i	降伏関数	要素
u_i	変位速度	接点	t_i	Lagrange 乗数	要素
σ_i	応力	要素	v_i^l	Lagrange 乗数	要素
ρ_i	密度	要素	v_i^u	Lagrange 乗数	要素
s_i	slack 変数	要素	a_i	面積	要素
λ_i	塑性乗数	要素			

付録 II 2部材トラスの形状最適化

2本の部材からなるトラスの形状最適化問題を考える (図-8 参照). 左端の壁面から距離 l のところにあるトラス先端に垂直荷重を P を与えたとき, 塑性崩壊しない範囲で, コストが最小になるような形状を探索する. 部材は簡単のため上下対象であるとし, 部材と水平方向のなす角を θ とする. 形状はこの角度 θ のみによって決定される. コストは部材の断面積 A と総部材長 $2l/\cos\theta$ の積 $2Al/\cos\theta$ とする. また, 部材断面にかかる応力 σ が限界塑性応力 σ_c を超えなければ, 塑性崩壊しないものとする. 部材力を S とおくと応力は $\sigma = S/A$ と表され, また力の釣合式から $2S\sin\theta = P$ となる. 断面積 A と限界塑性応力 σ_c は部材で一様な値とする. 結局, 問題は次のように式で表される.

$$\begin{aligned} \frac{2Al}{\cos\theta} &\rightarrow \min \\ \text{sub.to } &\begin{cases} S\sin\theta = P \\ \frac{S}{A} \leq \sigma_c \end{cases} \quad (\text{II.1}) \end{aligned}$$

この問題を解くと $\theta = \pi/4$ という解を得る.

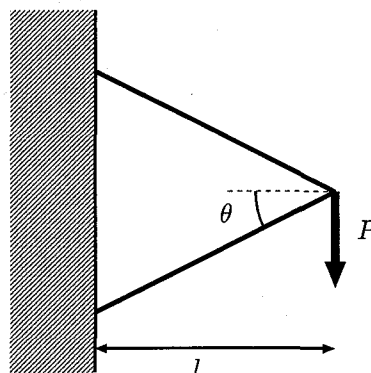


図-8 2部材トラスの形状最適化問題