

保存型時間積分を用いた膜と流体の連成解析手法

Numerical Procedure for Interaction Problem of Membrane and Fluid
by using Conserving Time Integrator

山田貴博*・茅根智浩**・大塚隆行***・伊藤嘉晃****

Takahiro YAMADA, Tomohiro KAYANE, Ryuko OOTSUKA and Yoshiaki ITOH

*正会員 学博 横浜国立大学教授 大学院環境情報研究院 (〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

**横浜国立大学 大学院環境情報学府 博士前期課程 (同上)

***工修 新キャタピラー三菱株式会社 (〒158-8530 東京都世田谷区用賀 4 丁目 10 番 1 号)

****正会員 工博 鹿島建設株式会社 技術研究所 (〒182-0036 東京都調布市飛田給 2-19-1)

In this paper, a numerical procedure for interaction problem of largely deformed membrane and fluid is proposed. Numerical computations of deformable structures in viscous flows often encounter numerical instability, which arises from incompatibility of boundary conditions on a fluid-structure interface. In this work, two aspects of compatibility condition including the balance of energy on the fluid-structure interface and the coupling algorithm are discussed and measures to improve attainment of them in numerical procedures are proposed. In this work, a finite difference method with overlapped meshes is employed to solve a fluid problem accurately. For a membrane, a finite element approximation with the energy-momentum method for the temporal discretization is applied to ensure the conservation of energy and unconditional numerical stability. Numerical solutions of these two subsystems are coupled by the block Gauss-Seidel method. Numerical results are given to show numerical properties including stability of the proposed procedure.

Key Words : fluid-structure interaction, membrane, time integrator, iterative procedure

1. 序

近年, 様々な分野で流体-構造連成問題の数値シミュレーションの必要性が高まっている. 特に, 膜と流体の連成問題のように, 流れの中で構造物が大変形を伴う問題において安定な数値計算を行うためには, 様々な工夫が必要であることが知られている^{1), 2), 3)}. 本研究は, 構造と流体が接する境界における物理量の適合性に着目し, このような膜と流体の連成問題に対する安定な数値計算スキームについて検討を行うものである. 特に本研究では, 数値計算スキームにおける物理量の適合性に関して, 時間積分におけるエネルギー収支と連成解法のアルゴリズムに注目する.

構造と流体が接する境界における物理量が時空間に関する連続関数として完全に適合していれば, 境界上で構造が得るエネルギーと流体が構造になす仕事は自動的に一致する. このとき, 系全体のエネルギーは流体の粘性散逸等を除き保存されることとなる. しかしながら, 数値時間積分の適用により時間方向に離散化された場合には, 有限時間刻みに対するスキームとしての保存性を考えなければならない. 近年では, 流体-構造連成問題の数値計算における数値安定性を考える上で, このようなエネルギーの保存性が重要な役割を果たしていることが報告され, スキームの開発が行われている^{4), 5), 6), 7)}. 特に, 構造物の動力学の問題においては,

エネルギーと運動量を厳密に保存する Energy-Momentum 法⁸⁾などの保存型数値時間積分法が提案されており, 連成問題においても同様な手法が検討されている⁵⁾. また, 流体-構造連成問題は系全体の領域を流体領域と構造領域に分割し, それらを境界で接合しているものと考えられることから, 領域分割法⁹⁾の概念で連成問題の定式化や計算アルゴリズムを検討する試みも行われている⁵⁾. 本研究では, このような枠組みの下で, 弱定式化と境界変数に対して Lagrange 未定乗数法を導入した領域分割法の考え方をを用いて流体-構造連成問題を定式化する. このとき, 保存型数値時間積分を流体, 構造それぞれに適用するとともに, 流体-構造境界における変数に対してエネルギー収支を考慮した近似を導入することにより, 系全体のエネルギー保存を考慮した半離散化形式を導くことができる. 本研究では, このような半離散化形式に基づく連成解析手法を提案する.

一方, 保存型数値時間積分が意味を持つためには, 流体と構造の境界上を含む未知変数は, 時間積分によって離散化された方程式を同時に満たさなければならない. これは, 連成問題において強連成型の解法が必要となることに対応する. また, 数値安定性の面からも強連成法の必要性は認識されている^{2), 3)}. しかしながら, 実際の流体-構造連成問題の数値計算において, 構造解析には有限要素法が主に用いられるのに対して, 流体解析に関しては差分法や有限体積法など有限要素法以

外の解法が望まれる場合がある。特に本研究では、高レイノルズ数流れ中の膜のシミュレーションを目指していることから、信頼性と計算効率を考慮し差分法を選択する。このように差分法に基づく流体計算と有限要素法に基づく構造計算を組み合わせる場合、全体を一つの行列に組み立てて解く一体型の強連成法^{2),10),11)}を適用することは困難であり、流体計算と構造計算を分離して解く分離型の解法¹²⁾が必要となる。そこで、有限要素法による構造計算と差分法による流体計算を連成させることを考え、流体計算と構造計算をそれぞれ分離して解くが1つの計算ステップ内で反復を行うことで強連成法としての解を得る反復型強連成法を適用する。

本研究は、膜と流体の連成問題に対する以上のような保存型数値時間積分に基づく連成解法を提案し、その妥当性を検討するものである。

2. 変分法的定式化

まず、流体領域と構造領域をともに同様な空間的広がりを持つ領域とした一般的な設定から出発する。流体の領域を Ω_f 、構造の領域を Ω_s 、流体と構造の境界を Γ とすると、流体-構造連成問題は、図-1のように、系全体を2つの領域に分割して考えているものとなる。

本研究では、流体として非圧縮粘性流体を考え、流速 $\mathbf{u}$ と圧力 p で記述される非圧縮 Navier-Stokes 方程式によって支配方程式が表されているものとする。また、構造としては超弾性体として表される固体を考え、支配方程式は、変形写像すなわち変形後形状 $\mathbf{X}$ によって表されているものとする。また、境界 Γ 上の流体の表面力を $\boldsymbol{\tau}$ 、構造の表面力を $\mathbf{T}$ とする。このとき、境界 Γ 上の接合条件は、流体の流速と構造の速度の適合条件と表面力の釣り合い条件として以下のように表される。

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\Gamma} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\tau} + \mathbf{T} = 0 \quad (2)$$

ここで、 t は時刻である。

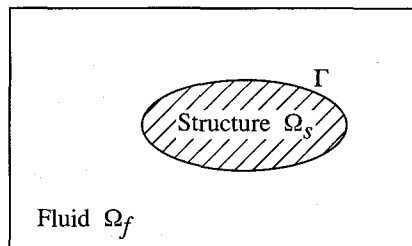


図-1 流体領域と構造領域

本研究では流体と構造の領域境界上において独立変数として Lagrange 記述された変形後の境界位置（座標） $\mathbf{Y}$ を定義し、流体領域と構造領域を Lagrange 未定乗数法により接合する定式化を考える。

流体-構造境界上において流体における流速は、境界上で定義された $\mathbf{Y}$ から求められる速度によって拘束されることとなる。Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\tau}$ を導入し、弱表現としてこの拘束条件を表すと次式となる。

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} - \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\tau}} \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ は次の境界 Γ 上の積分を表す。

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, ds$$

また、 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ は $\boldsymbol{\tau}$ の許容変数である。このとき、流体の支配方程式である運動量保存則と連続の式は以下のように弱定式化される。

$$\int_{\Omega_f} \left\{ \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}} + (\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \hat{\mathbf{u}} - p \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \right\} dx - \langle \boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

$$\int \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ はそれぞれ $\mathbf{u}, p$ の許容変数、 ρ_f, μ はそれぞれ流体の質量密度、粘性係数である。いま、(4)において、Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\tau}$ が流体-構造境界上の表面力として現れていることに注意する。

一方、構造については速度 $\mathbf{U}$ を独立変数とし、Hamilton 原理に基づく定式化を行う。流体-構造境界上においては、境界上で定義された $\mathbf{Y}$ によって構造の座標 $\mathbf{X}$ が拘束されることとなる。Lagrange 未定乗数 $\mathbf{T}$ を導入し、弱表現としてこの拘束条件を表すと次式が得られる。

$$\langle \mathbf{Y} - \mathbf{X}, \hat{\mathbf{T}} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{T}}$ は $\mathbf{T}$ の許容変数である。このとき、構造の支配方程式である座標-速度関係式と運動量保存則は以下のように弱定式化される。

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \mathbf{U} \right) \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dX = 0 \quad (7)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{X}} + (\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{X})) : d\mathbf{E}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \right) dX - \langle \mathbf{T}, \hat{\mathbf{X}} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{U}}$ はそれぞれ $\mathbf{X}, \mathbf{U}$ の許容変数、 ρ_s は構造の質量密度、 $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ は座標から求められるグリーンひずみテンソル、 $\mathbf{C}$ は弾性テンソル、 $d\mathbf{E}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ は、座標 $\mathbf{X}$ に変形した状態における仮想変位 $\hat{\mathbf{X}}$ に対する仮想ひずみである。流体の場合と同様に、(8)において Lagrange 未定乗数 $\mathbf{T}$ が流体-構造境界上の表面力として現れていることに注意する。

さらに, Lagrange 未定乗数である流体の Γ 上の表面力 τ と構造の Γ 上の表面力 T に対しては, 以下の条件が課せられる.

$$\langle \tau + T, \hat{Y} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

これは, 境界 Γ 上の表面力の釣り合い条件 (2) に他ならない.

3. 保存型時間積分

ここでは, 流体, 構造それぞれに保存型の数値時間積分を導入し, 境界上の変数に対して, 流体, 構造相互の表面力がなす仕事等しくなるような時間離散化を行うことで, 系全体のエネルギーを考慮した半離散化形式を考える.

流体において, Γ 上の表面力 τ を時刻 t_n から t_{n+1} において一定値 $\bar{\tau}$ として, 時間方向に近似を行う. 時間刻み $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ とし, 移流項の逆対称形を導入した陰的時間積分^{13),14)}を適用すると, 流体の支配方程式 (4)(5) の時間方向の近似式は次式となる.

$$\int_{\Omega_f} \left\{ \frac{\rho_f}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) \cdot \hat{u} + \rho_f B(u^*) u^{n+\frac{1}{2}} \cdot \hat{u} + \mu \nabla u^{n+\frac{1}{2}} : \nabla \hat{u} - p \nabla \cdot \hat{u} \right\} dx - \langle \bar{\tau}, \hat{u} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

$$\int \hat{p} \nabla \cdot u^{n+1} dx = 0 \quad (11)$$

ここで,

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^n + u^{n+1})$$

$$u^* = \frac{1}{2}(3u^n - u^{n-1})$$

であり, $B(v)u$ は, 次式により定義される逆対称 (Skew-symmetric) 形の移流項¹⁴⁾である.

$$B(v)u = v \cdot \nabla u + \frac{1}{2}(\nabla \cdot v)u \quad (12)$$

このとき, 式 (10) において, 許容変数 $\hat{u} = u^{n+\frac{1}{2}}$ とおき, 連続の式 (11) が各ステップで満足されていることを考慮すると, 次のようなエネルギー評価式が得られる.

$$\frac{\rho_f}{2} \|u^{n+1}\|_f^2 + \Delta t \mu \|\nabla u^{n+\frac{1}{2}}\|_f^2 - \Delta t \langle \bar{\tau}, u^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\Gamma} = \frac{\rho_f}{2} \|u^n\|_f^2 \quad (13)$$

ここで,

$$\|a\|_f^2 = \int_{\Omega_f} |a|^2 dx$$

である.

一方, 構造に対しても Γ 上の表面力 T を時刻 t_n から t_{n+1} において一定値 $\bar{T}$ として時間方向に近似を行う. Energy-Momentum 法⁸⁾を時間積分に適用すると,

構造の支配方程式 (7)(8) は以下のように離散化される.

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left(\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} - U^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \hat{U} dX = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\Omega_s} \left(\frac{\rho_s}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) \cdot \hat{X} + \bar{S} : dE(X^{n+\frac{1}{2}}, \hat{X}) \right) dX - \langle \bar{T}, \hat{X} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (15)$$

ここで, $\bar{S}$ は次式で表される応力の近似である.

$$\bar{S} = \frac{1}{2} (C : E(X^{n+1}) + C : E(X^n)) \quad (16)$$

いま, 構造の支配方程式 (14)(15) において, 許容変数を以下のようにおく.

$$\hat{U} = U^{n+1} - U^n, \quad \hat{X} = X^{n+1} - X^n \quad (17)$$

その結果, 次のようなエネルギー評価式を導くことができる.

$$\frac{\rho_s}{2} \|U^{n+1}\|_s^2 + W(E(X^{n+1})) - \langle \bar{T}, X^{n+1} - X^n \rangle_{\Gamma} = \frac{\rho_s}{2} \|U^n\|_s^2 + W(E(X^n)) \quad (18)$$

ここで,

$$\|a\|_s^2 = \int_{\Omega_s} |a|^2 dX$$

$$W(E(X)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s (C : E(X)) : E(X) dX$$

である.

さらに, Γ 上の変数 Y に対して構造の座標に対しては各時間ステップで $X^n|_{\Gamma} = Y^n$ を課し, (3) に対して, Energy-Momentum 法に従った強形式として

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = u^{n+\frac{1}{2}}|_{\Gamma} \quad (19)$$

を課することとする. このとき, (9) に対応して,

$$\langle \bar{T} + \bar{\tau}, \hat{Y} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (20)$$

を課することにより

$$\langle \bar{T}, X^{n+1} - X^n \rangle_{\Gamma} = -\Delta t \langle \bar{\tau}, u^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\Gamma} \quad (21)$$

が成立する. したがって, (13)(18)(21) から, 系全体のエネルギーに対する次の評価式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_f}{2} \|u^{n+1}\|_f^2 + \Delta t \mu \|\nabla u^{n+\frac{1}{2}}\|_f^2 \\ & + \frac{\rho_s}{2} \|U^{n+1}\|_s^2 + W(E(X^{n+1})) \\ & = \frac{\rho_f}{2} \|u^n\|_f^2 + \frac{\rho_s}{2} \|U^n\|_s^2 + W(E(X^n)) \end{aligned} \quad (22)$$

これは, 本研究で提案する時間に関する半離散化において, 系全体のエネルギーが流体の粘性散逸を除き保存されることを意味している.

4. 流体計算手法

上述の時間積分では、流体に対してエネルギーの意味で無条件安定な陰的時間積分^{13),14)}を考えている。一方、空間方向の離散化を考えた場合には、移流項が卓越する場合には、位相誤差の発生が避けられない。したがって、数値計算法としては何らかの上流化手法による数値粘性を導入しなければ、このような問題に対する数値的に安定な解は得られない。そこで本研究では、高精度上流差分法を用いた流体計算法を適用する。差分法を用いた離散化は、厳密には本研究で考えている保存型数値時間積分には整合しないが、十分精度の高い近似解が差分法により得られれば、結果として系全体の保存性を確保することになると考える。

本研究では、大変形する移動境界を取り扱うことが可能で高レイノルズ数流れに対応できる精度の高い数値計算手法として、重合格子を用いた差分法¹⁵⁾を用いる。この手法では、移流項を3次精度上流差分を用いて陽的に評価し、粘性項に対しては2次精度中心差分を適用し、陰的に評価する。また、連続の式については運動方程式を分離して取り扱うMAC法を用いる。

流体-構造境界上においては、2節で述べたとおり流速と表面力の連続性が境界条件として課せられる。しかしながら、流体計算において流速と表面力を同時に既定することはできないため、流速に対するディリクレ条件あるいは表面力を与えるノイマン境界条件のどちらかを与えることとなる。流速と表面力は共役な変数であることから、一方を既知として与えた場合、他方は計算の結果得られることとなる。いま、差分法による流体計算では、流速に対するディリクレ条件を与えることは容易であるが、境界上で表面力を与えるノイマン境界条件を課すには工夫が必要である。そこで、本研究では流体-構造境界上における境界条件としては、流速に対するディリクレ条件を与えるものとする。このとき、流体-構造境界上における表面力は計算結果として得られ、構造計算においては、この表面力とディリクレ条件とされた流速に対して連続性を考えればよい。

5. 構造計算手法

5.1 膜の定式化

本研究では、構造として奥行き方向に同じ変位となる2次元変形状態の弾性膜を考える。膜は十分薄いことを想定し、面内剛性のみを考慮する。このとき、膜の支配方程式は、材軸方向のパラメータのみで記述される2次元空間内のケーブルと等価となる。材軸方向のパラメータを $\xi \in [0, l]$ とすると、構造の支配方程式(7)(8)を膜に対する方程式として、以下のように書き

換えることができる。

$$\int_0^l \rho_s A \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \mathbf{U} \right) \cdot \hat{\mathbf{U}}_{j_0} d\xi = 0 \quad (23)$$

$$\int_0^l \rho_s A \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{X}} + E \epsilon(\mathbf{X}) \delta \epsilon(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \right) j_0 d\xi - \langle \mathbf{T}, \hat{\mathbf{X}} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (24)$$

ここで、 E はヤング率、 A は膜厚と奥行き方向の長さの積として表される断面積であり、 j_0 は以下で表される初期形状 $\mathbf{X}_0$ に関するヤコビアンである。

$$j_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \xi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

また、 $\epsilon(\mathbf{X})$ はグリーンひずみとして定義された膜のひずみであり、以下のように表される。

$$\epsilon(\mathbf{X}) = \frac{1}{2j_0^2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} - j_0^2 \right)$$

このとき、仮想ひずみ $\delta \epsilon(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ は、次式となる。

$$\delta \epsilon(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{j_0^2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \xi} \right)$$

以上の支配方程式は、幾何学的非線形を考慮し定式化したGeometrically Exact Theory¹⁶⁾に基づくものとなっている。

5.2 離散化

膜の支配方程式(23)(24)に対して、3で述べたEnergy-Momentum法を適用し、時間方向の離散化を行う。また、空間方向に対しては、パラメータ ξ を要素の局所座標系と同一視することにより、Isoparametric仮定に基づく有限要素近似を行う。本研究では、形状関数として1次要素をもちいる。

流体-構造境界上における境界条件としては、流体計算で得られた境界上の表面力を自然境界条件として課すこととし、得られた流体-構造境界上における構造の速度と流体の流速が整合するよう反復アルゴリズムを導入することが必要となる。

6. 連成解法

3で述べた流体-構造連成問題に対する数値時間積分に基づき連成解析アルゴリズムを考える。厳密に時間積分で得られた半離散化方程式を満たすためには、連成問題としては次のような条件を満たすよう解を求めることとなる。

- 境界上の表面力 τ を t_n と t_{n+1} で一定値をとる独立変数とする。
- 境界上の流体の流速と構造の速度は各 t_n で一致させる。
- 境界上の座標と速度は、 $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}$ を満たす。

このような近似により、系全体のエネルギーを保存する連成解法を構成することが可能である。しかしながら、解くべき方程式は非線形方程式であり、また、すべての変数が同時に方程式を満たすものを決定することから強連成解法²⁾¹²⁾が必要となる。本研究では、流体計算法に MAC 法に基づく差分法、構造計算法に有限要素法を用いていることから、すべての未知変数に対する連立 1 次方程式を組み立てる一体型解法²⁾¹⁰⁾を用いることは不可能である。そこで、本研究では流体と構造の計算を反復して行うことにより、逐次近似として方程式を同時に満たす近似解を構成する反復型の強連成法⁵⁾¹²⁾を考える。

反復型強連成解法は、近年注目されており、様々なアルゴリズムが提案されている^{5),12),17),18)}。本研究では、簡便なアルゴリズムである Block Gauss-Seidel 法¹⁷⁾¹⁸⁾を適用する。このアルゴリズムは、基本的に 1 つの方程式を解いて得られた解をもう一方の方程式で用いることを繰り返すものであり、予測子-修正子法として広く流体-構造連成問題で用いられている。特に、このアルゴリズムを代数方程式の解法として解釈すると Gauss-Seidel 法¹⁸⁾と見なせるものであることから、近年では Block Gauss-Seidel 法と呼ばれるようになっている。

4, 5 で述べたように本研究の連成解法では、流体計算においては流体-構造境界上で流速を既知として与え、得られた表面力を構造計算に受け渡し、構造計算では流体-構造境界上の速度が未知数として解かれ、流体計算に受け渡されるものとなる。流体計算、構造計算が共に弱形式に基づく有限要素法によるものであれば、流速と速度の受け渡しは節点ベクトルとして行い、表面力に対応する等価節点力によって受け渡せば、3 で述べた保存型時間積分に整合する連成解析が可能となる。しかしながら、本研究では流体計算に差分法を用いることから、表面力に対応する等価節点力を求めることは不可能である。そこで、本研究では時間積分において、粘性項は Crank-Nicolson 法で離散化されていることを考慮し、差分法から計算され構造計算に受け渡される表面力に対して、次式を用いることとする。

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}(\tau^{n+1} + \tau^n) \quad (25)$$

本研究における時間積分では、時刻 t_n から t_{n+1} において、表面力を一定値として扱うこととしているが、これは t_n から t_{n+1} の間で変化する表面力の平均化することに対応している。したがって、表面力については上式のように台形則に基づく平均化が適切な近似であると考えられる。

以上より、本研究で用いる反復型強連成解法の具体的なアルゴリズムは以下のように与えられる。

[反復型強連成法]

- (1) 境界上の流速 u^{n+1} の予測値 u^* を与える。
- (2) u^* から X^{n+1} の予測値 X^* を次式により計算する。

$$X^* = X^n + \frac{\Delta t}{2}(u^n + u^*)$$

- (3) u^* を与え、流体の計算を行う。
- (4) 計算された流速から境界上の表面力 τ^{n+1} を求める。
- (5) 次式で表される表面力 $\bar{T}$ が時刻 t_n から t_{n+1} において一定として構造に作用しているものとして、構造の変位と速度を求める。

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}(\tau^{n+1} + \tau^n)$$

- (6) 構造の計算から得られた境界上の速度 U^{n+1} を求め、 u^* と比較する。差が小さければ次の時間ステップに進む。
- (7) $u^* = U^{n+1}$ として (2) にもどる。

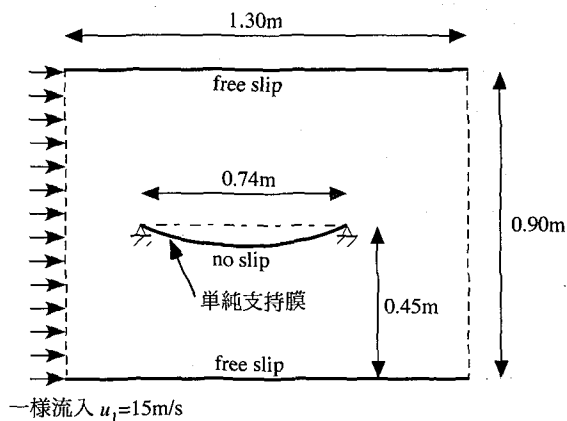
7. 数値計算

南等の実験¹⁹⁾に対応する一様流中の懸垂膜の問題について、図-2 に示す設定で数値計算を行った。膜は、奥行き方向に同じ変位となる 2 次元変形を考え、両端を単純支持している。また、膜の長さは支持点間の距離より長く、初期状態においては膜は自重でたるんだ状態にある。流体領域については、レイノルズ数が高い場合、問題設定が 2 次元的であっても 3 次元構造を有する流れ場がしばしば生じることから、奥行き方向に周期境界条件を課した 3 次元領域を考える。本研究では、奥行き方向は 0.01m とする。流入条件は一様流とし、領域全体が一様流と同じ速度により流れている状態を初期条件とした。

計算格子を図-3 に示す。膜の端部は膜厚を直径とする円とした。また、奥行き方向の格子の分割は 4 とした。時間刻みは 2×10^{-5} sec を用いた。

膜の中央部の変位の時刻歴を図-4 に、膜の瞬間圧力分布を図-5 に示す。これらから、提案する解析手法により膜が流体力により浮き上がる大変形挙動が計算できていることが確認できる。しかしながら、変位の時刻歴には明確な周期性は見られない。一方、南等の実験では、準定常的なフラッター状態が観測されているが、本数値計算ではこのようなフラッター状態は再現されていない。これは、計算で再現された観測時間が短いことと、奥行き方向にはあまり分解能がなく、流れの 3 次元性を再現できていないことが要因となっているものと考えられる。

本研究では、連成解法に Block Gauss-Seidel 法に基づく反復計算を用い、構造と流体が接する境界上の構造と流体の速度ベクトルの差を収束判定の誤差の指標



膜 (PTFE)

密度 $1.27 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

ヤング率 36.9 MPa

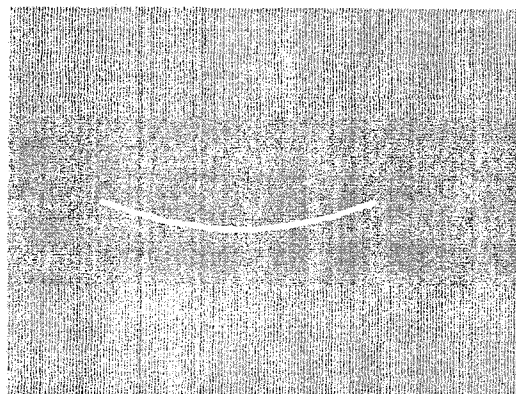
膜厚 $7.8 \times 10^{-4} \text{ m}$

流体 (空気)

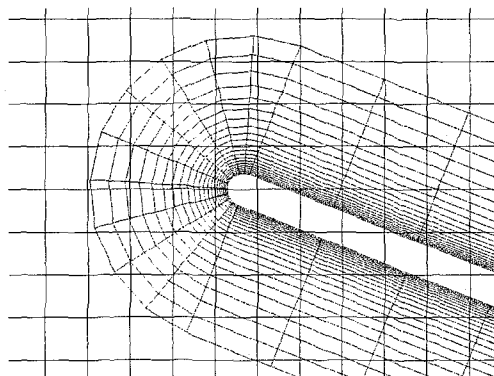
密度 1.23 kg/m^3

動粘性係数 $1.15 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

図-2 一様流中の懸垂膜問題



(a) 計算領域全体



(b) 膜端部近傍の拡大

図-3 計算格子

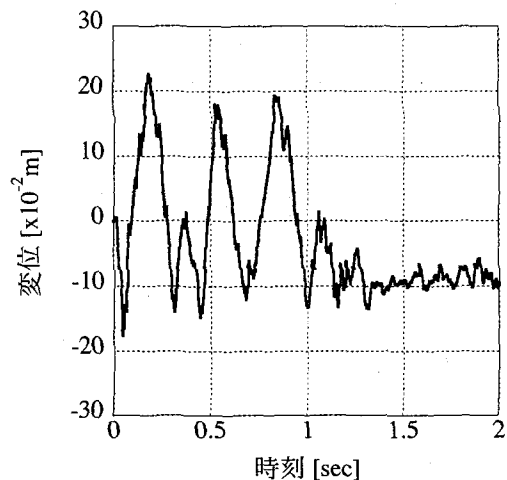


図-4 膜の中央点の変位時刻歴

とし、節点速度ベクトルの誤差の2乗和の平方根 (l_2 ノルム) が速度ベクトルのノルムで正規化した相対値として 10^{-5} となるまで反復を行った。今回の計算例においては、すべての時間ステップで3あるいは4回の反復で所定の誤差内に収束した。図-6に $t = 0.06, 0.24$ における反復回数と速度の相対誤差の関係を示す。なお、本研究では、 $n+1$ ステップの解を求めるための反復開始時の予測流速として、 $n-1$ ステップおよび n ステップの流速から外挿したものを用いている。この予測流速は、本計算例では比較的精度が良いものとなっており、速度ベクトルの誤差は、反復開始時においても 10^{-1} 程度と小さくなっている。一方、本研究で提案する計算手法で、反復を行わないように設定すると、計算は弱連成法となる。このような設定で計算を行った場合には、早い段階で計算が破綻することが確認された。したがって、今回の膜と流体の連成問題では、Block Gauss-Seidel 法による反復型連成解法の効果は発揮されているものと考えられる。

図-7に膜の全エネルギーと流体が膜に作用した累積仕事の時刻歴を示す。膜の全エネルギーは、各時刻におけるひずみエネルギーと運動エネルギーの和として求められたものであり、膜に作用した累積仕事は、流体力と流速から時間刻み毎に計算される仕事の総和として求めたものである。膜の全エネルギーと流体が膜に作用した累積仕事の誤差は、時刻の経過に従って増加しているものの、エネルギーの増減に関してはほぼ対応したものとなっている。エネルギー収支の誤差には、膜に作用した累積仕事を計算する際の丸め誤差の累積も含まれていると考えられ、本研究で提案する計算手法においては、時間積分における保存性が実際にも良好に満足されているものと言える。

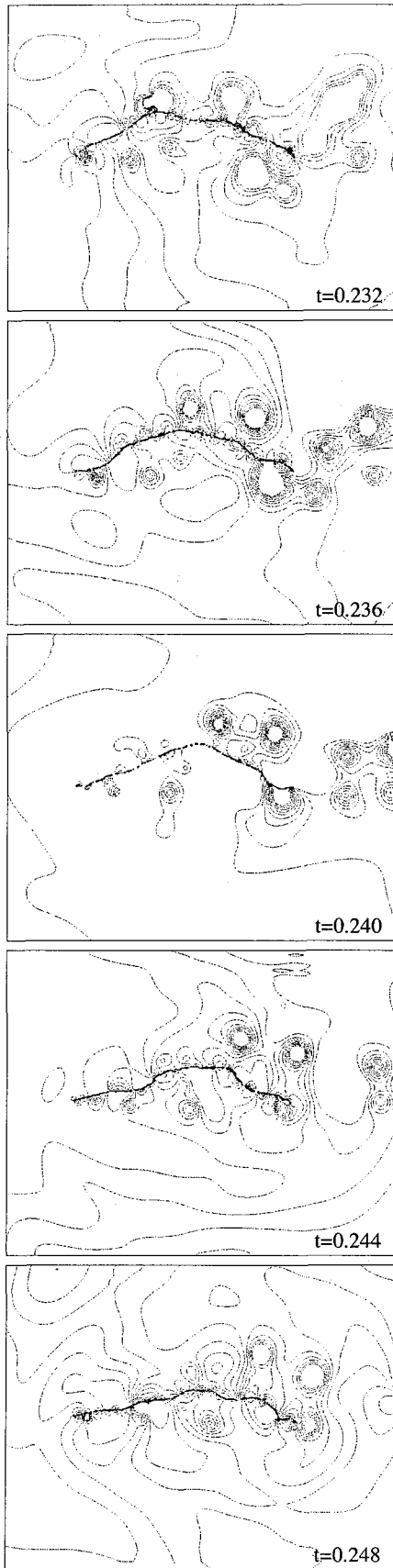


図-5 瞬間圧力分布

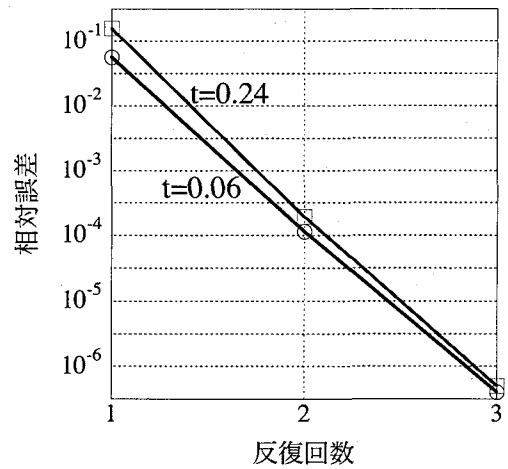


図-6 反復型連成解法における誤差収束

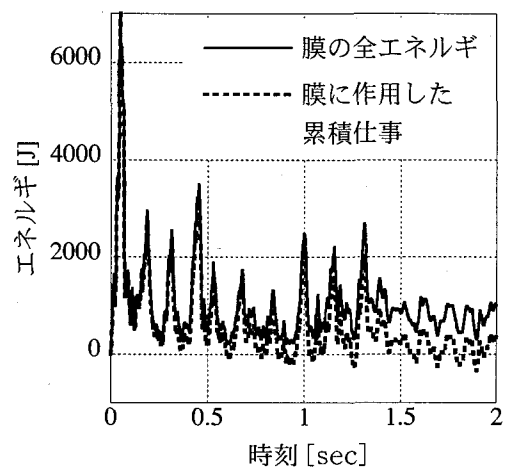


図-7 膜のエネルギー時刻歴

一方、従来の研究^{2),3)}では、時間積分における保存性はあまり問題にされておらず、一体型の強連成解法を用いれば安定な数値計算が行えるものとされてきた。しかしながら、本計算手法において、流体計算で得られた表面力に関する時間方向の近似を $n+1$ ステップの値のみを用いるように変更し、保存性が満足されない近似で計算を行うと、早い段階で膜の挙動が不安定になり、計算が破綻することが確認された。したがって、保存型時間積分は、単一ステップにおける数値安定性には大きな影響を与えていないが、今回のようにレイノルズ数が高い流れ場に対して、ある程度経過時間の長い計算を行った場合には、計算精度と数値安定性の向上に寄与するものとする。

8. 結び

本研究では、膜と流体の連成問題に対して、保存型数値時間積分と反復型強連成法を適用した数値計算手法を提案した。現時点では、実験データに対応する計算結果は得られていないものの、数値解におけるエネルギーの評価等から基本的な手法の妥当性が確認されたものとする。今後は、本計算手法により、膜のフラッター現象を再現し、その力学的なメカニズムを考察したいと考えている。

参考文献

- 1) 野村卓史, 新明正人: ALE 有限要素法による薄膜と流れとの連成解析, 応用力学論文集, Vol. 1, pp.241-251, 1998.
- 2) 張群, 久田俊明: 流体構造連成有限要素解析における連成手法に関する検討, 日本機械学会論文集, A 編, Vol. 67, No. 662, pp.1-8, 2001.
- 3) 澤田有弘, 久田俊明: ALE 有限要素法による二次元の旗のはためき問題の流体・構造連成解析, 日本機械学会論文集, A 編, Vol. 71, No. 701, pp.1-8, 2005.
- 4) Farhat, C., Lesoinne, M. and Le Tallec, P.: Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with nonmatching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 157, pp.95-114, 1998
- 5) LeTallec, P. and Mouro, J.: Fluid - structure interaction with large structural displacements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 190, pp.3039-3067, 2001.
- 6) van Brummelen, E. H., Hulshoff, S. J. and de Borst, R.: Energy conservation under incompatibility for fluid-structure interaction problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 192, pp.2727-2748, 2003.
- 7) Michler, C., van Brummelen, E. H., Hulshoff, S. J. and de Borst, R.: The relevance of conservation for stability and accuracy of numerical methods for fluid - structure interaction, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 192, pp.4195-4215, 2003.
- 8) Simo, J. C. and Tarnow, N.: The discrete energy momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, ZAMP, Vol. 43, pp.757-793, 1992.
- 9) Quarteroni A. and Valli A.: Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Clarendon, 1999.
- 10) Blom, F.J.: A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 167, pp. 369-391, 1998.
- 11) Michler, C., Hulshoff, S. J., van Brummelen, E. H. and de Borst, R.: A monolithic approach to fluid-structure interaction, Computers & Fluids, Vol. 33, pp. 839-848, 2004.
- 12) Matthies, H.G. and Steindorf, J.: Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction, Computers & Structures, Vol. 81, pp. 805-812, 2003.
- 13) Simom, J. C. and Armero, F.: Unconditional stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 111, pp.111-154, 1994.
- 14) Simo, J.C., Armero, F. and Taylor, C.: Stable and Time-Dissipative Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Advection Dominated Flows, Int. J. Numer. Methods Engrg., 38, pp.1475-1506, 1995.
- 15) 伊藤嘉晃, 姫野龍太郎: 重合格子法を用いた3次元流体解析手法の直列2円柱に生じる不安定振動への適用, 構造工学論文集, Vol.49B, pp.359-366, 2003.
- 16) Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S.: On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model: Part II The Linear Theory; Computational Aspects, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., Vol. 73, pp.53-92, 1989.
- 17) Codina, R. and Cervera, M.: Block-iterative algorithms for nonlinear coupled problems. In: M. Papadrakakis and G. Bugeda, Editors, Advanced computational methods in structural mechanics, CIMNE, Barcelona, 1996.
- 18) 山田貴博, 大塚隆行, 伊藤嘉晃: 反復型強連成解法を用いた膜と流体の連成問題の数値計算, 計算工学講演会論文集, 10, pp.21-24, 2005.
- 19) 南宏和, 奥田泰雄, 川村純: 一様気流中に懸垂した膜のフラッターの近似解析, 日本風工学会誌, 64, pp.29-38, 1995.

(2006 年 4 月 13 日受付)