

平板の端部によるガイド波の反射の 3 次元解析

3-D Analysis of Guided Wave Reflection by an Edge in a Plate

グナワン アリーフ*・廣瀬壮一*

Arief GUNAWAN and Sohichi HIROSE

*正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

This study carries out the edge-reflection analysis of guided waves in a 3-D plate. First, we excite an incident guided wave by applying a normal traction on the surface of a 3-D plate. The excited wave field is obtained in the frequency and wavenumber domains. Secondly, we perform the edge-reflection analysis in the frequency and wavenumber domains by applying the mode-decomposition method to obtain the reflection coefficients as functions of the frequency and the wavenumber. Thirdly, the reflected waves are calculated in the frequency and wavenumber domains by using the reflection coefficients obtained in the second step. Lastly, we obtain the reflected waves in a 3-D plate by performing the inverse Fourier transform. The reflection coefficients in a 3-D plate are evaluated as the amplitude ratio between the reflected wave and the incident wave. We discuss the difference between the coefficients in 3-D and 2-D problems in detail by changing some parameters such as the size of the exciter and the distance between the exciter and the edge.

Key Words : *guided waves, Lamb waves, SH waves, plate, edge reflection, 3-D analysis*

1. 序論

ガイド波は薄い平板やパイプなどの細長い部材の中を長手方向に伝播する弾性波である。平板に伝播するガイド波には Lamb 波と SH 波の 2 種類のガイド波^{1),2),3)}がある。前者は面内波、後者は面外波である。ガイド波探傷法は欠陥を検出するための非破壊検査法として従来から用いられる手法である。ガイド波は減衰が小さいため、ガイド波探傷法では広範囲を一括で検査できる利点がある。しかしガイド波には複数のモードが存在し、ほとんどのモードが分散性を示しているため、ガイド波の伝播特性・散乱特性は非常に複雑である。したがって、平板に対するガイド波探傷法の性能を向上させるためにはガイド波の特性を理解する必要がある。その中でも平板の端部による反射が実験でしばしば現れることから、平板の端部による反射特性を知ることが重要である。

2 次元平板の端部による反射解析は従来から行われている^{4)~12)}。解析結果を検証するための実験も行われている^{6),13)}。2 次元平板というのは平板内の波動場が面外方向に一樣であるという平板である。しかし実験で用いる平板は必ずしも 2 次元的不是ではない。探触子の幅は平板の幅に比べ非常に小さいため、ガイド波が拡散しながら進行する。従って実験で得られた 3 次元的结果は解析の 2 次元的结果と一致するとは限らない。反射解析を 3 次元に行えばより精度のいい解析結果が得られるが、その計算コストが非常に大きい。そのため、3 次元の解析を避けて、2 次元の解析で済ま

せたい。だがそのためには 2 次元と 3 次元の解析との違いを定量的に行う必要がある。本研究では、3 次元平板における反射解析を行い、その結果を 2 次元解析の結果と比較・検討することを目的とする。3 次元平板における反射解析を行う際、反射端に平行な軸に関してフーリエ変換を行ういわゆる 2.5 次元解析手法を用いる。

本研究で行う解析の流れを主に 3 段階に分ける。一番目は励振解析である。探触子を想定して平板の表面に外力を与える。その外力によって励振されたガイド波モードの振幅を求める。この励振解析は周波数と波数域で行う。2 番目は反射解析である。励振されたガイド波が端部で反射されたときの反射波を周波数と波数域で求める。このときはモード分解を用いた反射解析手法¹⁴⁾を利用する。3 番目は反射係数の算定である。2 次元フーリエ変換¹⁵⁾すなわち時間域の反射波の波形を時間と平板の反射端と平行な軸に関してフーリエ変換して 3 次元平板における反射係数を算定する。その反射係数を 2 次元解析の反射係数と比較する。そのとき、外力の幅や位置を変化させて、3 次元と 2 次元の反射係数の差への影響を調べる。

2. 2.5 次元状態にあるガイド波の理論

2.1 基礎関係式

図-1 に示すように x_2 方向に一樣な断面を持った均質等方線形弾性な平板を考え、ある一つの座標(ここでは x_2 とする) および時間 t に関して調和的に伝播する

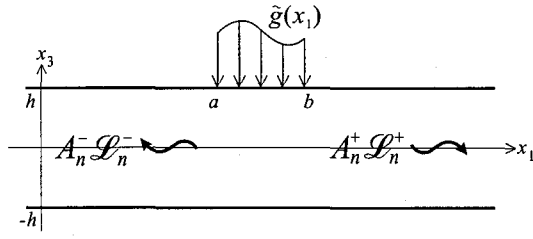


図-1 2.5次元状態のガイド波の励振

平板内のガイド波を考える。即ち、変位場 u が式 (1) で表せるとする。

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{u}(x_1, x_3) e^{I(\xi x_2 - \omega t)} \quad (1)$$

ここに $I = \sqrt{-1}$ 、 ω は周波数、 ξ は x_2 方向の波数である。平板は厚さが $2h$ であり、上下の表面が自由面であるものとする。 x_2 方向の波数が ξ であることから、式 (1) は、波の進行方向の波数を k とするとき、 x_1 軸と角度 $\theta = \arcsin(\xi/k)$ をなす方向に伝播する3次元的なガイド波を表す。通常の2次元問題は $\xi = 0$ の場合であるが、ここでは一様な断面方向である x_2 方向にも調和的な変化を示す波動を考えている。このような波動場を2.5次元状態にある波という。後に述べるように x_2 方向に一様な断面を持つ物体での任意の3次元波動場は、 $x_1 - x_3$ 面内での2.5次元問題の解を重ね合わせることによって得られる。

2.5次元状態にあるガイド波にはLamb波とSH波がある。対称と反対称Lamb波モードおよびSH波モードの分散曲線はそれぞれ方程式(2)、(3)と(4)で表せる^{2),3)}。

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} = 0 \quad (3)$$

$$qh - \frac{n\pi}{2} = 0 \quad (4)$$

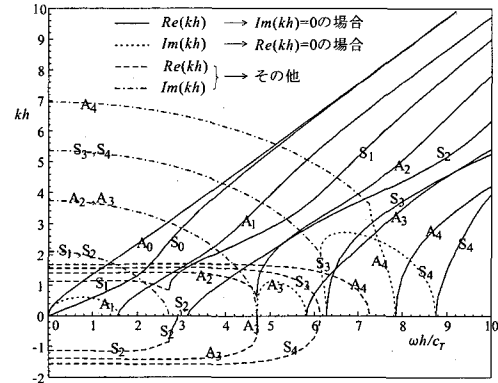
ここに、

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (5)$$

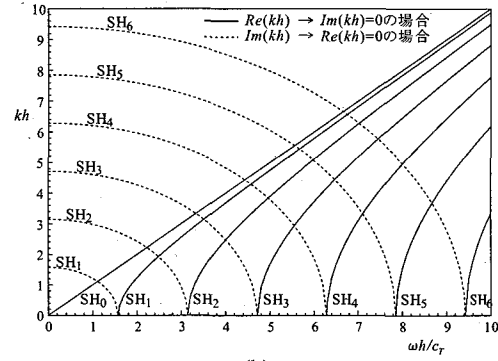
k は波の進行方向における波数、 c_L と c_T はそれぞれ縦波と横波の波速、 n はゼロ以上の整数である。銅板 (Poisson 比 $\nu = 0.3$) におけるLamb波モードとSH波モードの分散曲線をそれぞれ図-2(a)と(b)に示す。

2.5次元状態におけるガイド波の変位は一般的に式(6)で表される。

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) &= \tilde{u}(x_1, x_3) e^{I(\xi x_2 - \omega t)} \\ &= \hat{u}(x_3) e^{I(\eta x_1 + \xi x_2 - \omega t)} \end{aligned} \quad (6)$$



(a)



(b)

図-2 (a)Lamb波モードおよび(b)SH波モードの分散曲線

ただし、

$$\hat{u}_1(x_3) = \frac{\eta}{k} \hat{U}_1(x_3) - \frac{\xi}{k} \hat{U}_2(x_3)$$

$$\hat{u}_2(x_3) = \frac{\xi}{k} \hat{U}_1(x_3) + \frac{\eta}{k} \hat{U}_2(x_3)$$

$$\hat{u}_3(x_3) = \hat{U}_3(x_3)$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$$

$\hat{U}_i$ の表現は各種のガイド波によって異なる。対称と反対称のLamb波モードおよび対称と反対称のSH波モードの $\hat{U}_i$ をそれぞれ式(7)、(8)、(9)と(10)で表す。

$$\begin{cases} \hat{U}_1(x_3) = I A k \left[\frac{\cos(p x_3)}{\sin(ph)} + \frac{2pq}{k^2 - q^2} \frac{\cos(q x_3)}{\sin(qh)} \right] \\ \hat{U}_2(x_3) = 0 \\ \hat{U}_3(x_3) = -A p \left[\frac{\sin(p x_3)}{\sin(ph)} - \frac{2k^2}{k^2 - q^2} \frac{\sin(q x_3)}{\sin(qh)} \right] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{U}_1(x_3) = I A k \left[\frac{\sin(p x_3)}{\cos(ph)} + \frac{2pq}{k^2 - q^2} \frac{\sin(q x_3)}{\cos(qh)} \right] \\ \hat{U}_2(x_3) = 0 \\ \hat{U}_3(x_3) = A p \left[\frac{\cos(p x_3)}{\cos(ph)} - \frac{2k^2}{k^2 - q^2} \frac{\cos(q x_3)}{\cos(qh)} \right] \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \hat{U}_1(x_3) = \hat{U}_3(x_3) = 0 \\ \hat{U}_2(x_3) = Ak \cos(qx_3) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \hat{U}_1(x_3) = \hat{U}_3(x_3) = 0 \\ \hat{U}_2(x_3) = Ak \sin(qx_3) \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 A は定数である。応力 τ は次式で求められる。

$$\tau_{ij} = \rho(c_L^2 - 2c_T^2)u_{k,k}\delta_{ij} + \rho c_T^2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (11)$$

ここに、 ρ は密度である。

2.2 ガイド波モードの直交性

ここでは対称と反対称の Lamb 波と SH 波を含めたガイド波モードを $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ という記号で示す。それぞれの波数を $k_1, k_2, \dots$ とする。 $\mathcal{L}_m$ は左方向と右方向に進行するすべてのモードを含む。 $\mathcal{L}_m$ は一つの状態量であり、その変位と応力に関連付けられる。すなわち $\mathcal{L}_m = [\mathbf{u}^m, \boldsymbol{\tau}^m]$ で、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m &= \tilde{\mathbf{u}}^m e^{I(\xi x_2 - \omega t)} = \hat{\mathbf{u}}^m e^{I(\eta_m x_1 + \xi x_2 - \omega t)} \\ \boldsymbol{\tau}^m &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}^m e^{I(\xi x_2 - \omega t)} = \hat{\boldsymbol{\tau}}^m e^{I(\eta_m x_1 + \xi x_2 - \omega t)} \end{aligned} \quad (12)$$

2.5 次元状態にある任意の 2 つのガイド波のモード $\mathcal{L}_m$ と $\mathcal{L}_n$ の直交性は次のように表せる。

$$(\eta_m - \eta_n^*) P_{mn}^\xi = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$P_{mn}^\xi = \frac{I\omega}{4} \int_{-h}^h \{ \hat{u}_i^m(\hat{\tau}_{1i}^n)^* - (\hat{u}_i^n)^* \hat{\tau}_{1i}^m \} dx_3 \quad (14)$$

添字 $*$ は共役複素数を表す。式 (13) によると、 $\eta_m \neq \eta_n^*$ の場合、 P_{mn}^ξ は必ずゼロとなる。簡略化のために、 $\eta_m = \eta_n^*$ の場合、 $Q_m^\xi = P_{mm}^\xi$ と書きあらためる。

η_m が複素数の場合、 $\mathcal{L}_m$ が非進行波となる。非進行波は減衰しながら進行するので、遠方場では消えてしまうが、次章に述べる解くべき問題における反射端の境界条件を満たすために進行波と非進行波の両方を考慮しなければならない。

2.3 モード分解

前節で述べたガイド波モードの直交性を利用して平板内の任意の波動場をガイド波モードに分解する方法をここで説明する。その任意の波動場 $\mathcal{E}$ の変位と応力は $[\tilde{\mathbf{u}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}, \tilde{\boldsymbol{\tau}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}]$ とする。簡略化のために、ここでは新しい演算子 $\odot$ を定義する。即ち $\mathcal{E} = [\tilde{\mathbf{u}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}, \tilde{\boldsymbol{\tau}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}]$ と $\mathcal{E}' = [\tilde{\mathbf{v}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} e^{I(\xi x_2 - \omega t)}]$ であるとする、 $\mathcal{E} \odot \mathcal{E}'$ は次式のように定義される。

$$\mathcal{E} \odot \mathcal{E}' \equiv \frac{I\omega}{4} \int_{-h}^h (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{1i}^* - \tilde{v}_i^* \tilde{\tau}_{1i}) dx_3 \quad (15)$$

式 (12) と (14) より、明らかに $\mathcal{L}_m \odot \mathcal{L}_n$ は P_{mn}^ξ に等しい。

さて任意の波動場 $\mathcal{E}$ は式 (16) のようにガイド波モードに分解すると、各モードの振幅 A_m は式 (17) で求められる。

$$\mathcal{E} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mathcal{L}_m \quad (16)$$

$$A_m = \frac{\mathcal{E} \odot \mathcal{L}_{\gamma(m)}}{Q_m^\xi} \quad (17)$$

ここに、 $\gamma(m)$ は $\eta_n = \eta_m^*$ を満足する n を $n = \gamma(m)$ の関数形で表したものである。

2.4 ガイド波の励振

平板の表面に外力が作用するとき、平板内に励振された各ガイド波モードの振幅は相反定理によって厳密に求まる。今図-1 に示すように平板の表面に垂直な外力 $\tilde{g}(x_1)$ が作用しているとする。ただし $\tilde{g}(x_1)$ は外力の x_2 に関するフーリエ変換である。このときガイド波モードが励振されて、外力を中心として左右の方向に伝播する。左方向と右方向に伝播するモードを区別するために、それぞれ $\mathcal{L}_n^-$ と $\mathcal{L}_n^+$ という記号で書き表す。そして $\mathcal{L}_n^\pm$ と $\mathcal{L}_m$ を関連付けるために関数 $m = \phi^\pm(n)$ を定義する。即ち $m = \phi^\pm(n)$ ならば $\mathcal{L}_m \equiv \mathcal{L}_n^\pm$ となる。 $\mathcal{L}_n^\pm$ の振幅 $A_n^\pm$ は式 (18) で求められる。

$$A_n^\pm = \frac{I\omega}{4Q_m^\xi} \int_a^b \tilde{g}(x_1) [\hat{u}_3^{\gamma\{\phi^\pm(n)\}}(x_1, h)]^* dx_1 \quad (18)$$

ただし、 $\mathbf{u}^m$ はモード $\mathcal{L}_m$ の変位 [式 (6) を参照] を表す。

3. 解くべき問題

解くべき問題を図-3 に示す。半無限の 3 次元平板の表面に垂直な外力 $f(t)g(x_1, x_2)$ が作用するとき入射ガイド波 $\mathbf{u}^{(\text{in})}$ が励振され、平板の端部 S_e によって反射波 $\mathbf{u}^{(\text{ref})}$ が生じる。ただし端部の表面は自由面とする。 $\mathbf{u}^{(\text{in})}$ と $\mathbf{u}^{(\text{ref})}$ を求め、3 次元平板における反射係数を算定して 2 次元解析の反射係数と比較することが本論文の目的である。

4. 解析手法

解析手法の概略を図-4 に示す。まず与えられた外力 $f(t)g(x_1, x_2)$ を時間と空間に対してフーリエ変換 (FFT) し、周波数と波数域の外力 $\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(x_1, \xi)$ を求める。各周波数・波数において励振された各モード $\mathcal{L}_n^+$ の振幅 $A_n^+(\omega, \xi)$ を求める。 $\sum A_n^+(\omega, \xi) \mathcal{L}_n^+$ は元平板の端部に対する入射波となる。別の解析で求めた 2.5 次元波動の反射係数を用いて反射波の各モード $\mathcal{L}_n^-$ の

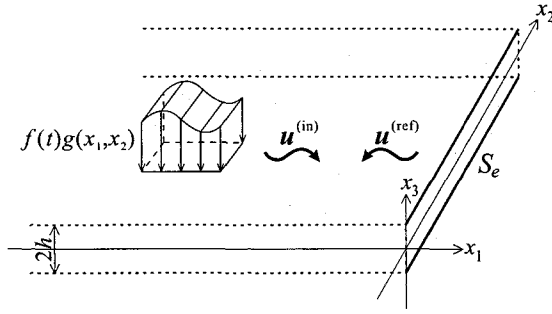


図-3 解くべき問題

振幅 $A_n^-(\omega, \xi)$ を算定する。この反射波の重ね合わせ $\sum A_n^-(\omega, \xi) \mathcal{L}_n^-$ は結局周波数と波数域における反射波 $\tilde{u}^{(\text{ref})}(x_1, \xi, x_3, \omega)$ となる。 $\tilde{u}^{(\text{ref})}(x_1, \xi, x_3, \omega)$ を逆FFTすれば、時間と空間域の反射波 $u^{(\text{ref})}(x_1, x_2, x_3, t)$ が求まる。得られた反射波を処理して3次元の反射係数を求める。FFTと逆FFTの詳細を省略して、この後2.5次元状態での励振解析、2.5次元における反射解析および3次元平板における反射解析について述べる。

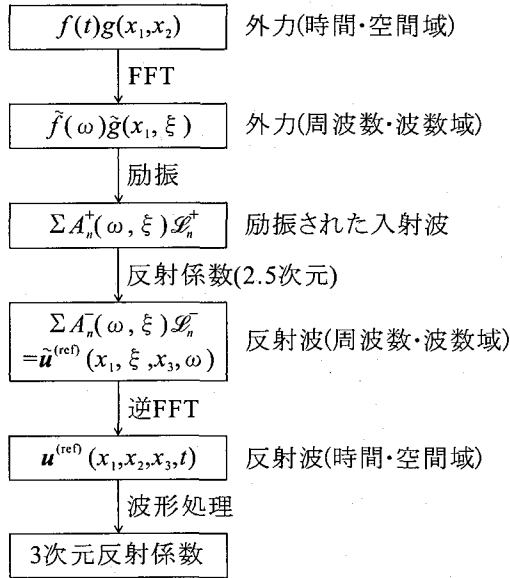


図-4 3次元平板における反射係数を求めるための手順

4.1 2.5次元状態での平板における励振解析

式(18)より、外力 $\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(x_1, \xi)$ によって励振されたモード $\mathcal{L}_n^+$ の振幅 A_n^+ は次式で求められる。

$$A_n^+(\omega, \xi) = \frac{I\omega \tilde{f}(\omega)}{4Q_{\phi}^{\xi}} \int_a^b \tilde{g}(x_1, \xi) \left[\tilde{u}_3^{\gamma\{\phi^+(n)\}}(x_1, h) \right]^* dx_1 \quad (19)$$

4.2 2.5次元状態での平板における反射解析

2.5次元状態での平板における反射解析では、図-5に示すように平板の端部に単位振幅のあるガイド波モード $\mathcal{L}_n^+$ が入射するとき、反射された各モード $\mathcal{L}_m^-$ の振幅 r_m^n を求める。ここでは2.3節に述べたモード分解を用いた反射解析手法を説明する。

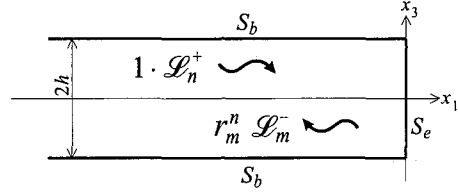


図-5 2.5次元状態にある平板端部によるガイド波の反射

図-5に示すような反射問題における全波動場の変位と応力を $[v, \sigma]$ 、モード $\mathcal{L}_n$ の変位と応力を $[u^n, \tau^n]$ とおく。 $[v, \sigma]$ をモード分解すれば $1 \cdot \mathcal{L}_n^+$ と $\sum r_m^n \mathcal{L}_m^-$ になるから、 $[v, \sigma]$ と $[u^n, \tau^n]$ および r_m^n は式(17)によって結び付けられる。実際式(17)の $\mathcal{E}$ に $[v, \sigma]$ を、 m に $\phi^-(l)$ を、 A_m に r_l^n を代入すると、方程式(20)が得られる。

$$r_l^n = \frac{I\omega}{4Q_{\phi}^{\xi}} \int_{-h}^h \left[\tilde{v}_i \left\{ \tilde{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right\}^* - \left\{ \tilde{u}_i^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right\}^* \tilde{\sigma}_{1i} \right] dx_3 \quad (20)$$

さて、端部の位置である $x_1=0$ における式(20)を考える。端部が自由面であるから、全波動場の応力成分は $\tilde{\sigma}_{1i} \equiv 0$ である。また、全波動場の変位 v は式(21)のように入射波と反射波の重ねあわせで表せる。

$$v = u^{\phi^+(n)} + \sum_m r_m^n u^{\phi^-(m)} \quad (21)$$

さらに $x_1=0$ 上では、 $\tilde{v}_i \left[\tilde{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right]^* = \tilde{v}_i \left[\hat{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right]^*$ が成り立つ。よって、式(20)は次のようになる。

$$\frac{4Q_{\phi}^{\xi}}{I\omega} r_l^n = \int_{-h}^h \left[\hat{u}_i^{\phi^+(n)} + \sum_m r_m^n \hat{u}_i^{\phi^-(m)} \right] \left[\hat{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right]^* dx_3$$

または

$$\sum_m \left[\int_{-h}^h \hat{u}_i^{\phi^-(m)} \left\{ \hat{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right\}^* dx_3 - \frac{4Q_{\phi}^{\xi}}{I\omega} \delta_{lm} \right] r_m^n = - \int_{-h}^h \hat{u}_i^{\phi^+(n)} \left\{ \hat{\tau}_{1i}^{\gamma\{\phi^-(l)\}} \right\}^* dx_3 \quad (l=1, 2, \dots) \quad (22)$$

ガイド波モードの数は無限個あるから、式(22)中の未知数 $r_m^n (m=1, 2, \dots)$ の個数と同様、方程式の数は

無限 ($l = 1, 2, \dots$) である。従ってすべての方程式を連立させれば、反射係数 r_m^n を求められる。本論文の計算では無限個のモードを有限個で打ち切って連立方程式 (22) を解く。その際、すべての進行波モードが含まれ、さらに η_n の虚数部が最も小さい非進行波モードが含まれるようにする。

2.5 次元状態における反射係数 r_m^n が求まれば図-4 における反射波の各モードの振幅 A_n^- は次式で求まる。

$$A_n^- = \sum_m A_m^+ r_m^n \quad (23)$$

4.3 3次元平板における反射解析

3次元平板における反射係数は以下の方法で算定する。この方法は実験で反射係数を求める方法と類似している。まず図-6(a) に示すように半無限の平板の C 点に外力を与える。端部からの反射波の x_3 成分 $U^{(\text{ref})}(x_1, t)$ を AB 間で等間隔で N 個読み取る。参照波 $U^{(\text{rfr})}(x_1, t)$ は図-6(b) に示すように無限の平板の C 点に外力を与え、AB 間での励振された波の x_3 成分として等間隔で N 個読み取る。ここでは OC 間、OA 間と AB 間の距離を図-6(a) と (b) とともに同じにする。

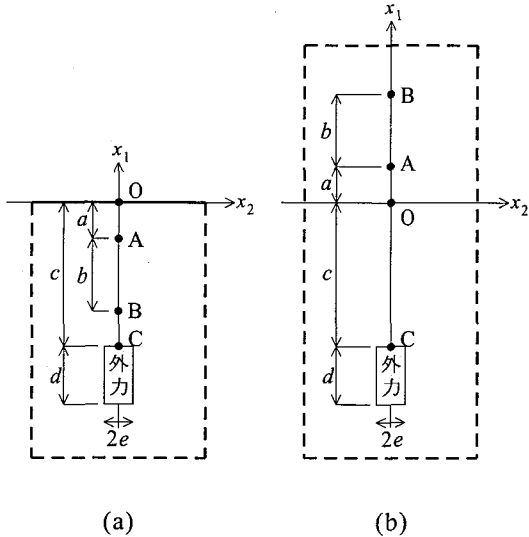


図-6 3次元反射係数を求めるための (a) 半無限の平板内の反射波および (b) 無限の平板内の参照波の波形を読み取る位置

$U^{(\text{ref})}(x_1, t)$ と $U^{(\text{rfr})}(x_1, t)$ を t と x_1 に対してフーリエ変換して周波数と波数域の振幅 $\tilde{U}^{(\text{ref})}(k, \omega)$ と $\tilde{U}^{(\text{rfr})}(k, \omega)$ を求める。3次元の反射係数は次式で数値的に算定する。

$$|r_m^n| = \frac{\tilde{U}^{(\text{ref})}\{k^n(\omega), \omega\}}{\tilde{U}^{(\text{rfr})}\{k^m(\omega), \omega\}} \quad (24)$$

ここに、 $k^n(\omega)$ は周波数が ω のときの $\mathcal{L}_n$ モードの波数である。

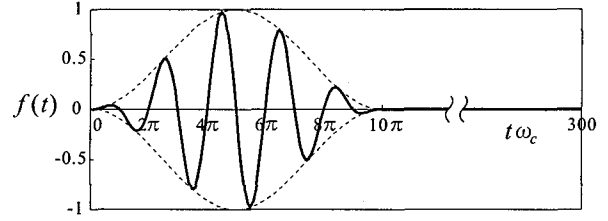


図-7 外力として用いた関数 $f(t)$

5. 解析結果

5.1 解析条件

以下の解析では図-4 における外力の関数 $f(t)$ として式 (25) に示すハニング窓 $H_w(t)$ をかけた正弦関数を用いる。この関数の時間変化を図-7 に示す。

$$f(t) = \sin(\omega_c t) H_w(t) \quad (25)$$

$$H_w(t) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{t_1}\right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(26)

以下に示す解析結果では $\omega_c h / c_T = 1$ および $\omega_c t_1 = 10\pi$ を用いた。 $\omega_c h / c_T = 1$ では図-2 に示すように進行 Lamb 波モードが 2 つ (A_0 と S_0) および進行 SH 波モードが 1 つ (SH_0) 存在することに注意されたい。 $0 \leq t\omega_c \leq 300$ の範囲内に 512 点を等間隔で取り、時間域の外力を FFT して周波数域の外力を求める。

外力の関数 $g(x_1, x_2)$ としては、傾斜しているウェッジに乗せた探触子からの外力を想定したものを用いる。その外力は式 (27) でモデル化できる。

$$g(x_1, x_2) = e^{ik^n x_1} H_{[-c-d, -c]}(x_1) H_{[-e, e]}(x_2) \quad (27)$$

$$H_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (28)$$

k^n は周波数 $\omega = \omega_c$ のときの $\mathcal{L}_n$ モードの波数である。外力が作用する領域の位置と寸法は図-6 に示したとおりである。この $g(x_1, x_2)$ を用いれば、大きな振幅をもった $\mathcal{L}_n$ モードが励振できる。 $-128\lambda \leq x_2 \leq 128\lambda$ の範囲内に 2048 点を等間隔で取り、距離域の外力を FFT し、波数域の外力を求める。ただし λ は $\mathcal{L}_n$ モードの波長である。

3次元平板における反射解析を行う際、図-6 における AB 間の距離 b と外力の長さ d はすべての解析において固定する。すなわち $b/\lambda = 4$ と $d/\lambda = 5$ である。AB 間の波形をフーリエ変換をする際、32 個の波形を用いた。

式 (27) による外力を用いても $\mathcal{L}_n$ モード以外のモードは励振されてしまうことがある。特に $\omega_c h / c_T = 1$ のような低い周波数では S_0 モードの u_3 が A_0 モードの

に比べ非常に小さいため、単一の S_0 モードを励振することが困難である。複数のモードが混在すると、その波形をフーリエ変換することによって得られた振幅には誤差が生じる可能性がある。本研究では3次元平板と2次元平板における散乱係数の比較を目的とするため、複数のモードの混在による誤差を避けたい。そこで外力 $f(t)g(x_1, x_2)$ が励振したモードの振幅を式 (19) で求める際、 $\mathcal{L}_n^+$ モード以外の振幅を故意にゼロにした。

5.2 2.5次元状態での励振解析結果の検証

2.5次元状態での励振解析結果の検証は3次元周波数域の厳密解¹⁶⁾との比較で行う。図-8は、図-6(b)において S_0 モードを励振したときの x_1 軸上の u_3 の値を示す。ここでは $\omega h/c_T = 1$ 、 $a/\lambda = 10$ 、 $c/\lambda = 50$ 、 $e/\lambda = 0.5$ を用いた。四角の記号は厳密解、丸の記号は2.5次元解析の結果を表す。厳密解は点荷重による解を4角形で積分して求めたものであるが、5.1節の最後に述べたようなモードの切捨ても行われている。両結果の間の誤差は0.2%以下である。よって、本研究の励振解析および距離・波数のFFTの妥当性が確認された。

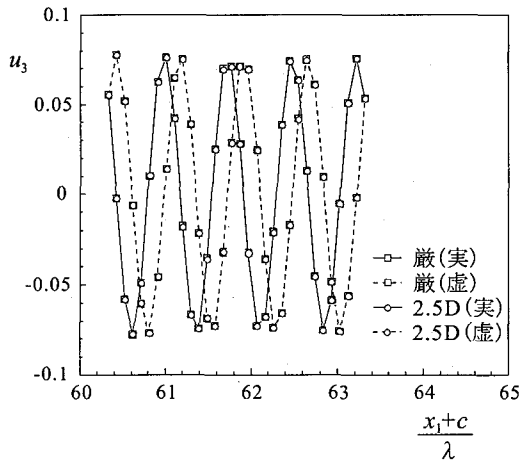


図-8 2.5次元解析結果と厳密解との比較 (厳=厳密解、2.5D=2.5次元解析結果、実=実数部、虚=虚数部)

5.3 3次元の散乱係数の解析結果及び2次元解析結果との比較

外力の幅 $2e$ が十分長ければ、3次元波動場は2次元場に近づくと考えられる。そこでまず、次式で定義される3次元および2次元解析の反射係数の差 E と e/λ との関係調べる。

$$E = \frac{|r_m^n| - |R_m^n|}{|r_m^n|} \quad (29)$$

ただし、 r_m^n と R_m^n はそれぞれ3次元および2次元解析による反射係数である。 S_0 モードと A_0 モードが入射するときの E と e/λ との関係を図-9に示す。こ

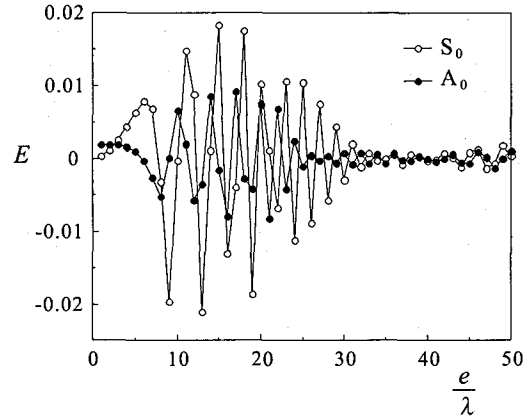


図-9 E と e/λ との関係

に $a/\lambda = 1$ 、 $c/\lambda = 40$ とした。この図より入射波が S_0 か A_0 に関わらず、 e/λ が非常に小さい場合 ($e/\lambda < 2$) は差 E が比較的小さく、 $2 < e/\lambda < 35$ の範囲では e/λ の値に応じて E が変動する。さらに、 e/λ が約 35 を越えると E は小さくなる。この傾向は他の c/λ の場合も見られた。図-10(a) と (b) はそれぞれ A_0 モードと S_0 モードが入射するときの差 E の分布を c/λ と e/λ の関数として示した図である。この図からわかるように、 e/λ が非常に小さいときは差 E も小さい。そして c/λ が大きくなるにつれて差 E が変動する領域の幅も大きくなる。また、 e/λ が非常に大きいときは3次元の反射問題が2次元の反射問題に近づくので3次元と2次元の反射係数の差 E が小さくなっている。図-10(a) と (b) を比較すると、 A_0 モードより S_0 モードが入射する場合の差が大きいことが分かる。その理由は次のように説明できる。 A_0 モードが入射するときは反射波として現れるモードは A_0 モードしかない。それに対して、 S_0 モードが入射するときは S_0 モードと SH_0 モードが現れる。そのため、 A_0 モードより S_0 モードが入射する場合の3次元の効果が大きい。

さて3次元と2次元の反射係数の差が顕著となる原因を数値解析結果をもとに検討する。図-11、12 と 13 はそれぞれ $e/\lambda = 15$ 、5 と 1 の場合の S_0 モードが入射するときの u_3 の板表面での分布をいくつかの時刻において示したものである。ここでは $c/\lambda = 10$ としている。図-(a)、(b)、(c) と (d) の時刻 tc_g はそれぞれ 46.4、64.0、80.4 と 128.6 である ($tc_g/\lambda = 7.2$ 、9.9、12.4 と 19.9、 c_g はエネルギー速度)。図-(a)、(b)、(c) の順に入射波の S_0 モードが端部 ($x_1 = 0$) に近づいて、図-(d) では S_0 モードが反射されている。 SH_0 モードはこれらの図に表れていないが、これは SH_0 モードが u_3 成分を持たないからである。

まず図-11を考察する。この場合外力の幅が広くて $x_2/\lambda = 0$ 前後で幅広い一様な領域が現れる。 S_0 モード

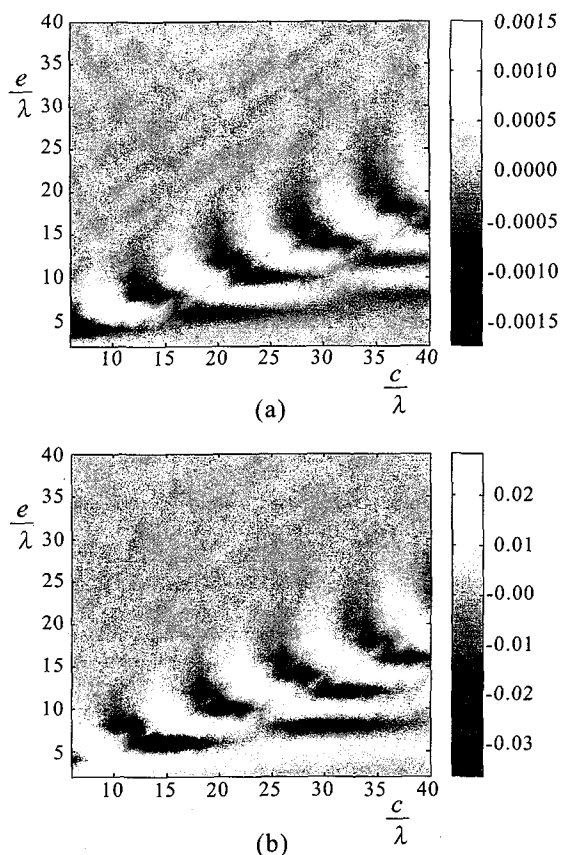


図-10 (a) A_0 モードと (b) S_0 モードが入射するときの c/λ と e/λ の関数としての E の分布

が進行するにつれて $x_2/\lambda = \pm 15$ 周辺から乱れが徐々に現れるものの、 S_0 モードが反射された後もこの様な領域がまだ残っている。図-12 の $e/\lambda=5$ の場合では励振されたすぐ後の (a) では一様な領域があるが、モードが進行するにつれて一様な領域が狭まって、反射波には一様な領域が見られない。このように、 e/λ がある値以下になると、3次元と2次元の反射係数の差 E が顕著になる。しかし、 e/λ が非常に小さくなると、差 E は再び小さくなる。その一例として $e/\lambda=1$ の場合を図-13に示す。この図より、外力によって波が入射された直後は一様な波面が現れないが、 S_0 モードが進行するにつれて波面の曲率半径が大きくなり、局部的に一様な領域が形成される。

図-13に示したように、 e/λ が非常に小さい場合は小さい差 E が得られるが、そのような場合、 a/λ と c/λ が差 E にどう影響するかを以下に検討する。図-14は $e/\lambda=1$ 、 $c/\lambda=40$ のときの差 E と a/λ の関係を示した図である。この図より、 a/λ が大きくなれば差 E が減少するが、 a/λ による E への影響はあまりないことがわかる。図-15は $e/\lambda=1$ 、 $a/\lambda=1$ のときの差 E と c/λ の関係を示した図である。この図よりわかるように小さい c/λ では大きな差 E が生じる。これは波面が

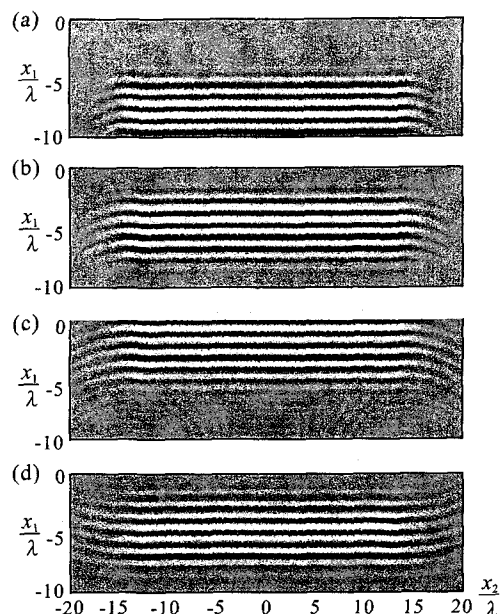


図-11 $e/\lambda=15$ のときの S_0 モードの反射の経時変化

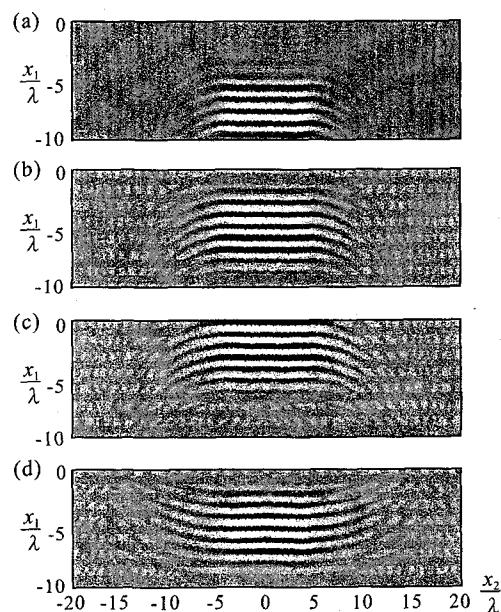


図-12 $e/\lambda=5$ のときの S_0 モードの反射の経時変化

端部に到達するときは波面の曲率がまだ大きいためである。 c/λ が大きくなれば、差 E が減少する。

6. 結論

半無限の平板における外力による励振解析および端部による反射解析を行った。得られた時間域の波形を用いて3次元問題における反射係数を求め、それを2次元問題の反射係数と比較した。外力の幅と端部から

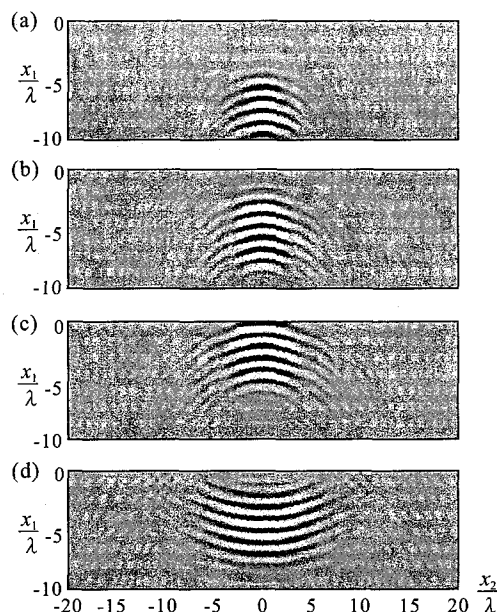


図-13 $e/\lambda=1$ のときの S_0 モードの反射の経時変化

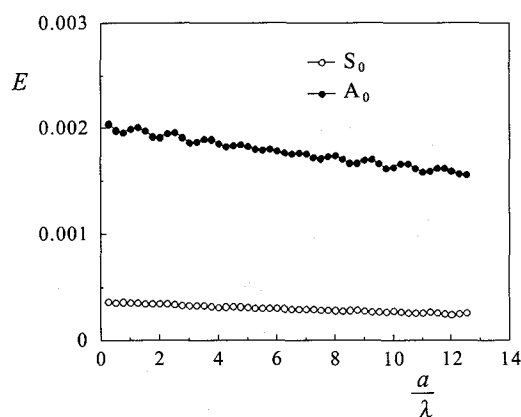


図-14 E と a/λ との関係

の距離および測定的位置を変化させ、3次元および2次元解析における反射係数の差への影響を調べた。その結果、3次元と2次元の反射係数の差が小さくなるのは外力の幅が大きいときと、非常に小さいときであることがわかった。ただし、外力の幅を小さくする場合は外力と端部が十分離れていなければならない。

謝辞

本研究の遂行にあたり、第一著者は日本学術振興会より平成17年度特別研究員奨励費の補助を受けました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) I. A. Viktorov: *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Application*, Plenum, New York, 1967.
- 2) B. A. Auld: *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

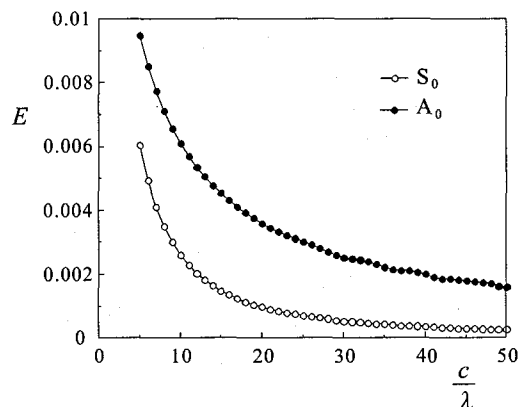


図-15 E と c/λ との関係

- 3) J. D. Achenbach: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- 4) P. J. Torvik: Reflection of Wave Trains in Semi-Infinite Plates, *J. Acous. Soc. Am.* 41, pp. 346-353, 1967.
- 5) B. A. Auld and E. M. Tsao: Variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-24, 5, pp. 317-326, 1977.
- 6) B. Morvan, N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos: Lamb wave reflection at the free edge of a plate, *J. Acoust. Soc. Am.* 113, pp. 1417-1425, 2003.
- 7) N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos: Numerical description of the edge mode at the beveled extremity of a plate, *J. Acoust. Soc. Am.* 117, pp. 194-199, 2005.
- 8) R. D. Gregory and I. Gladwell: The reflection of symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate, *J. Elast.* 13, pp. 185-206, 1983.
- 9) M. Koshiha: Finite-element analysis of edge resonance in a semi-infinite elastic plate, *Electron. Lett.* 19, pp. 256-257, 1983.
- 10) J. M. Galan and R. Abascal: Numerical simulation of Lamb wave scattering in semi-infinite plates, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 53, pp. 1145-1173, 2002.
- 11) Y. H. Cho and J. L. Rose: A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves, *J. Acous. Soc. Am.* 99, pp. 2097-2109, 1996.
- 12) A. Gunawan and S. Hirose: Mode-exciting method for Lamb wave-scattering analysis, *J. Acoust. Soc. Am.* 115, pp. 996-1005, 2004.
- 13) N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos: Experimental study and signal analysis in the Lamb wave conversion at a bevelled edge, *Ultrason.* 42, pp. 377-381, 2004.
- 14) A. Gunawan and S. Hirose: Reflection of Obliquely Incident Lamb waves and SH waves by an Edge of a Plate (to be published).
- 15) D. Alleyne and P. Cawley: A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode-signals, *J. Acoust. Soc. Am.* 89, pp. 1159-1168, 1991.
- 16) J. D. Achenbach and Y. Xu: Wave motion in an isotropic elastic layer generated by a time-harmonic point load of arbitrary direction, *J. Acous. Soc. Am.* 106, 1, pp. 83-90, 1999.

(2006年4月13日 受付)