

非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析

Shallow Water Flow Analysis by CIVA - Lattice Boltzmann Method
based on Unstructured Mesh

石川裕士*・立石絢也**・桧山和男***

Yuji ISHIKAWA, Jun'ya TATEISHI and Kazuo KASHIYAMA

*学生会員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 博士(工学) 株式会社 日本総合研究所 (〒102-0082 東京都千代田区一番町 16)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a lattice Boltzmann method (LBM) for the shallow water flow simulation applicable to complicated flow domain using an unstructured triangular mesh. The cubic interpolation scheme based on the CIVA method is employed in order to interpolate the particle distribution function in the streaming step accurately. In the collision step of the LBM, two-dimensional nine-speed(2D9V) lattice BGK model is employed as a collision operator. The present method is applied to the analysis of the bore problem, flow over a bump, the tidal flow in the flask bay and Tokyo bay, to show the validity and efficiency of the method.

Key Words : Lattice Boltzmann Method, Shallow Water Flow, CIVA Method, Tokyo Bay

1. はじめに

海岸, 河川, 湖沼において生じる流れの多くは, 水平方向の運動に比べて鉛直方向の運動が微小であると仮定された浅水長波方程式で記述される. これらの流れ現象の定量的な把握は, 水害による被害や水辺環境の変化の予測を行う上で重要であり, これまで主に模型実験による方法が一般に用いられてきた. しかし, 近年の数値計算手法の進歩と計算機性能の向上により数値シミュレーションも数多く行われてきている. これらの数値シミュレーションは, 一般に解析領域も広くまた長時間の計算が求められるため, 大規模計算となることが多い. このため, 高精度かつ高速な数値解析手法の構築は重要である. これまで, 浅水長波流れの解析手法としては, 有限差分法, 有限体積法及び有限要素法などが主流であるが, 近年新しい数値解析手法として格子ボルツマン法 (LBM:Lattice Boltzmann Method)¹⁾⁻⁵⁾ が注目されている. 格子ボルツマン法は, 流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体で近似し, 各粒子の衝突と並進とを計算する手法である. 流体の巨視的変数は, 求められた粒子分布関数を用いて質量保存・運動量保存により算出される. また格子ボルツマン法は, 粒子の計算を局所的に行う陽的な解法であり, かつアルゴリズムも簡便な手法であるため, 計算が高速に処理可能であり, 大規模計算に対して有効な手法であるといえる.

しかし, 格子ボルツマン法は構造格子に基づく方法であるため, 自然地形を取り扱うことが多い浅水長波

流れ解析においては, その適用性に難点がある. これまで, 非構造格子へ拡張する試みとして, Navier-Stokes 流れに対して, 一般化座標において補間を用いる方法 (ISLBM:Interpolation-Supplemented LBM)⁶⁾⁻⁸⁾ や, 一般化座標に基づく差分法を用いて離散ボルツマン方程式を解く方法 (FDLBM:Finite Difference LBM)⁹⁾, 有限体積法のスキームを導入した方法 (FVLBM:Finite Volume LBM)¹⁰⁾, 有限要素法を導入した方法 (FELBM:Finite Element LBM)¹¹⁾¹²⁾ などが提案されている. また, 著者らにより, 非構造格子における移流方程式に対する高精度スキームである CIVA 法を導入した CIVA-格子ボルツマン法が提案されている¹⁵⁾⁻¹⁸⁾. この手法は, 格子ボルツマン方程式における並進過程の計算に三角形の非構造格子に基づく CIVA 法を, 衝突過程の計算に 2 次元 9 速度モデルに基づく格子ボルツマン法を適用したものである. また, この手法は, 本来の格子ボルツマン法の特徴である計算の局所性を有しており, 陽的な計算となるため, 計算機容量や並列計算の点で優れた解法であるといえる.

そこで本論文は, 著者らが Navier-Stokes 流れにおいて提案した CIVA-格子ボルツマン法¹⁵⁾⁻¹⁸⁾ を非構造格子に基づく浅水長波流れ解析に適用を試みたものである. 格子ボルツマン法の浅水長波方程式への適用研究は, 構造格子を用いたもの⁵⁾ は存在するが, 非構造格子への適用研究は著者らの知る限りはない. 本手法をいくつかのベンチマーク問題及び東京湾の潮流解析に適用し, 理論解や実測結果及び従来の非構造格子の

解析手法である有限要素法による計算結果との比較のもとに、本手法の妥当性と有効性を検討した。

2. 格子ボルツマン法

2.1 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において、衝突演算項に格子 BGK モデル¹⁹⁾を用いた格子ボルツマン方程式は以下のようになる。

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

上式において、左辺は粒子の並進過程、右辺の1項目は衝突過程、2項目は力に関する項をそれぞれ示している。 f_{α} は α 方向の粒子がどのくらい存在するかということを表す粒子分布関数、 f_{α}^{eq} は局所平衡分布関数である。また、 $\mathbf{e}_{\alpha}$ は図-1に示す粒子の並進速度ベクトルであり、本論文で用いた2次元9速度モデルでは以下の式によって表される。

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \begin{cases} [0, 0], & \alpha = 1 \\ e \left[\cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right], & \alpha = 2, \dots, 5 \\ \sqrt{2}e \left[\cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right], & \alpha = 6, \dots, 9 \end{cases} \quad (2)$$

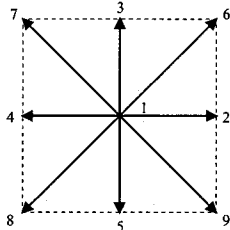


図-1 2次元9速度モデル

式(1), (2)の e は $e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ で定義され、 Δt は微小時間増分量、 Δx は格子サイズである。式(1)の支配方程式により粒子の計算を局所的に行い、陽的に未知量 f_{α} を求める。また、 F_i は力に関する項であり、以下のように入与えられる。

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (3)$$

上式において、 ρ は流体密度、 z_b は河床高度、 τ_{bi} は底面でのせん断応力、 τ_{wi} は自由表面でのせん断応力、 E_i はコリオリ力である。 τ_{bi} 及び τ_{wi} は以下の式によって算出される。

$$\tau_{bi} = \rho C_b u_i \sqrt{u_j u_j} \quad (4)$$

$$\tau_{wi} = \rho_a C_w u_{wi} \sqrt{u_{wj} u_{wj}} \quad (5)$$

式(4)において、 C_b は底面摩擦であり、Chezyの係数($C_z = h^{1/6}/n$)を用いて以下の式によって決定される。なお n はマンニングの粗度係数である。

$$C_b = \frac{g}{C_z^2} \quad (6)$$

また、式(5)において、 ρ_a は空気密度、 C_w は空気抵抗、 u_w は風速を表す。なお、式(3)における z_b の定義は図-2のようになっている。

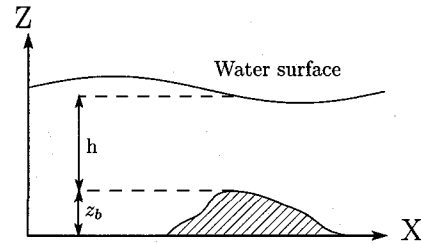


図-2 水深定義図

また、式(1)において、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、1タイムステップの衝突で粒子が格子点上において一定の割合 $\frac{1}{\tau}$ で局所的な平衡状態に近づいていくことを示している。 τ は、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e と以下のような関係にある。

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2} \quad (7)$$

2.2 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数 f_{α}^{eq} とは、格子点上において流体が平衡状態に達したときの粒子分布であり、巨視的変数である全水深及び速度を用いて以下のように求められる。

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 1 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i & \alpha = 2, \dots, 5 \\ + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \alpha = 2, \dots, 5 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i & \alpha = 6, \dots, 9 \\ + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \alpha = 6, \dots, 9 \end{cases} \quad (8)$$

上式において、 h は全水深、 u_i は流速、 g は重力加速度である。なお、上式の係数は、巨視的速度においてべき級数を取り、質量保存、運動量保存、エネルギー保存を満たすように決定されている。⁵⁾

2.3 流れの巨視的変数

流体の巨視的変数である全水深及び速度は、その粒子分布関数と式(2)の粒子の並進速度ベクトルを用い

て以下のように計算される。

$$h = \sum_{\alpha}^9 f_{\alpha} \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha}^9 \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (10)$$

2.4 浅水長波方程式の導出

式 (9) と式 (10) から計算される全水深と速度が、浅水長波方程式の解であるということを証明するために、式 (1) から浅水長波方程式を導出する⁵⁾。まず、式 (1) の格子ボルツマン方程式において $\Delta t = \epsilon$ とし、左辺第 1 項に対して $(\mathbf{x}, t)$ 周りに Taylor 展開をすると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 f_{\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{1}{\tau} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{(0)}) + \frac{\epsilon}{6e^2} e_{\alpha j} F_j \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) において、 ϵ の項でまとめると以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha}^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{6e^2} e_{\alpha j} F_j \quad (12)$$

同様に、式 (11) において、 ϵ^2 の項でまとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 f_{\alpha}^{(0)} \\ &= -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、式 (12) を式 (13) に代入し、整理すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha}^{(1)} \\ &= -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{1}{6e^2} e_{\alpha k} F_k \right) \end{aligned} \quad (14)$$

式 (12) と式 (14) に ϵ をかけたものを各方向において足し合わせると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(0)} \right) \\ &= -\epsilon \frac{1}{12e^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha j} e_{\alpha k} F_k \right) \end{aligned} \quad (15)$$

上式において右辺の力に関する項に 1 次精度を適用し、式 (2) と式 (8) を用い左辺を評価すると以下のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (16)$$

上式は浅水長波流れの連続式である。

また、連続式と同様に取り扱い、式 (12) と式 (14) に

ϵ をかけたものに並進速度ベクトル $\mathbf{e}_{\alpha i}$ をかけ、各方向において足し合わせると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}^{(0)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(0)} \right) \\ &+ \epsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} \right) \\ &= F_j \delta_{ij} - \epsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{1}{6e^2} e_{\alpha j} F_j \right) \end{aligned} \quad (17)$$

上式を巨視的変数の式に変換すると、以下の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} + F_i \quad (18)$$

上式においての、 A_{ij} は以下のように評価される。

$$A_{ij} = \frac{\epsilon}{2\tau} (2\tau - 1) \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} \quad (19)$$

上式に関して、式 (2) と式 (8) を用いると、以下の近似が成り立つ。

$$A_{ij} \approx -\nu_e \left[\frac{\partial(hu_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_i} \right] \quad (20)$$

そして、式 (20) を式 (18) に代入すると、浅水長波流れの運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) \\ & - \nu_e \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial(hu_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_i} \right] + F_i \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 ν_e 及び F_i は、以下のように定義される。

$$\nu_e = \frac{e^2 \Delta t}{6} (2\tau - 1) \quad (22)$$

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (23)$$

なお、導出の詳細は参考文献⁵⁾を参照されたい。

2.5 境界条件処理

計算過程において、衝突及び並進計算が終了した際に境界外から計算領域に入る方向の粒子分布関数 f_{α} を決定する必要がある。すなわち、境界上の領域に向かう法線ベクトルを $\mathbf{n}_{\alpha}$ とすると、 $\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} > 0$ を満たす f_{α} を算出しなければならない。例えば、図-1 において下部に壁面があるとするならば、 f_3 、 f_6 、 f_7 を算出しなければならないことになる。

non-slip 境界条件処理としては Bounce-back 条件、slip 境界条件処理としては Mirror 条件、流入流出境界条件としては、粒子分布関数の 0 勾配条件などが挙げられる。以下にそれらの計算方法を示す。

(1) Bounce-back 条件

non-slip 境界条件処理としては、Bounce-back 条件¹⁾が広く用いられている。この境界条件処理は、粒子が来た方向に 180° 跳ね返るという条件である。以下の式によって、non-slip 境界条件を満たすことになる。

$$f_3 = f_5, \quad f_6 = f_8, \quad f_7 = f_9 \quad (24)$$

(2) Mirror 条件

slip 境界条件処理としては、Mirror 条件¹⁾が広く用いられている。この境界条件処理は、壁に向かう方向の粒子が鏡面反射する条件であり、以下のように表される。

$$f_3 = f_5, \quad f_6 = f_9, \quad f_7 = f_8 \quad (25)$$

(3) 粒子分布関数の 0 勾配条件

流入・流境界条件としては、解析領域内に向かう方向の粒子分布関数の勾配を 0 にする境界条件処理⁵⁾が提案されている。例えば、図-1 において左から右へ流体が流入する場合を考えるならば、以下の式により算出される。

$$f_2^{in} = f_2^d, \quad f_6^{in} = f_6^d, \quad f_9^{in} = f_9^d \quad (26)$$

上式において、 f_i^{in} は流入部、 f_i^d はその風下方向の隣接する格子点である。流出に関しても同様に処理する。

2.6 CIVA 法

CIVA 法¹⁴⁾は、移流方程式の高精度かつ安定な解法である CIP 法¹³⁾を三角形及び四面体に拡張した手法である。CIP 法や CIVA 法では、各節点の局所厳密解を上流側の格子内に張った 3 次の補間曲面により求める。空間内の完全 3 次多項式を得るためには 10 個の係数を求める必要があるため、各節点上に関数値及び空間微係数値を配置する。(図-3)

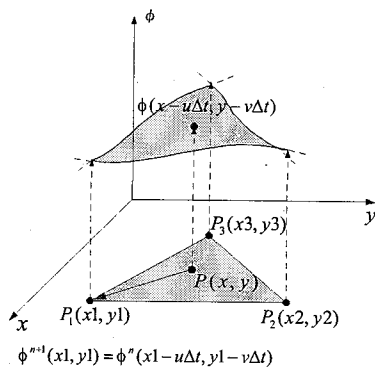


図-3 CIVA 法

四角形格子の場合、4 点計 12 変数の情報から 3 次多項式の未知係数が決定されるが、三角形格子の場合は 3 点 9 変数しかなく、3 次多項式を完全に求めることができない。CIVA 法では、この問題を 3 次関数を調整し

未知係数を減らすことにより解決している。CIVA 法で用いられる補間関数及び微係数の補間関数は、三角形に対して正規化された座標系である面積座標系を用いて以下のように表される。

$$\tilde{f}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{l=1}^3 \alpha_l L_l + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3] \quad (27)$$

ここで、座標値 (L_1, L_2, L_3) は、部分三角形の面積 S_1, S_2, S_3 と全体の三角形の面積 $S (= S_1 + S_2 + S_3)$ によって表される。

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (28)$$

なお、式 (27) の d は 3 次補間の場合 1 となり、 c は 0.5 である。

また、 J はヤコビアンであり、デカルト座標系の空間微係数値は、以下のように算出される。

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{y_3 - y_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{y_1 - y_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3} \quad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{x_1 - x_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{x_2 - x_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3} \quad (31)$$

CIVA 法のように移流方程式を三角形格子上の補間により解く場合には、上流側の点がどの要素に存在するかを探索する必要がある。本研究では、CFL 数が 1 を超えないように Δx を設定し、上流側の点を隣接する要素内から探索した。このとき、面積座標における小三角形の面積 S_1, S_2, S_3 が全て正になる三角形に上流側の点が存在するとして探索を行った。解析領域中に大きさが異なる要素が混在している場合は、最も小さい要素で CFL 数 1 以下の条件を満たさなければならない。そのため、計算に用いる Δx は最も小さい要素を基準にして設定される。

2.7 力に関する項の取り扱い

前述したように、格子ボルツマン方程式における力に関する項は以下ようになる。

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (32)$$

上式において、第 1 項目の河床勾配の評価は、まず三角形格子毎の河床勾配を算出し、それを用いて、最小二乗法により各格子点における河床勾配を算出している。なおこの値は、固定床の場合には毎ステップ更新をする必要はない。一方、第 2 項から第 4 項はいずれも流速に関わる項なので、毎ステップ更新が必要がある。

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために、数値解析例として、段波問題、突起のある開水路流れ、フラスコ型湾及び東京湾の潮流解析を取り扱った。

3.1 段波問題

図-4に解析モデル及び初期水位を示す。この数値解析例は、静止していたダム内の流体が突然崩壊、放流する現象である。壁面の境界条件は、slip条件とする。なお、この問題においては完全流体における理論解²⁰⁾との比較を行う。ただし、格子ボルツマン法においては、非粘性の解析が行えないため、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e として計算の安定に必要な量($\nu_e = 0.03[\text{m}^2/\text{sec}]$)を与えた。

この例題では、構造格子と非構造格子が同程度の節点数を有する場合に、構造格子を用いた従来の格子ボルツマン法と非構造格子を用いた本手法であるCIVA-格子ボルツマン法の精度の比較を行う。なお、それぞれのメッシュの詳細は表-1と図-5に示す。

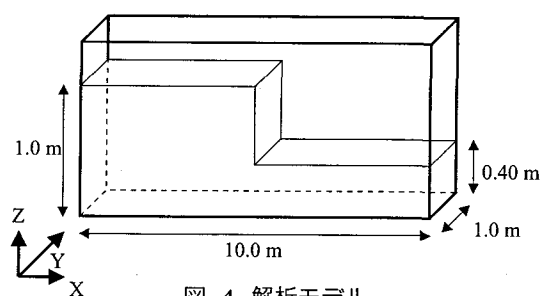
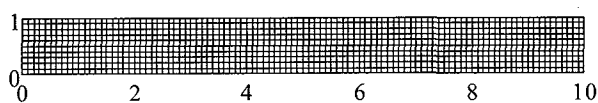


図-4 解析モデル

表-1 メッシュ詳細表

手法	LBM	CIVA-LBM
形状	構造格子	非構造格子
格子数	1,111	1,109
最小メッシュ幅	0.100	0.067
微小時間増分量	0.01	0.01



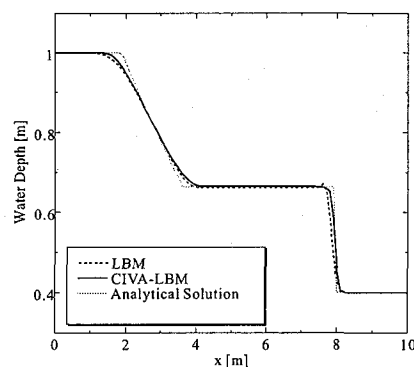
(a) 構造格子 (LBM)



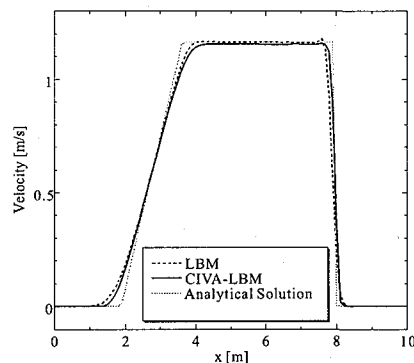
(b) 非構造格子 (CIVA-LBM)

図-5 格子形状

解析結果として、図-6に1秒後におけるメッシュ及び



(a) 水深図



(b) 流速図

図-6 1秒後における水深と流速図

手法の違いによる水深と流速の比較を示す。図より、格子ボルツマン法の並進過程にCIVA法を導入したCIVA-格子ボルツマン法により、非構造格子を用いた解析が可能であることがわかる。また、同程度の格子数を有するとき、従来の格子ボルツマン法と同程度の解析精度を得ることを示され、本手法の有効性が確認された。

3.2 突起のある開水路定常流れ

次に、底面勾配を有する場合の解析例として、突起のある開水路流れを取りあげる。図-7に解析モデルを示す。

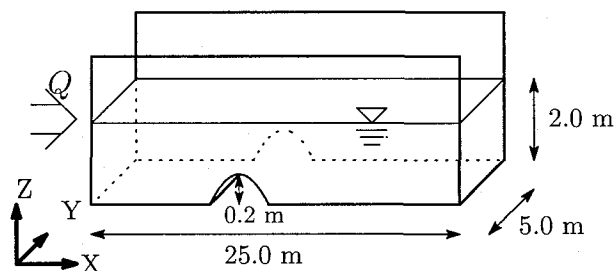


図-7 解析モデル

図-7の左側から単位幅あたりの流量 $Q = 4.42[\text{m}^2/\text{s}]$ を流入させ、右側の流出側では、 $h = 2.0[\text{m}]$ を課すものとする。境界条件としては、流入・流出は粒子分布関数の0勾配条件を用い、側面はMirror条件を用いslip条件とする。また、河床高度は以下の式によって与え

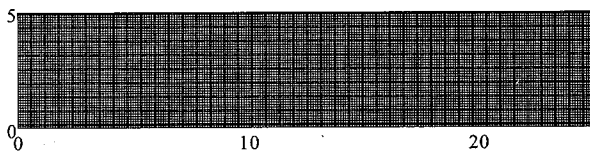
る。なお、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e は、完全流体を仮定した理論解²¹⁾との比較のため、計算の安定に必要な量 ($\nu_e = 0.01[\text{m}^2/\text{sec}]$) を与えた。

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{if } 8 < x < 12 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

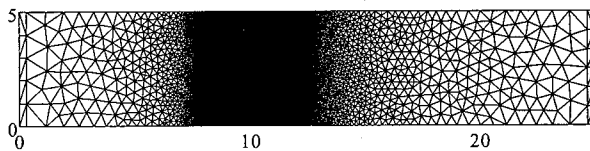
なお、この例題では、構造格子と非構造格子が同程度の格子数を有する場合に、構造格子を用いた従来の格子ボルツマン法、構造格子を用いた CIVA-格子ボルツマン法、そして非構造格子を用いた CIVA-格子ボルツマン法の精度比較を行う。それぞれのメッシュの詳細は、表-2 と図-8 に示す。

表-2 メッシュ詳細表

手法	LBM, CIVA-LBM	CIVA-LBM
形状	構造格子	非構造格子
格子数	12,801	11,031
最小メッシュ幅	0.1	0.027
微小時間増分量	0.01	0.001



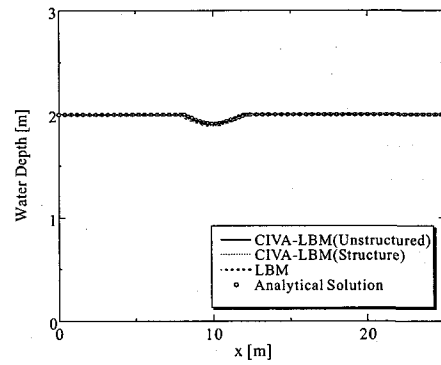
(a) 構造格子



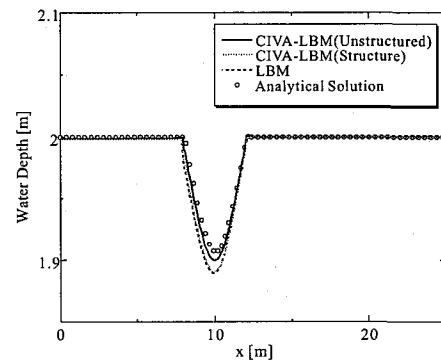
(b) 非構造格子

図-8 格子形状

解析結果として、図-9 に定常時における格子形状及び手法の違いによる水面形状の比較を示す。図より、構造格子 (図-8 (a)) における CIVA-格子ボルツマン法と格子ボルツマン法を比較すると、両者はほぼ完全な一致を示した。また、非構造格子 (図-8 (b)) における CIVA-格子ボルツマン法と構造格子における格子ボルツマン法を比較すると、CIVA-格子ボルツマン法は構造格子を用いた格子ボルツマン法に比べて厳密解と良い一致を示した。これは、CIVA-格子ボルツマン法の場合、格子の疎密付けに任意性があるため、同程度の格子数であっても、突起部分の解像度を上げることができることによる。



(a) 概観図



(b) 拡大図

図-9 定常時における水深図

3.3 フラスコ型領域潮流問題

次に、曲線境界を有する流れ場の計算の有効性を示すために、フラスコ型領域潮流問題を取りあげた。図-10 に有限要素分割図を示す。境界条件としては、弧の部分には Bounce-back 条件を用い non-slip 条件とし、直線部には Mirror 条件を用い slip 条件とした。流入部には以下のような入射条件を与えた。なお、ここでは反射波を吸収するような処理は行っていない。

$$\zeta = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad u_i = \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta n_i \quad (34)$$

上式において、 ζ は水位変動量、 u は流速、 t は時間、 h は全水深、 g は重力加速度、 n_i は境界に立てた内向きの単位法線ベクトルを表す。また、振幅 A は $1.0[\text{m}]$ 、周期 T は $12.0[\text{h}]$ 、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e は $0.1[\text{m}^2/\text{sec}]$ とした。なお、本手法の有効性を検討するために、解析精度及び計算時間において、SUPG 法に基づく陽的な安定化有限要素法との比較を行った。微小時間増分量は、安定に計算が可能な最大のものを使用し、その結果、本手法は $0.5[\text{sec}]$ 、安定化有限要素法は $0.1[\text{sec}]$ とした。

解析結果として、図-11 に a 点から e 点における水位と流速の時刻歴を示す。この図より、本手法は安定に解析が行えていること及び、位相が変化せず波が進行していることが確認できる。

次に、図-12 に b 点における水位の時刻歴について

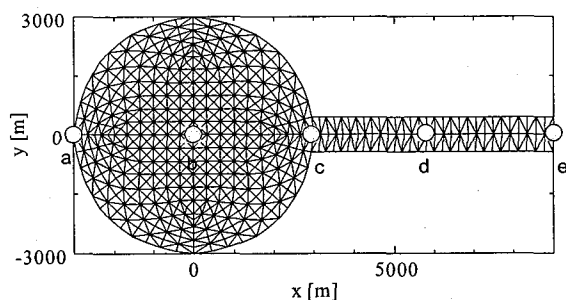


図-10 有限要素分割図

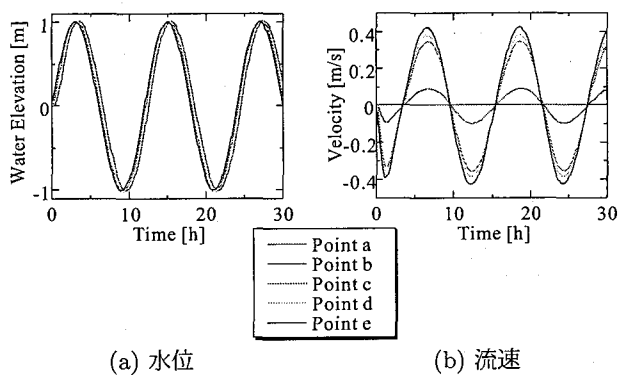


図-11 a 点から e 点の水位及び流速の時刻歴

安定化有限要素法との比較を示す。この図より、本手法の解析結果は安定化有限要素法と定量的に一致していることがわかる。また、図-13、14 に 12 時間及び 18 時間後の流速ベクトル図を示す。この図からも、本手法は安定に解析できていることが確認できる。

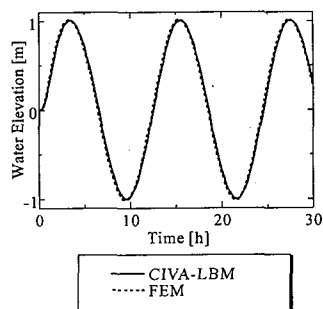


図-12 b 点における水位の時刻歴の比較

なお、本手法の計算時間を安定化有限要素法のそれと比較すると、本手法は安定化有限要素法に比べて大きな微小時間増分量をとることができるため、安定化有限要素法の 58% であり、計算時間の観点から本手法の有効性が確認できる。

3.4 東京湾潮流解析

最後に、実際の潮流現象の解析として、複雑な境界形状と水深変化を有する東京湾潮流解析を取りあげた。有限要素分割図は図-15 に示すとおりであり、格子数は 5,839、要素数は 10,340 である。境界条件としては、壁

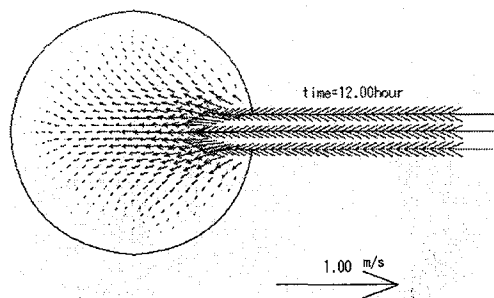


図-13 12 時間後における流速ベクトル図

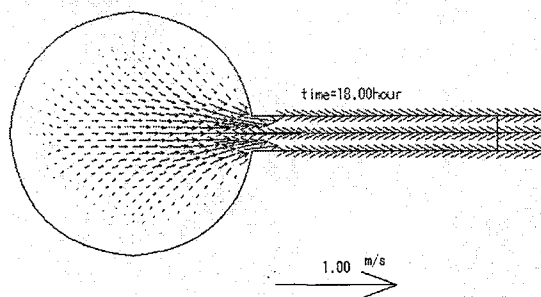
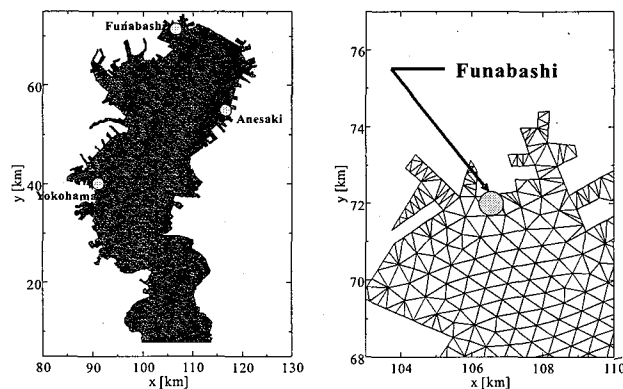


図-14 18 時間後における流速ベクトル図

面は Bounce-back 条件を用い non-slip 条件とし、開境界には式 (34) を与えた。なお、ここでは M_2 分潮を仮定し、振幅 A は 0.21[m]、周期 T は 12.42[h]、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e は $10[\text{m}^2/\text{sec}]$ とした。



(a) 概観図

(b) 船橋周辺拡大図

図-15 東京湾有限要素分割図

解析結果として、図-16 に上げ潮時と下げ潮時における流速ベクトル図を示す。図より、本手法は東京湾のように複雑な境界形状を有する場合においても、解析可能であることが示された。また図-17 に、姉崎と船橋における水位時刻歴を示す。図より、1 周期目の波は初期条件の影響を受けるためそれ以降について実測値²³⁾及び安定化有限要素法²²⁾と比較すると、定性的に妥当な解析結果を得られていることがわかる。なお、本解析結果に完全な周期性が見られない原因については、今後の検討課題とする。

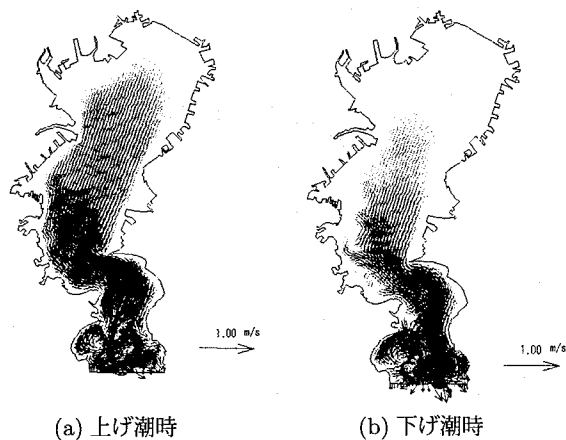


図-16 流速ベクトル図

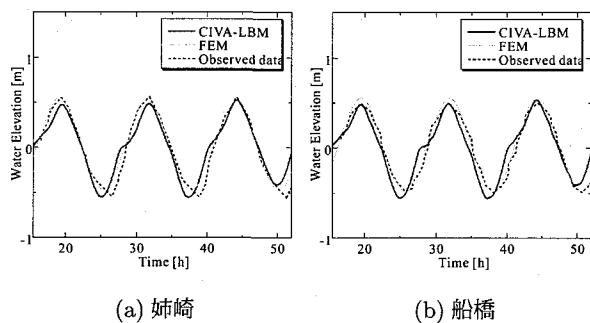


図-17 各地点における水位時刻歴

4. おわりに

本論文では、非構造格子を用いた格子ボルツマン法に基づく高精度な浅水長波流れ解析手法の構築を行うことを目的とし、移流方程式の高精度スキームであるCIVA法を導入したCIVA-格子ボルツマン法による計算手法を提案した。

数値解析例を通じて、以下の結論を得た。

- 並進過程にCIVA法を導入したCIVA-ボルツマン法を用いることにより、浅水長波流れに対する格子ボルツマン法の非構造格子への拡張が可能となった。
- 本手法と通常の構造格子に基づく格子ボルツマン法とを比較すると、本手法においては格子の粗密付けが可能であるため、同程度の格子数でも解析精度において優れていることが確認された。
- 本手法は、SUPG法に基づく陽的な安定化有限要素法に比べて、微小時間増分量を大きくとれるため、計算時間の点で有利であることが確認された。

今後は、大規模問題への対応として並列化手法の導入及び射流計算が可能となるモデルへの検討などを行う予定である。

参考文献

- 1) S.Succi: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Oxford University Press, 2001.

- 2) S.Chen and G.Doolen: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu.Rev.Fluid Mech.*, Vol.30, pp.329-64, 1998.
- 3) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, 77-2, pp.197-232, 2001.
- 4) 葛原道久, 高田直樹, 片岡武: 格子気体法・格子ボルツマン法-新しい数値流体力学の手法-, コロナ社, 1999.
- 5) J.G.Zhou: Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.
- 6) He,X., and Doolen,G.D.: Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder, *J.Compt. Phys.*, Vol.134, pp.306-315, 1997.
- 7) Nannelli,F., and Succi,S.: The Lattice Boltzmann Equation on Irregular Lattices, *J. Stat. Phys.*, Vol.68, pp.401-407, 1992.
- 8) He,X., Luo,L., and Dembo,M.: Some Progresss in lattice Boltzmann method.: Part I. nonuniform mesh grids, *J. Comput. Phys.*, Vol.129, pp.357-363, 1996.
- 9) Cao,N., Chen,S., Jin,S., Martinez,D.: Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E.*, Vol.55, R21, 1997.
- 10) Nannelli,F., Succi,S.: The Lattice Boltzmann Equation on Irregular Lattices, *J. Stat. Phys.*, 68, pp.401-407, 1992.
- 11) T.Lee, C.L.Lin: An Eulerian description of the streaming process in the lattice Boltzmann equation, *J. Comput. Phys.*, Vol.185, pp.445-471, 2003.
- 12) T. Lee, C.L.Lin: A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation, *J. Comput. Phys.*, Vol.171, pp.336-356, 2001.
- 13) T.Yabe: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, Vol.66, pp.219-232, 1991.
- 14) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論, 64-620B, pp.1071-1078, 1998.
- 15) 立石絢也, 榎山和男: CIVA-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.323-329, 2004.
- 16) Tateishi J. and Kashiyaama K.: A Lattice Boltzmann-CIVA Method for Incompressible Flow Simulation Based on Unstructured Mesh, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol.53, pp.265-272, 2004.
- 17) 立石絢也, 榎山和男: 保存型CIVA法の構築と格子ボルツマン法への応用, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.8, pp.243-249, 2005.
- 18) 立石絢也, 榎山和男: 非圧縮性粘性流体解析のためのCIVA-格子ボルツマン法の精度と安定性, 日本計算工学会論文集 2006 年号, No.200500329, 2006.
- 19) Y.H.QIAN: Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, *Europhysics letters*, 1992.
- 20) Stoker,J.J.: The breaking of a dam, *Water Waves*, Interscience Publishers, Inc. NewYork, pp.333-341, 1957.
- 21) N.Goutal and F.Maurel, editors: *Proceedings of the 2nd Workshop on Dam-break Wave Simulation*, HE-43/97/016/B, Departement Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale, Electricite de France, France, 1997.
- 22) 小林義典, 榎山和男: 津波による構造物に作用する流体力の安定化有限要素解析, 計算工学講演会論文集, Vol.10, No.1, pp.299-302, 2005.
- 23) 海上保安庁: 日本沿岸潮汐調和定義表, 1992.

(2006 年 4 月 13 日 受付)