

拡張有限要素法 (X-FEM) による二次元き裂問題の解析とその精度評価

Two-Dimensional Analysis of Cracks by X-FEM and Evaluation of the Accuracy

柴沼一樹*, 宇都宮智昭**

Kazuki SHIBANUMA, Tomoaki UTSUNOMIYA

*学生員, 京都大学大学院, 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員, 工博, 京都大学助教授, 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper presents a numerical method for evaluation of the stress intensity factors in two-dimensional stress/strain state by X-FEM (eXtended Finite Element Method). For the development of the method, the applicability of the VCEM (Virtual Crack Extension Method) and the M -integral method has been assessed, and the latter method has been found to be applicable to X-FEM. The stress intensity factor, K_I , for linear cracks has been calculated by the developed X-FEM program and compared with the analytical values. The results have shown a good accuracy of the proposed method.

Key Words: crack; extended finite element method; fracture mechanics; X-FEM

1. はじめに

現在, 破壊力学分野において一般的に多く用いられている数値解析の手法として有限要素法(FEM)がある. このFEMは任意形状領域の解析を比較的容易に行うことができる. しかし, 本来FEMは連続体を対象とする離散化手法であるため, 破壊力学におけるき裂表面のような不連続領域を扱うためにはき裂表面を離散化した要素の辺に一致させた上で, 要素節点を分離させる必要があり, また, き裂先端近傍において生じる応力やひずみの特異性を表現するために, き裂先端近傍を非常に小さな要素により構成するか, あるいは特異要素を組み込む必要がある. このような特殊性を考慮した上でのモデル化は複雑な処理となる. さらにき裂の進展過程を考慮する時は, き裂の進展による特異場の変化により必要となる要素のリメッシュ処理とFEM解析とを交互に行う必要があり, 一般に効率の悪い計算処理となってしまう. このような要素のリメッシュ処理を避けるためにBelytschkoやMoesにより提案されたのが拡張有限要素法(X-FEM: eXtended Finite Element Method)^{1,2)}である. X-FEMは容易にき裂を含んだ連続体のモデル化をすることが可能で, 破壊力学分野における様々な解析を効率化する事ができると考えられる.

しかし, X-FEMの破壊力学への適用性を正確に評価するためには, 破壊力学で最も重要なパラメータである応力拡大係数に関する評価方法のX-FEMへの適用性評価と応力拡大係数の精度評価が重要となる. 応力拡大係数評価方法のX-FEMへの適用性に関する従来の研究では, Nagashimaらにより変位外装法(DE: Displacement extrapolation method), 仮想き裂進展法(VCEM: Virtual

Crack Extension Method), 仮想き裂閉口法(VCCM: Virtual Crack Closure Method)および M 積分の4種類の方法について, 内部き裂を解析対象として適用性評価が実施されている³⁾. しかし, これらの解析におけるき裂の先端は全て要素節点に一致した場合であり, き裂の位置が要素内に任意に設置できるX-FEMの利点が十分に生かされていない特殊な条件下での検証に留まっている. また, BelytschkoやMoseらはX-FEMに M 積分を適用してき裂解析を実施しているが, 例えば破壊力学にとって最も基本となる破壊モードIに対しては, 内部き裂と縁き裂の引張試験時のみの検証である^{1,2)}. このように, 応力拡大係数について各種の評価方法が提案されているが, その適用例が特殊または限定されているため, X-FEMへの適用性は十分に議論されていないと言える. また, X-FEMによる破壊モードIに関する精度検証についても, 応力拡大係数の評価方法の場合と同様に, その解析対象のほとんどはき裂先端が要素節点もしくは要素辺と一致した特殊で限定された解析条件の下で実施されたものであり, また荷重条件も引張試験のみであり^{1,2)}, 曲げ試験も含めて総合的な検証が必要となる. さらに, X-FEMを用いたき裂の進展過程におけるき裂進展毎の定量的な精度評価はき裂の進展を評価する上で重要な課題であるが, これらの評価に関する従来のX-FEMを用いた研究は著者の知る限り存在しない. 以上から, 破壊力学にとって最も基本となる破壊モードIをも含めて, X-FEMに関する総合的な検証が十分に行われていないのが現状である.

そこで, 本研究では, X-FEMを用いた二次元線形破壊力学の解析システムを開発するための一環として, まず

(1) 代表的な応力拡大係数評価法のX-FEMへの適用性を検討し、次に(2)適用可能な応力拡大係数の評価法を用いて、破壊力学の最も基本となる破壊モードIを提供する各種き裂モデルを用いた応力拡大係数 K_I に関する総合的な精度検証を行い、最後に(3)き裂の進展過程における応力拡大係数 K_I に関するき裂進展毎の定量的な精度評価を行うことを目的とする。

2. X-FEM による解析手法

2.1 内挿関数と節点自由度

X-FEM は、き裂などによる変位の不連続面や特異場を、要素節点に新たな自由度とそれに対応した内挿関数を付加することにより表現する手法である。具体的な近似式を述べる前に二次元平面問題におけるき裂先端近傍の変位場を確認しておく。二次元平面ひずみ問題ではモード III の変形様式は考慮しないため、き裂先端近傍における変位場の近似解は次式で与えられる^{4),9)}。

$$u(x, y) = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1)$$

$$v(x, y) = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2)$$

ここで、 x, y 座標はき裂先端を原点とし、 x 軸をき裂先端方向とし、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位である。 r および θ は同様にき裂先端を原点にもち、き裂先端方向 (x 軸方向) を $\theta = 0$ とした局所的に設けられた極座標系の原点からの距離と角度である。また K_I および K_{II} はそれぞれ破壊モード I および II に対応する応力拡大係数、 ν はポアソン比、 $G = E/2(1+\nu)$ はせん断弾性係数、 E はヤング率である。また、 r がゼロの極限ではこれらは厳密解となっている。

これより、き裂の先端あるいは不連続面をふくむ要素内の変位を次のような近似式で表す。

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k + \sum_{i \in J} \phi_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_i \quad (3)$$

ここで $\phi_i(\mathbf{x})$ は通常の要素の定式化で用いられる内挿関数、 m は要素を構成する節点数である。さらに C はき裂先端近傍の変位の特異性を考慮する節点の集合、 J は C 以外でき裂の不連続面を考慮する節点の集合、 $\mathbf{u}_i$ 、 $\mathbf{c}_i^k$ 、 $\mathbf{b}_i$ はそれぞ

れ節点に割り付けられる節点自由度である。

$\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$) はき裂先端近傍における特異場を表す基底関数 (Crack Function) で、近似式がき裂先端近傍の要素内で式(1)および式(2)を最もよく表現するために、次の形で与えられる。

$$\gamma_1 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \gamma_2 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\ \gamma_3 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \gamma_4 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad (4)$$

ここで、 $\gamma_2(\mathbf{x})$ および $\gamma_4(\mathbf{x})$ における関数 $\sin(\theta/2)$ は $\theta = \pm \pi$ において不連続となっており、き裂の不連続面を考慮した関数であるといえる。

$H(\mathbf{x})$ はき裂近傍の変位の不連続性を表す基底関数 (Jump Function) として、次の形で与えられる。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Omega_+) \\ -1 & (\mathbf{x} \in \Omega_-) \end{cases} \quad (5)$$

ここで Ω_+ 、 Ω_- はそれぞれ不連続面上側、下側領域を表す。

また、X-FEM では上記したことにより節点ごとに自由度数が異なることとなる。

2.2 き裂および積分領域

き裂は入力データとして領域内のいくつかの点 (き裂点) を選び、それらを直線で結んだもの (き裂辺) として表現する。

X-FEM は一般の FEM と同様に仮想変位の原理により要素剛性マトリクスを計算し、それを組み合わせることで全体系剛性マトリクスを求め、境界条件を負荷することで節点自由度の値を求める。しかし、き裂を含んだ要素はその内部において被積分関数が不連続となるため、そのような要素は積分区間を分割し、別々に計算を行う必要がある。本研究の対象は破壊モード I を提供する単純な水平き裂を含むモデルに限られているため、本研究で用いた四角形要素はき裂により上下 2 個の長方形に分割される (図-1 参照)。また、き裂先端を含む要素内については、要素がき裂によりまだ分割されていないことから、き裂先端部を要素辺と交わるまで延長し、積分区間の分割を行なうものとする。き裂の進展はき裂先端に対応する実き裂点の先に新たな実き裂点を付加することにより表現する。

2.3 節点属性の配置

き裂周りの節点が式(3)におけるそれぞれの集合に属しているとき、節点は C 属性または J 属性であると言う。

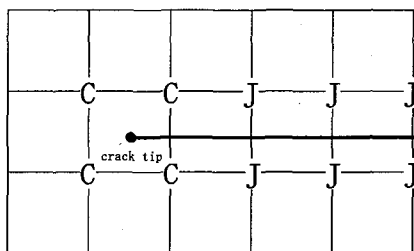


図-1 節点属性の配置

X-FEM では、節点属性の具体的な配置として、き裂先端を含む要素の全節点を C 属性、 C 属性以外でき裂を含む要素内の全節点を J 属性と決める必要がある。この節点属性の具体的な配置例を図-1に示す。

2.4 応力拡大係数の評価

ここでは代表的な応力拡大係数評価法の X-FEM への適用性の検討を行う。X-FEM の利点は要素のリメッシュ処理を避ける点にあり、き裂進展シミュレーションを行う際に最もその効果が発揮される。き裂進展方向の決定は各破壊モードに対応する応力拡大係数の比 K_I / K_{II} が必要となる。本論文における解析対象は破壊モード I の単独モードであるが、このような背景により、混合モードに対する一般の FEM 解析でエネルギー法により混合モードにおける応力拡大係数 K_I, K_{II} を評価する方法について検証を行う。

この混合モードにおける応力拡大係数 K_I, K_{II} を評価する方法はいくつか提案されているが、本研究ではこれらのうち、エネルギー法に基づいた評価方法と J 積分に基づいた評価方法それぞれの代表的な仮想き裂進展法 (VCEM : Virtual Crack Extension Method)^{3),9),7)} と、Yau らによって提案された M 積分を用いた方法^{9),9)} の二つの方法について X-FEM における適用性を検討した。

(1) VCEM (仮想き裂進展法)

VCEM はき裂の弾性解析を行うエネルギー法の一つで、全エネルギー法を改良した方法である。線形弾性体において、き裂が微小長さ δa だけ進展する際におけるエネルギー解放率 $\tilde{G}$ は、全ポテンシャルエネルギー Π の変化との関係より次式で計算される。

$$\tilde{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a} \quad (6)$$

$\mathbf{K}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ は系全体における剛性マトリクス、X-FEM 解析の節点変位ベクトルおよび荷重ベクトルである。き裂の仮想進展 δa に際して外力 $\mathbf{f}$ の変化は起きないものとし、式中の $\mathbf{K}$ のき裂長さによる微分を差分近似することで次式を得る。

$$\tilde{G} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{u} \quad (7)$$

$\delta \mathbf{K}$ はき裂の微小な進展 δa に伴う全体剛性マトリクスの変化であり、一般の FEM も含めて X-FEM で算出可能である。しかし、節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ の算出に関しては一般の FEM と X-FEM では大きく異なる。一般の FEM 解析では節点自由度ベクトルがそのまま節点変位ベクトルと一致するため、節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ の値は FEM 解析結果から要素節点変位として容易に求められる。一方、X-FEM の場合、式(3)に示すように X-FEM 解析における節点自由度ベクトル $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{c}_i^k$, $\mathbf{b}_i$ は直接式(7)の節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ を表すものではない。また、X-FEM では仮想き裂進展によってメッシュ形状が変化しないため、き裂先端の特異性を示す C 属性の節点を含んだ要素剛性成分だけが変化することとなる。しかし、式(4)でも明らかのように C 属性の節点を含む要素内変位は、付加された自由度 $\mathbf{c}_i^k$ を一定に保ったとしても、それに対応する内挿関数に含まれる $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$) がき裂先端からの距離 r の関数であるため、き裂の微小な進展と共に変化することになる。よって、VCEM では式(7)の節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ を一定に保つことはできないために、エネルギー解放率 $\tilde{G}$ を求めることができない。応力拡大係数を算出するためにはこのエネルギー解放率 $\tilde{G}$ を正確に評価することが必要であることから、この VCEM を X-FEM にそのまま適用することは困難となり、適用に当たっては高度な何らかの工夫が必要となる。

なお、X-FEM に関する従来の研究の中には、この VCEM を用いて応力拡大係数を求めているものがあるが^{3),9)}、上述で指摘した節点変位ベクトルの取り扱いについては具体的な説明がないため、その妥当性を評価することは困難である。

(2) M 積分法

M 積分法は Yau らによって提案された、 J 積分を用いて応力拡大係数 K_I, K_{II} を評価する手法である。

き裂先端近くにおける J 積分は次式で示される。また線形弾性体において J 積分はエネルギー解放率 $\tilde{G}$ に等しい。

$$J = \tilde{G} = \int_{\Gamma} \left[W n_x - t_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - t_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] d\Gamma \quad (8)$$

ここで Γ はき裂先端を内部に含んだ積分経路、 W はひずみエネルギー密度、 n_x および n_y はそれぞれ Γ 上の単位法線ベクトルの x, y 成分、 t_i はけん引力ベクトル、 u_i は変位ベクトルのそれぞれ x, y 成分である。

M 積分法は実問題と、き裂先端周辺の積分経路内部において応力拡大係数の理論解と変位場および応力場が既知である参照問題とを重ね合わせることで、混合モードにおける変位、応力を各モードに分離するというものである。以下、参照問題の各パラメータおよび変数には添え字 aux を付加したもので表す。

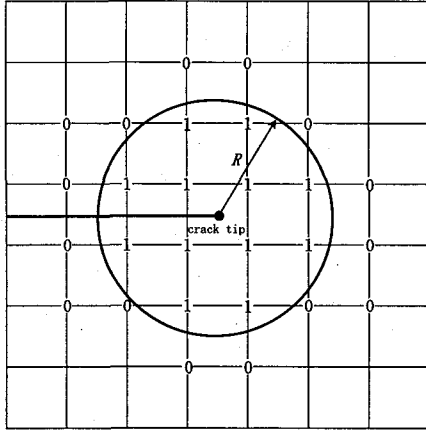


図-2 J 積分経路 および 各節点における q の値

重ね合わせた問題全体での J 積分を J^{total} と定義し、以下の式で与える。

$$\begin{aligned} J^{total} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ (K_I + K_I^{aux})^2 + (K_{II} + K_{II}^{aux})^2 \right\} \\ &= J + J^{aux} + \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで M 積分を次のように定義する。

$$\begin{aligned} M &= \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \\ &= J^{total} - J - J^{aux} \end{aligned} \quad (10)$$

よって M 積分は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} n_x - \right. \\ &\quad \left. - \left(t_x \frac{\partial u_x^{aux}}{\partial x} + t_y \frac{\partial u_y^{aux}}{\partial y} + t_x^{aux} \frac{\partial u_x}{\partial x} + t_y^{aux} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、実問題における応力拡大係数 K_I および K_{II} は、2 個の参照問題、つまり応力拡大係数を $K_I^{aux} = 1$, $K_{II}^{aux} = 0$ とした場合および、 $K_I^{aux} = 0$, $K_{II}^{aux} = 1$ とした場合のそれぞれについて M 積分を計算することにより評価することができる。

以上の理論に基づいた J 積分および M 積分は線積分で示されているが、解析のアルゴリズムを簡単にするため、Shih らの方法により面積分へ変換する。 J 積分の面積分への変換を次式に示す。

$$\begin{aligned} J &= \int_A \left\{ \left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{\partial q}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial y} \right\} dA \end{aligned} \quad (12)$$

同様に M 積分も次式のように変換される。

$$\begin{aligned} M &= \int_A \left\{ \left(\sigma_x^{aux} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy}^{aux} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. + \sigma_x \frac{\partial u_x^{aux}}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y^{aux}}{\partial x} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{\partial q}{\partial x} \\ &\quad + \left(\tau_{xy}^{aux} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y^{aux} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \frac{\partial u_y^{aux}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y^{aux}}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial y} \right\} dA \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)、式(13)両式における $q(\mathbf{x})$ は重み関数であり、 A は試験片の全領域である。また、 $q(\mathbf{x})$ は線積分における積分経路 Γ で囲まれたき裂を含む領域で 1、その外部で 0 となる。

この手法による解析はき裂を含む要素における面積分で応力・ひずみの不連続性を考慮する必要がある以外は、X-FEM の特殊性による影響を受けることなく、適用することが可能である。よって、本研究ではこの手法によって応力拡大係数の評価を行うものとする。

プログラムへの M 積分法の導入において、 J 積分経路は対応するき裂先端からある一定距離 R の円周とする。 $q(\mathbf{x})$ は J 積分経路の内部にある節点において 1、外部の節点において 0 と決める。積分経路の決定および各節点における $q(\mathbf{x})$ の値の例を図-2 に示す。また、要素内の $q(\mathbf{x})$ の値については一般の FEM 解析に用いる内挿関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ を用いて次式で定める。

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) q_i \quad (14)$$

ここで、 q_i は節点 i における $q(\mathbf{x})$ の値である。

3. 解析結果および検証

本節では X-FEM の理論に基づき作成したプログラムを用いて、 M 積分を用いた方法により、代表的ないくつかのモデルについて応力拡大係数の評価検証を行い、さらにき裂の進展過程における応力拡大係数のき裂進展毎の精度評価を行い、考察を行う。解析対象はすべて平面ひずみを仮定しており、荷重はすべて静的である。

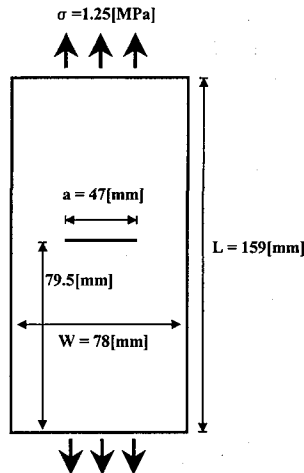


図-3 内部き裂を有する帯板の引張試験（モデル1）
における試験片形状

3.1 破壊力学パラメータの評価精度

ここでは、破壊力学において最も基本となる破壊モードⅠを提供し、あらかじめ応力拡大係数の理論値を求めることが可能な4種類のモデルを扱う。なお、応力拡大係数の解析値に影響を与える剛性マトリクス計算の際の積分点数およびJ積分経路をパラメータとし、4種類のモデルを用いて破壊モードⅠの総合的な検証を行う。なお、き裂先端の位置は全てのモデルについて要素の中心とした。以下では、まず4種類のモデルについて、理論値により正規化された解析値の精度評価結果とy方向応力場に関する解析結果をそれぞれ示す。次にこれら4種類のモデルの検証結果についてまとめて考察する。なお、以上の解析を進める前に、要素サイズによる解析精度への影響を調べる予備解析として、以下の(1)節に示す最も代表的なモデル1を用いて検証を行い、要素サイズに関する結果をモデル2以降に反映させる。

(1) 内部き裂を有する帯板の引張試験（モデル1）

本試験の試験片形状を図-3に示す。材料定数は、ヤング率： $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比： $\nu=0.3$ とし、試験片寸法を、長さ： $L=159\text{mm}$ 、幅： $W=78\text{mm}$ として荷重は上下面の引張方向に一樣に $\sigma=1.25\text{MPa}$ の静的荷重を与えた。なお、要素サイズの解析精度への影響を調べる予備解析では、3種類の基本要素サイズ1.0mm、3.0mm、5.0mm四方の正方形とした。なお、試験片寸法に対し全て均等な要素サイズを用いる事が困難な場合は、境界に接する要素の寸法を調節するものとする。き裂は試験片の中心に幅方向に長さ $2a=47\text{mm}$ とした。本試験は純粋モードⅠ破壊の場合についての検証であり、要素数は要素サイズに応じてそれぞれ496、1484、12402である。また解析値との比較検証に用いる理論値⁴⁵⁾を次式により求める。なお、この理論値は厳密解ではなく、基本的には多項式展開に基づいた近似値

表-1 内部き裂を有する帯板の引張試験（モデル1）の
正規化された K_I の値のJ積分経路による比較

J積分経路(半径[mm])			
2.0	4.0	6.0	8.0
0.9960	0.9956	0.9956	0.9956

(積分点次数は4)

表-2 内部き裂を有する帯板の引張試験（モデル1）の
正規化された K_I の値の積分点次数による比較

要素マトリクス計算の積分点次数			
2	3	4	5
1.0127	0.9816	0.9956	0.9952

(J積分経路は6.0)

表-3 内部き裂を有する帯板の引張試験（モデル1）の
正規化された K_I の値の要素サイズによる比較

基本要素辺長[mm]		
1.0	3.0	5.0
0.9960	0.9846	0.9737

(積分点次数は4、J積分経路は6.0)

である。モデル1以降の各モデルの理論値も同様な近似値である。 $\xi=2a/W$ とおくと、

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi)$$

$$F(\xi) = (1.0 - 0.50\xi + 0.37\xi^2 - 0.044\xi^3) / \sqrt{1-\xi} \quad (19)$$

表-1、表-2、表-3に理論値により正規化された解析値の検証結果、また図-4に剛性マトリクスの計算過程における要素サイズ1mmで積分点を4次とした解析によるy方向応力分布を示す。なお、表-3の要素サイズに関する予備解析の結果から、要素サイズの解析精度への影響は通常のFEMと同様に要素サイズが小さいほど精度が高いことが判明した。このため、これ以降の解析モデルの要素サイズを誤差1%以下の高精度が検証された1mmとする。

(2) 両側き裂を有する帯板の引張試験（モデル2）

本試験の試験片形状を図-5に示す。材料定数は前項と同様のものを使用する。試験片寸法は、長さ： $L=159\text{mm}$ 、幅： $W=78\text{mm}$ として荷重は上下面の引張方向に一樣に $\sigma=1.25\text{MPa}$ の静的荷重を与えた。なお、要素は1.0mm四方の正方形とした。き裂は試験片の両側面の中央に長さ $a=12.5\text{mm}$ とした。本試験は純粋モードⅠ破壊の場合についての検証であり、要素数は12402である。また解析値との比較検証に用いる理論値⁴⁵⁾を次式により求める。

$\xi=2a/W$ とおくと、

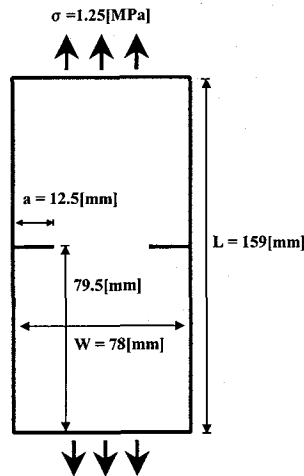


図-5 両側き裂を有する帯板の引張試験 (モデル2) における試験片形状

表-4 両側き裂を有する帯板の引張試験 (モデル2) の正規化された K_I の値の J 積分経路による比較

J 積分経路 (半径 [mm])			
2.0	4.0	6.0	8.0
0.9933	0.9931	0.9932	0.9932

(積分点次数は 4)

表-5 両側き裂を有する帯板の引張試験 (モデル2) の正規化された K_I の値の積分点次数による比較

要素マトリクス計算の積分点次数			
2	3	4	5
0.9965	0.9831	0.9932	0.9930

(J 積分経路は 6.0)

表-4, 表-5 に理論値により正規化された解析値の検証結果, また図-6 に剛性マトリクスの計算過程における積分点を 4 次とした解析による y 方向応力分布を示す。

(3) 縁き裂を有する帯板の引張試験 (モデル3)

本試験の試験片形状を図-7 に示す。材料定数は前項と同様のものを使用する。試験片寸法は, 長さ: $L=119\text{mm}$, 幅: $W=59\text{mm}$ とし, 荷重は上下面の引張方向に一樣に応力: $\sigma=1.25\text{MPa}$ の静的荷重を与えた。なお, 要素は 1.0mm 四方の正方形とし, 要素数は 7021 である。本試験は純粋モード I 破壊の場合の検証であり, き裂は左側縁より $a=19.5\text{mm}$ とした。解析値との比較検証に用いる理論値^{4,5)}

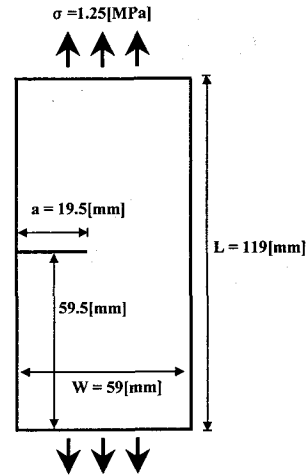


図-7 縁き裂を有する帯板の引張試験 (モデル3) における試験片形状

表-6 縁き裂を有する帯板の引張試験 (モデル3) の正規化された K_I の値の J 積分経路による比較

J 積分経路 (半径 [mm])			
2.0	4.0	6.0	8.0
0.9924	0.9919	0.9919	0.9919

(積分点次数は 4)

表-7 縁き裂を有する帯板の引張試験 (モデル3) の正規化された K_I の値の積分点次数による比較

要素マトリクス計算の積分点次数			
2	3	4	5
1.0012	0.9651	0.9919	0.9915

(J 積分経路は 6.0)

を次式により求める。 $\xi=a/W$ とおくと,

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi)$$

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \tan \frac{\pi \xi}{2} \left(\frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\{1 - \sin(\pi \xi / 2)\}^3}{\cos(\pi \xi / 2)} \right)}$$

(21)

表-6, 表-7 に理論値により正規化された解析値の検証結果, また図-8 に剛性マトリクスの計算過程における積分点を 4 次とした解析による y 方向応力分布を示す。

(4) 縁き裂を有する帯板の単純曲げ試験 (モデル4)

本試験の試験片形状を図-9 に示す。材料定数は前項と同様のものを使用する。試験片寸法は, 長さ: $L=119\text{mm}$, 幅: $W=59\text{mm}$ とし, 荷重は上下面に外皮曲げ応力: $\sigma_0=1.25\text{MPa}$ の静的な曲げ荷重を与えた。なお, 要素は

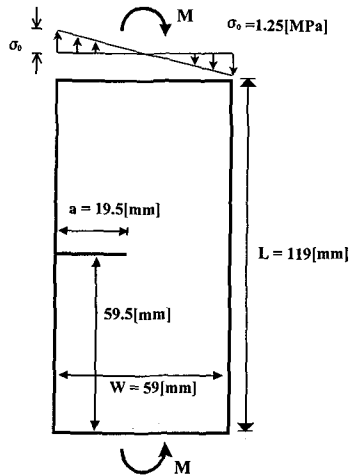


図-9 縁き裂を有する帯板の単純曲げ試験 (モデル4) における試験片形状

1.0mm 四方の正方形とし、要素数は7021である。本試験は純粋モードI破壊の場合の検証であり、き裂は左側縁より $a=21.5\text{mm}$ とした。解析値との比較検証に用いる理論値⁴⁾を次式により求める。 $\xi=a/W$ とくと、

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F(\xi)$$

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \tan \frac{\pi \xi}{2} \left(\frac{0.923 + 0.199 \{1 - \sin(\pi \xi / 2)\}}{\cos(\pi \xi / 2)} \right)^4} \quad (22)$$

表-8, 表-9 に理論値により正規化された解析値の検証結果, また図-10 に剛性マトリクス計算過程における積分点を4次とした解析による y 方向応力分布を示す。

(5) 評価精度のまとめ

最も基本的な破壊モードIを提供する4種類のモデルについて総合的な検証評価を行った。モデル1を用いた予備解析で最も高精度が確認された要素サイズ1mmを用いて解析を行った結果、モデル1~4 全てにおいて同様の傾向が見られた。すなわち、 J 積分経路については半径が2.0mm以上であれば、応力拡大係数の解析値はその半径に依存せず誤差0.85%以内の安定した精度となることが確認できた。また、剛性マトリクス計算の際の積分点次数による比較においては、積分点次数4と5では4種類のモデル全てで応力拡大係数の解析値がほぼ同一の精度を示した。これにより、積分点次数が4以上では応力拡大係数の解析値は収束することが確認できた。

3.2 き裂進展過程における解析検証 (3点曲げ試験)

ここではき裂の進展過程における応力拡大係数の精度評価を行う。図-11 に本試験の試験片形状および検証に用

表-8 縁き裂を有する帯板の単純曲げ試験 (モデル4) の正規化された K_I の値の J 積分経路による比較

J 積分経路(半径[mm])			
2.0	4.0	6.0	8.0
0.9938	0.9930	0.9929	0.9928

(積分点次数は4)

表-9 縁き裂を有する帯板の単純曲げ試験 (モデル4) の正規化された K_I の値の積分点次数による比較

要素マトリクス計算の積分点次数			
2	3	4	5
1.0025	0.9648	0.9929	0.9924

(J 積分経路は6.0)

いる x, y 座標を示す。材料定数は前節と同様のものを使用する。試験片寸法は、長さ: $S=160\text{mm}$ 、幅: $W=40\text{mm}$ とし、き裂は試験片下部より2.5mmとする3点曲げ試験である。なお、要素は両端に位置するものは $1.5\text{mm} \times 1.0\text{mm}$ の長方形、他は1.0mm 四方の正方形とし、要素数は6360である。荷重は $P=5.0\text{MN/m}$ の静的荷重を試験片上部より与え、載荷位置はき裂直下であるとする。また、前節の結果を受け、剛性マトリクス計算の際の積分点数は4、 J 積分経路の半径は2.0mmとする。進展距離は $\Delta a=4.43\text{mm}$ をステップ幅とした。

図-12 にき裂の進展経路およびそれに伴う最大主応力分布の変化を示す。モードI単独の破壊が起こり、き裂が直進していく様子を確認できた。

また、次式に3点曲げ試験における応力拡大係数の理論式⁴⁾を示す。 $\xi=a/W$ 、 $\sigma_0=3SP/2W^2$ とくと、

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F(\xi)$$

$$F(\xi) = 1.090 - 1.735\xi + 8.20\xi^2 - 14.18\xi^3 + 14.57\xi^4 \quad (23)$$

なお、この理論式は $\xi \leq 0.60$ に対し有効である。図-13 にこの ξ の範囲における、き裂進展に伴う解析値の理論値により正規化された応力拡大係数の推移を示す。 K_I に対する評価では、き裂長さが短い $a=2.5\text{mm}$ の時に誤差3.0%、あるいは長い $a \geq 22.5\text{mm}$ ($\xi \geq 0.563$) の時に誤差1.8%と理論値との誤差がわずかに大きくなるものの、き裂進展中におけるそれ以外のすべての範囲で誤差1.6%未満の高精度を得た。しかし、この高精度な範囲内で精度のばらつきが多少発生していることが確認できた。この原因として、き裂先端位置の変化に伴う節点属性の配置の変化、あるいは用いる内挿関数による近似精度の要素内の位置による変化等が考えられる。しかし、この誤差のばらつきは十分に小さく、モードIの単独破壊モードに対するき裂進展シミュレーションに対し、高精度な解析が可能であることが

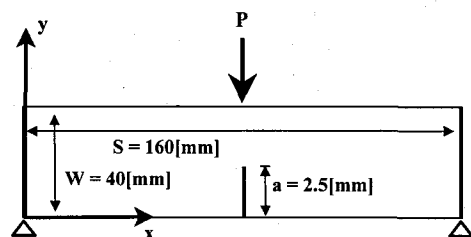


図 - 11 縁き裂を有する帯板の 3 点曲げ試験における試験片形状および座標

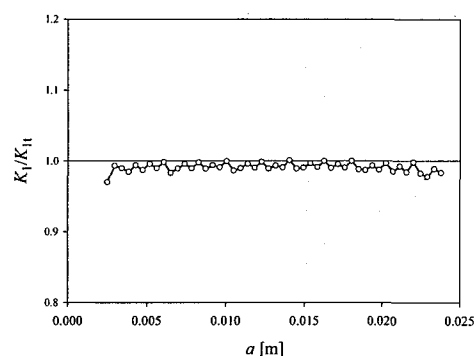


図 - 13 き裂進展に伴う解析値の理論値により正規化された応力拡大係数 K_I の推移

確認できた。

4. 結論および今後の課題

4.1 結論

本論文では、応力拡大係数に関する評価方法の X-FEM への適用性の検討、各種のき裂モデルを用いた破壊モード II に関する総合的な精度検証、およびき裂進展中における応力拡大係数 K_I の精度検証を行い、以下の結論を得た。

(1) 代表的な 2 種類の応力拡大係数評価方法の X-FEM への適用性の検討を行った。その結果、仮想き裂進展法 (VCEM : Virtual Crack Extension Method) は、FEM 解析に一般的に広く用いられているが、この方法をそのまま適用することは困難であり、適用に当たっては何らかの工夫が必要となる。M 積分法は、き裂を含む要素における面積分で応力・ひずみの不連続性を考慮する必要がある以外は、X-FEM の特殊性による影響を受けることなく適用することが可能である。

(2) 要素サイズの解析精度への影響を評価するために、破壊モード I の最も代表的な内部き裂を有する解析モデルを用いて解析を行った結果、従来の FEM と同様に要素サイズが小さいほど精度が高いことが判明した。

(3) 破壊力学で最も代表的な破壊モード I を提供する 4 種類のモデルを用いて、剛性マトリクス計算の際の積分点次数および J 積分経路をパラメータとして、X-FEM による応力拡大係数の精度評価を総合的に検証した。その結果、J 積分経路の半径が 2mm 以上であれば、その半径に依存せず高精度な解析結果を得た。積分点次数に関しては、積分点次数 4 以上で安定な解析結果を得た。以上のように、X-FEM による破壊モード I への適用性を各種モデルを用いて総合的に検証した結果、X-FEM により破壊力学の高

精度な評価が可能であることが確認された。

(4) 3 点曲げ試験条件の下で、X-FEM によりモデル化されたき裂の進展過程における応力拡大係数の精度評価をき裂進展毎に行った結果、き裂進展の初期と終盤付近で多少誤差が大きくなったものの、この部分を除いたほとんどのき裂進展範囲で高精度な解析結果を得た。しかし、この高精度な解析結果の範囲内で精度のばらつきが多少発生していることが確認できた。この原因として、き裂先端位置の変化に伴う節点属性の配置の変化、用いる内挿関数による近似精度の要素内のき裂先端位置による変化が考えられる。しかし、その誤差のばらつきは十分に小さく、高精度な解析が可能であることが確認できた。

4.2 今後の課題

本研究における解析対象は、直線き裂を含み、単独破壊モード I を提供するモデルのみであった。しかし、破壊力学の二次元問題として本来考慮しなければならないのはモード I、II の混合モードである。混合モードにおけるき裂の進展経路は曲線となる。ところで、C 属性節点に付加される関数 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$) は、き裂先端に十分近い範囲での理論解の特異性を考慮していることから、き裂が直線であると仮定した関数である。すなわち、式(4)および式(5)より明らかなように、き裂が曲線である時、C 属性節点および J 属性節点の両方を含む要素について、それぞれの属性節点に対する付加される関数の不連続面は異なったものとなってしまい、正確に要素内のき裂を近似表現することができない。この解決には、C 属性節点についてのき裂の不連続面を J 属性節点のものと一致するよう写像関数を用いて関数を曲線き裂に対応できるように書き換える必要がある。今後、X-FEM の実用化に向けて、まだ研究が不十分と思われるモード I とモード II の混合モードを含めた一般的な曲線き裂に関する X-FEM の破壊力学への適用性について総合的な精度検証を行う予定である。

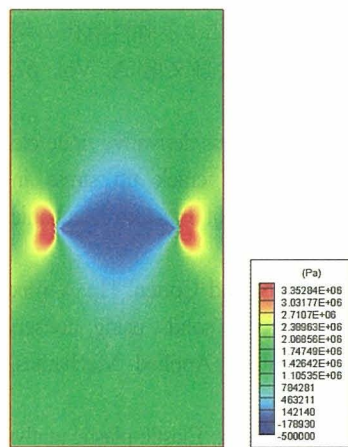


図 - 4 内部き裂を有する帯板の引張試験
(モデル1) による y 方向応力分布

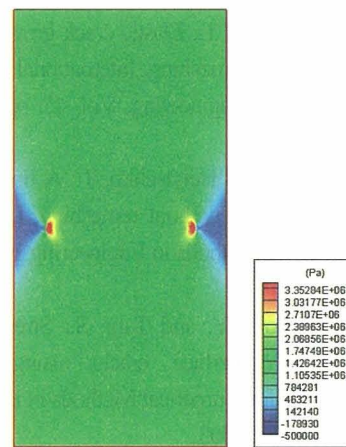


図 - 6 両側き裂を有する帯板の引張試験
(モデル2) による y 方向応力分布

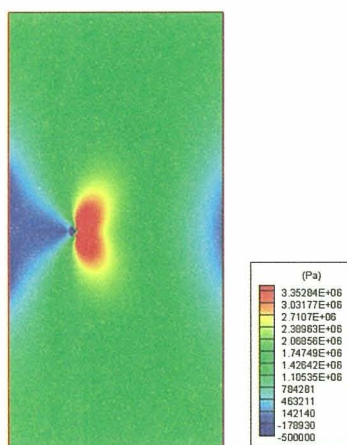


図 - 8 縁き裂を有する帯板の引張試験
(モデル3) による y 方向応力分布

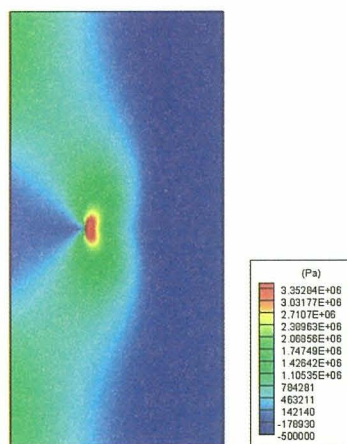
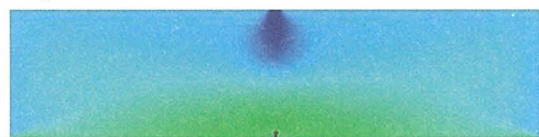


図 - 10 縁き裂を有する帯板の単純曲げ試験
(モデル4) による y 方向応力分布

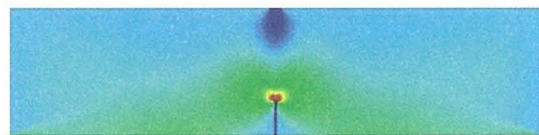
Step1



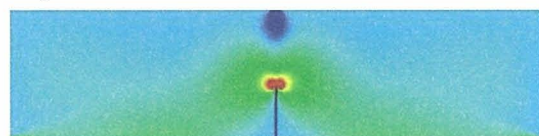
Step11



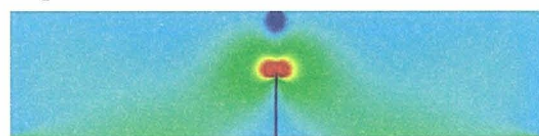
Step21



Step31



Step41



Step51

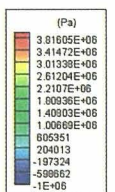
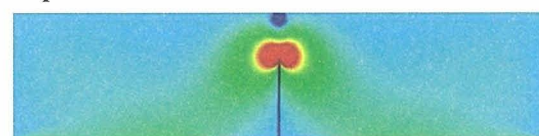


図 - 12 き裂の進展経路およびそれに伴う
最大主応力分布の変化

参考文献

- 1) Belytschko, T. and Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 602-620, 1999.
- 2) Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150, 1999.
- 3) Nagashima, T., Omoto, Y. and Tani, S.: Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 1151-1173, 2003.
- 4) 矢川元基: 破壊力学 理論解析から工学的応用まで, 培風館, pp. 11-35, 229-254, 1988.
- 5) 白鳥正樹, 三好俊郎, 松下久雄: 数値破壊力学, 実教, pp. 8-32, 48-77, 1980.
- 6) 長嶋利夫: X-FEM による弾性解析の精度についての検討, *日本機械学会論文集 A*, Vol. 67, No. 662, pp. 1569-1575, 2001.
- 7) Parks, D.M.: A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 10, pp. 487-502, 1974.
- 8) Yau, J., Wang, S. and Corten, H.: A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341, 1980.
- 9) Shih, C. and Asaro, R.: Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I-small scale yielding, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 299-316, 1988.

(2006年4月13日 受付)