

一般化収束論による平板構造に対する非線形均質化理論の適用

An Application of Nonlinear Homogenization Theory to Plate Structures
by the Generalized Convergence Theory

斉木 功*, 本田宏孝**, 岩熊哲夫***, 中島章典****

Isao SAIKI, Hirotaka HONDA, Tetsuo IWAKUMA and Akinori NAKAJIMA

*正会員 博(工) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**学生員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***正会員 Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

****正会員 工博 宇都宮大学大学院教授 工学研究科情報制御システム科学専攻 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

On an application of relatively flexible planar cellular solids subjected to out-of-plane deformation such as fabric and grid, geometrical nonlinearity should be considered. In such cases, it is impractical to construct phenomenological constitutive relationships because of their complex nature of mechanical properties of the cellular solids. In this context, we have formulated a linear multiscale method for the cellular solids by the generalized convergence theory to construct homogenized plate bending stiffness. Based on the linear multiscale method, we here develop a nonlinear multiscale analysis of plate structures for the planar cellular solids.

Key Words : multiscale method, nonlinear homogenization theory, plate structures, planar cellular solids

1. はじめに

セル構造体は線や面によって閉ざされたセルの集合体であり、剛性や強度の低下を最小限に抑えつつ、重要でない部分の材料を削り落とした機能性材料である。空隙を異種材料と考えれば複合材料と捉えることもでき、セルの幾何形状や空隙率などを制御することにより、必要な性能を持つ材料を設計することが可能である。骨や木などは自然界に存在するセル構造体であり、生物の進化の過程である種の最適化がなされた構造材料と考えることができる。

セル構造体の工学における用途は多様であり、古くから様々な研究¹⁾がなされている。その中でも、平面セル構造体は、布、網や繊維補強板といった形で広く用いられている。繊維補強プラスチックのような形で用いる場合には、剛性が高いため幾何学的な非線形性が問題となる場合は稀であるが、布や網といった比較的柔らかいセル構造体は、強度に達するまでに大きな変形を生じる。このようなセル構造体の大変形を考えなければならない場合、強い異方性や座屈による不安定化などの複雑な現象が相互に影響を及ぼすため、材料としての応答を非線形領域まで含めて現象論的にモデル化することは、一般に困難である。本論文では、大きな面外変形を受け、幾何学的非線形性が無視できない比較的柔な平面セル構造体を対象とする。

著者らは、非線形均質化理論²⁾に基づき、セル構造体の連続体としての力学特性を代表体積要素を対象としたミクロスケール解析により非現象論的にモデル化する

非線形マルチスケール解析手法を提案した³⁾。さらに、ミクロスケール解析において、骨組要素の使用を可能とする定式化を示し^{4),5)}、マルチスケール解析の効率化を行ってきた。さらに、布や網といった、微視構造の大きさに比べて厚さが薄く、曲げを受ける平面セル構造体を均質な平板としてモデル化する線形マルチスケール解析⁶⁾の定式化を行った。

平板の支配方程式は、はりと類似の構造を有する4階の微分方程式である。はりや平板といった構造部材に対する均質化理論の適用は、主に2通りのアプローチが考えられる。1つは連続体の2階微分方程式に均質化理論を適用し、連続体によりモデル化したミクロスケール問題に Bernoulli-Euler の仮定などに基づくはりや平板の運動場を導入する方法。もう1つは4階の微分方程式に均質化理論を適用する方法である。前者のアプローチによる研究としては、高野ら⁷⁾のサンドイッチ板の解析や岡田ら⁸⁾によるはり・薄板構造の解析が挙げられるが、いずれも線形解析にとどまっている。後者のアプローチによる研究としては、特にセル構造体を対象としてはいないが、Kohn and Vogelius⁹⁾の漸近展開法に基づく定式化や、はりに対しては京谷・寺田¹⁰⁾による漸近展開法に基づく定式化が発表されている。セル構造体、あるいは格子状構造に対する均質化理論の適用は、同じく漸近展開法に基づき、Moreau and Caillerie¹¹⁾、Tollenaere and Caillerie¹²⁾によって示されている。しかしながら、これらの文献では、少なくとも微視問題については全て線形問題のみを扱っている。本論文は、対象とする構造に照

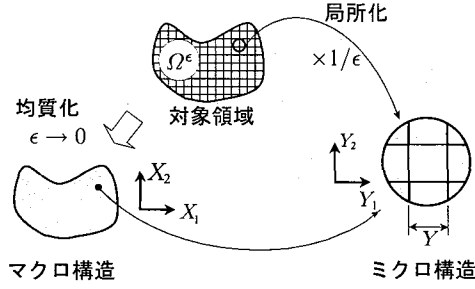


図-1 平面セル構造体

らし合わせ、後者のアプローチを取り、これを非線形問題へ拡張することを目的とする。

漸近展開法に基づく定式化は線形問題においては簡便であるが、非線形解析への拡張を考えると、漸近展開の収束性の保証および形式的で簡潔な定式化が可能となるといった利点から、一般化収束論に基づく定式化が望ましい¹³⁾。著者らは、線形問題の範疇ではあるが、一般化変分原理によりたわみとたわみ角をそれぞれ独立変数とした汎関数を定義し、一般化収束論によるマルチスケール解析の定式化を行った⁶⁾。本論文では、これを拡張し、曲げを受ける平面セル構造体の非線形マルチスケール解析の定式化を行う。また、正方形および正六角形弾性セル構造体を対象として、マクロ変形を仮定した非線形ミクロスケール解析を行い、幾何学的非線形性に起因する特徴的な非線形曲げモーメント-曲率関係を示す。

2. 一般化収束論による平板の2変数境界値問題の定式化

図-1に示すように、 ϵY の周期を有する非均質断面からなる平板を解析対象とする。図中、 Y として示された領域が $1/\epsilon$ 倍され拡大された微視構造であり、もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる。ここで、 ϵ は十分小さな値とするが、微視構造の大きさ ϵY は平板の平均的な板厚よりも大きいと仮定する。この仮定から、対象とする平板は領域に比較して非常に薄く、かつ微視構造内の板厚変化は緩やかであるので、平板をKármánの仮定にしたがう薄肉平板¹⁴⁾とみなすことができる。そこで、著者らの文献⁶⁾で示したKirchhoffの平板に対する一般化収束論に基づく線形2変数境界値問題の定式化を拡張し、Kármánの平板に対する非線形2変数境界値問題の定式化を示す。

2.1 問題設定

対象とする平板の面内および面外方向の釣合式は、それぞれ

$$\nabla \cdot \mathbf{N} + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \nabla : \mathbf{M} - \mathbf{q} - \mathbf{N} : \nabla \nabla w + \mathbf{f} \cdot \nabla w = 0 \quad (2)$$

である。ここに、 $\mathbf{N}$ は面内力テンソル、 $\mathbf{f}$ は面内分布外力、 $\mathbf{M}$ は曲げモーメントテンソル、 $\mathbf{q}$ は面外分布外力、 w は面外変位(以後、たわみと呼ぶこととする)、 ∇ は面内の勾配を取る演算子である。釣合式(1)、(2)と適切な境界条件と等価な変分問題は、以下のポテンシャルエネルギー汎関数

$$\pi := \int_{\Omega} W^m(\nabla \mathbf{u}, \nabla w) + W^b(\nabla \nabla w) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + q w d\Omega \quad (3)$$

を最小化する問題となる。ここに、 Ω は対象とする平板の中立面を含む領域、 W^m, W^b はひずみエネルギー密度関数であり、それぞれ面内力-面内ひずみ関係

$$\mathbf{N} = \frac{\partial W^m}{\partial \left(\nabla \mathbf{u} + \frac{\nabla w \otimes \nabla w}{2} \right)} \quad (4)$$

および曲げモーメント-曲率関係

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W^b}{\partial \nabla \nabla w} \quad (5)$$

を規定するものとする。

2.2 一般化収束論による定式化

一般化(Γ -)収束論²⁾によると、パラメタ ϵ を持つ非凸汎関数

$$\pi(v) := \int W(\nabla_x v^0) d\Omega$$

は $\epsilon \rightarrow 0$ において、均質化汎関数

$$\pi^H(v) := \int W^H(\nabla_x v^0) d\Omega \quad (6)$$

に Γ -収束する。ここに、 v は汎関数の独立変数、 W は汎関数の被積分関数であり、ここではひずみエネルギー密度関数、 W^H は

$$W^H(\nabla_x v^0) := \inf_N \inf_{v^1} \langle W(\nabla_x v^0 + \nabla_y v^1) \rangle \quad (7)$$

により定義される均質化ひずみエネルギー密度関数である。また同時に、 ∇v は $\epsilon \rightarrow 0$ において $\nabla_x v^0 + \nabla_y v^1$ に収束することが知られている。さらに、 $\langle \bullet \rangle$ は

$$\langle \bullet \rangle := \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet dY \quad (8)$$

で定義される代表体積要素 Y における体積平均、 v^0 はマクロスケール変数、 v^1 は代表体積要素 Y における周期性(Y 周期性)を有するミクロスケール変数である。ここで、汎関数の凸性保証されない場合、代表体積要素 Y は N 個の単位周期構造(ユニットセル)で構成される必要があるが、 N の具体的な決定方法については著者らの文献³⁾に譲り、ここでは問題に応じて適切な数を仮定することとする。

一般化収束論は、対象とする汎関数に独立変数の2階導関数が含まれる場合の適用性は自明ではない。この問題に対し、著者らの文献⁶⁾では、一般化変分原理に基づき、たわみの1階導関数であるたわみ角を独立変数と

し、たわみとたわみ角の関係を Lagrange 未定定数法により組み込んだ汎関数を定義し、一般化収束論を適用する定式化が示された。ここでも同じ方針で、たわみ w とたわみ角 θ の関係

$$\theta = \nabla w \quad (9)$$

を拘束条件とし、Lagrange 未定定数法により、この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\begin{aligned} \Pi := & \int_{\Omega} W^m(\nabla u, \theta) + W^b(\nabla \theta) \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} f \cdot u + q w \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla w - \theta) \, d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

を定義する。これにより、平板の境界値問題は、汎関数 (10) を停留させる問題となる。この汎関数の独立変数は u, θ, w, Q であり、 Q は未定定数である。この汎関数 Π の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限、すなわち均質化汎関数 Π^H は

$$\begin{aligned} \Pi^H = & \int_{\Omega} W^{mH}(\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1, \theta^0) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} W^{bH}(\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1) \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot u^0 + \tilde{q} w^0 \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 - \theta^0) \, d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、 W^{mH} および W^{bH} はそれぞれ、式 (7) に基づいて定義される面内および面外変形に起因する均質化ひずみエネルギー密度関数、 $\tilde{f} := \langle f \rangle$, $\tilde{q} := \langle q \rangle$, u^0 および u^1 はマクロおよびミクロスケール面内変位、 w^0 および w^1 はマクロおよびミクロスケールたわみ、 θ^0 は全たわみ角、 θ^1 はミクロスケールたわみ角、 Q^0 は全せん断力を意味する未定定数である。後述するように、 θ^0 および Q^0 はマクロ、ミクロ両スケールに依存するため、ここではそれぞれ全たわみ角、全せん断力と呼んでいる。このとき、面内ひずみ ∇u 、たわみ角 ∇w 、曲率 $\nabla \theta$ は、それぞれ

$$\nabla u \rightarrow \nabla_x u^0 + \nabla_y u^1 \quad (12)$$

$$\nabla w \rightarrow \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 \quad (13)$$

$$\nabla \theta \rightarrow \nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1 \quad (14)$$

に収束することが一般化収束論により保証される。

均質化汎関数の停留条件は

$$\begin{aligned} \delta \Pi^H = & \int_{\Omega} \langle N^0 : (\nabla_x \delta u^0 + \nabla_y \delta u^1) \rangle \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle N^0 : (\theta^0 \otimes \delta \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle M^0 : (\nabla_x \delta \theta^0 + \nabla_y \delta \theta^1) \rangle \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \delta u^0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{q} \delta w^0 \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 - \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle Q^0 \cdot (\nabla_x \delta w^0 + \nabla_y \delta w^1 - \delta \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ = & 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここに、 N^0 は全面内変形 $\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1 + \frac{1}{2} \theta^0 \otimes \theta^0$ に対する面内力、 M^0 は全曲率 $\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1$ に対する曲げモーメントである。上式を各独立変数の変分について整理すると

$$\int_{\Omega} \langle N^0 : \nabla_x \delta u^0 \rangle \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \delta u^0 \, d\Omega = 0 \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \langle N^0 : \nabla_y \delta u^1 \rangle \, d\Omega = 0 \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} \langle N^0 : (\theta^0 \otimes \delta \theta^0) + M^0 : \nabla_x \delta \theta^0 + Q^0 \cdot \delta \theta^0 \rangle \, d\Omega = 0 \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{q} \delta w^0 + \langle Q^0 \cdot \nabla_x \delta w^0 \rangle \, d\Omega = 0 \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} \langle \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 - \theta^0) \rangle \, d\Omega = 0 \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \langle M^0 : \nabla_y \delta \theta^1 \rangle \, d\Omega = 0 \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} \langle Q^0 \cdot \nabla_y \delta w^1 \rangle \, d\Omega = 0 \quad (22)$$

を得る。

2.3 マクロスケール問題

代表体積要素における平均量を意味する表記 $\bar{\bullet} = \langle \bullet \rangle$ を f, q 以外にも用いると、式 (16) は

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} \tilde{N} : \nabla_x \delta u^0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \delta u^0 \, d\Omega \\ = & \int_{\partial\Omega} \delta u^0 \cdot (n \cdot \tilde{N}) \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla_x \cdot \tilde{N} + \tilde{f}) \cdot \delta u^0 \, d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

と表すことができる。上式は平面問題のマクロスケール釣合式であり、最右辺第 1 項は面内力に関する境界条件、第 2 項は面内力の釣合を意味する。

式 (20) より

$$\theta^0 = \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1, \quad \tilde{\theta} = \nabla_x w^0 \quad (24)$$

を得る。上式は、全回転角 θ^0 がマクロたわみ角とミクロたわみ角の和となること、および、平均たわみ角がマクロたわみ角と一致することを意味する。

式 (18) より

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} \langle N^0 : (\theta^0 \otimes \delta \theta^0) \\ & + M^0 : \nabla_x \delta \theta^0 + Q^0 \cdot \delta \theta^0 \rangle \, d\Omega \\ = & \int_{\Omega} (\tilde{N} \cdot \tilde{\theta}) \cdot \delta \tilde{\theta} + \tilde{M} : \nabla_x \delta \tilde{\theta} + \tilde{Q} \cdot \delta \tilde{\theta} \, d\Omega \\ = & \int_{\partial\Omega} \delta \theta^0 \cdot (n \cdot \tilde{M}) \, d\partial\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left(\nabla_x \cdot \tilde{M} - \tilde{Q} - \tilde{N} \cdot \tilde{\theta} \right) \cdot \delta \tilde{\theta} \, d\Omega \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。ここに、 n は単位外向法線ベクトルである。上式の最右辺第 1 項は曲げモーメントに関する境界条件、

第2項はせん断力の釣合を意味する。さらに、式(19)より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \langle q \delta w^0 + Q^0 \cdot \nabla_x \delta w^0 \rangle d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \delta w^0 n \cdot \bar{Q} d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{q} - \nabla_x \cdot \bar{Q}) \delta w^0 d\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。上式の最右辺第1項はせん断力に関する境界条件、第2項は面外方向の力の釣合を意味する。これらより、元の問題の境界条件と

$$\nabla_x \cdot \bar{M} = \bar{Q} + \bar{N} \cdot \bar{\theta} \quad (27)$$

$$\nabla_x \cdot \bar{Q} = \bar{q} \quad (28)$$

によりマクロスケール問題が定義される。式(27)の両辺に左から $\nabla_x \cdot$ を作用させると

$$\nabla_x \nabla_x : \bar{M} = \nabla_x \cdot \bar{Q} + \nabla_x \cdot \bar{N} \cdot \bar{\theta} + \bar{N} : \nabla_x \bar{\theta} \quad (29)$$

となり、この式に、式(23)、(24)、(28)を代入すると、最終的に

$$\nabla_x \nabla_x : \bar{M} - \bar{q} - \bar{N} : \nabla_x \nabla_x w^0 + \bar{f} \cdot \nabla_x w^0 = 0 \quad (30)$$

を得る。このマクロスケール問題は、元の問題の面外方向の釣合式(2)の物理量を平均量に置換した関係となっている。

2.4 ミクロスケール問題

式(17)、およびミクロスケール変数の Y 周期性を考慮すると、ミクロスケールにおける面内の釣合式

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N^0 : \nabla_y \delta u^1 \rangle \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \delta u^1 \cdot (n \cdot N^0) d\partial Y - \langle \nabla_y \cdot N^0 \cdot \delta u^1 \rangle \\ &= \langle \nabla_y \cdot N^0 \cdot \delta u^1 \rangle \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる。

曲げについては、式(21)より

$$\begin{aligned} 0 &= \langle M^0 : \nabla_y \delta \theta^1 \rangle \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \delta \theta^1 \cdot (n \cdot M^0) d\partial Y - \langle \nabla_y \cdot M^0 \cdot \delta \theta^1 \rangle \\ &= \langle \nabla_y \cdot M^0 \cdot \delta \theta^1 \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

が得られる。さらに、式(22)より

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q^0 \cdot \nabla_y \delta w^1 \rangle \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \delta w^1 (n \cdot Q^0) d\partial Y - \langle \nabla_y \cdot Q^0 \delta w^1 \rangle \\ &= \langle \nabla_y \cdot Q^0 \delta w^1 \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

となる。式(18)において、 $\delta \theta^0$ が y の関数であると考え

$$\langle N^0 : (\theta^0 \otimes \delta \theta^0) + Q^0 \cdot \delta \theta^0 \rangle = 0 \quad (34)$$

を得る。以上から、周期境界条件と

$$\nabla_y M^0 = N^0 \cdot \theta^0 + Q^0 = 0 \quad (35)$$

によりミクロスケール問題が定義される。上式の両辺に左から $\nabla_y \cdot$ を作用させると

$$\nabla_y \nabla_y : M^0 = N^0 : \nabla_y \theta^0 + \nabla_y \cdot Q^0 = 0 \quad (36)$$

となる。ミクロスケール問題では、分布外力がないため、せん断力はゼロとなる。

2.5 ミクロスケール問題の周期境界条件とマクロ内力

平板の線形マルチスケール問題に関する著者らの文献⁶⁾では、マクロ曲率に相当する相対回転角をミクロスケール問題の境界条件としている。

式(14)で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより、代表体積要素における面内問題の実変位に相当する実回転角 λ は

$$\lambda(x, y) = \{ \nabla_x \bar{\theta}(x) \} \cdot y + \theta^1(x, y) \quad (37)$$

と表される。上式右辺第1項は、一様曲率に起因する回転角であり、第2項は非均質性に起因する回転角である。ミクロたわみ角 θ^1 の Y 周期性

$$\theta^1(x, y + Y_i) = \theta^1(x, y) \quad (38)$$

より、代表体積要素両端における相対回転角は

$$\lambda(x, y + Y_i) - \lambda(x, y) = \{ \nabla_x \bar{\theta}(x) \} \cdot Y_i \quad (39)$$

となる。ここに、 $Y_i (i = 1, 2)$ は代表体積要素の基本周期ベクトルである。

同様に、実たわみ ζ は、それぞれ一様曲率、一様たわみ角、非均質性に起因する成分から

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= -\frac{1}{2} y \cdot \{ \nabla_x \bar{\theta}(x) \} \cdot y \\ &\quad + \{ \nabla_x w^0(x) \} \cdot y + w^1(x, y) \end{aligned} \quad (40)$$

と表すことができる。さらに、ミクロたわみ w^1 の Y 周期性より、代表体積要素両端における相対たわみは

$$\begin{aligned} \zeta(x, y + Y_i) - \zeta(x, y) &= -\frac{1}{2} Y_i \cdot \{ \nabla_x \bar{\theta}(x) \} \cdot Y_i \\ &\quad - Y_i \cdot \{ \nabla_x \bar{\theta}(x) \} \cdot y + \{ \nabla_x w^0(x) \} \cdot Y_i \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただし、上式にはミクロスケールにおける位置 y が含まれているため、平均たわみ角が $\nabla_x w^0$ と一致するためには、代表体積要素の重心点が y の原点に配置される必要がある。線形問題の範疇では代表体積要素の剛体回転は任意なので、著者らの文献⁶⁾ではたわみに関する周期境界条件は課していないが、たわみ角と軸力の相互作用を考える非線形問題では、代表体積要素の平均的たわみ角はマクロたわみ角と一致する必要がある。式(40)の右辺第2項は、そのために必要なマクロたわみ角を意味する。

なお、面内変形に関する周期境界条件に対する相対変位の詳細は文献^{4),5)}に譲るが、実変位が

$$\xi(x, y) = \{ \nabla_x u^0(x) \} \cdot y + u^1(x, y) \quad (42)$$

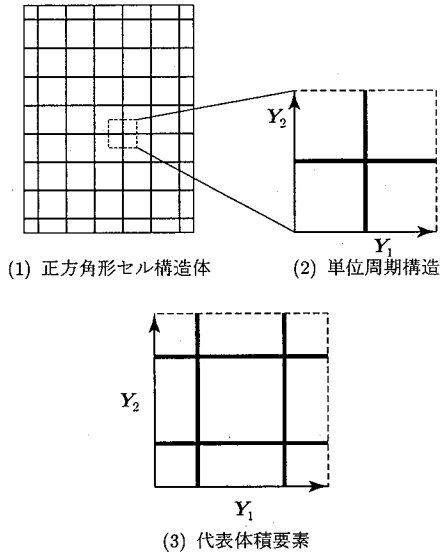


図-2 正方形セル構造体とその単位周期構造

と定義され、相対変位は

$$\xi(x, y + Y_i) - \xi(x, y) = \{\nabla_x u^0(x)\} \cdot Y_i \quad (43)$$

となる。

これまでに述べたマクロ曲率に相当する相対回転角 (39), マクロ曲率とマクロたわみ角に相当する相対たわみ (41), マクロ面内変形に相当する相対面内変位 (43) を代表体積要素に与えることで、その応答としてマクロ曲げモーメント、面内力が算出可能となる。マクロ曲げモーメントは全曲げモーメント M^0 の代表体積要素内の体積平均であるが、ミクロ構造が本論文で対象としているような骨組構造の場合は、境界積分で表された方が都合がよい。そこで、著者らの文献⁶⁾と同様、Gauss の発散定理を利用し、マクロ曲げモーメント $\tilde{M}$ およびマクロ面内力 $\tilde{N}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \{\nabla_y \cdot (M^0 \otimes y)\}^T dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \{n \cdot M^0(x, y)\} d\partial Y \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \{\nabla_y \cdot (N^0 \otimes y)\}^T dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \{n \cdot N^0(x, y)\} d\partial Y \end{aligned} \quad (45)$$

と表すこととする。

3. 面外変形を含む平面セル構造体の非線形ミクロスケール解析

3.1 正方形セル構造体

図-2に示す正方形セル構造体の非線形ミクロスケール解析を行った。つまり、単位周期構造を 2×2 個含み基本周期ベクトルが $Y_1 = \{100, 0\}$, $Y_2 = \{0, 100\}$ となるような代表体積要素を解析対象とした。セルを構成する骨組を幅と高さが1の正方形断面のBernoulli-Euler

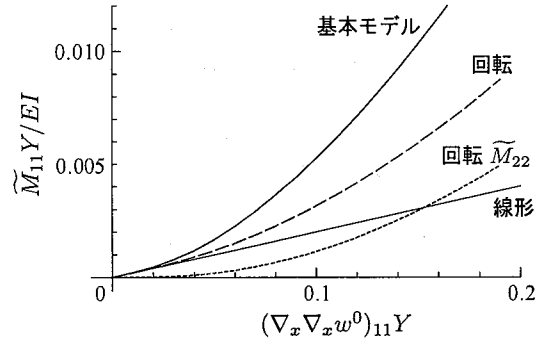
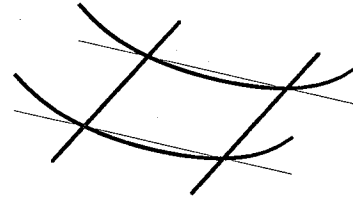
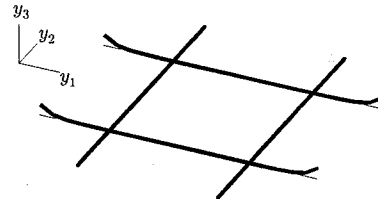


図-3 正方形セル構造体の曲率-曲げモーメント関係 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$



(1) $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 0.1$



(2) $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 1.0$

図-4 正方形セル構造体の変形状 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$

はりとし、Young 率 E を1、要素数は単位周期構造あたり20とした。幾何剛性による非線形性を確認するために、マクロ面内変形はすべてゼロとし、マクロ曲率は $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ のみ漸増させ、他の曲率成分はゼロとした。これらのマクロ変形を、式 (39), (41) によって定義された相対回転、たわみとしてミクロ構造に与え、解析を行った。

得られた無次元化マクロ曲げモーメント $\tilde{M}_{11}Y/EI$ と無次元化マクロ曲率 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}Y$ の関係を図-3に「基本モデル」として示す。ここに、 I はセルを構成する骨組の断面2次モーメント、 Y は代表長さでここでは $Y = |Y_1|$ とした。図中、「線形」と記した細い実線は線形ミクロスケール解析の結果である。当然のことながら、曲率が小さいときは、両者の結果は一致するが、曲率が大きくなるにつれて、幾何剛性の影響により非線形解析の結果の剛性は高くなる。 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}Y = 0.1, 1.0$ のときの代表体積要素の変形状を図-4に示す。ただし、変形の様子が分かりやすいように、かつ変形の絶対的な大きさが等しくなるように、それぞれ20倍、2倍にして示した。 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}Y = 0.1$ のときは曲率がほぼ一様分布しているのに対し、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}Y = 1.0$ のときは x 方向の面内引張が働いているために、曲げ変形が一様ではな

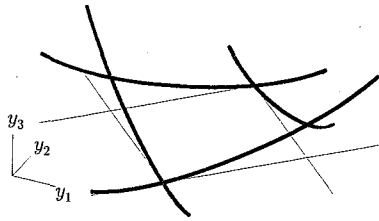


図-5 正方形セル構造体の変形形状 (45° 回転) $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$

くなっている。

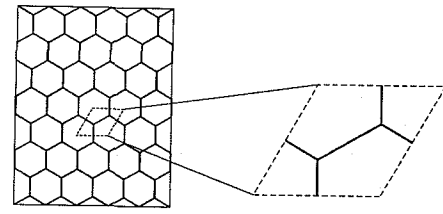
次に、代表体積要素を 45° 回転させて、同様の解析を行ったときの無次元化曲げモーメント - 曲率関係を図-3に「回転」として示した。 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 0.1$ のときの代表体積要素の変形を倍率 20 倍して図-5に示した。変形が小さいうちは、基本モデルと同じ結果となっている。変形が大きくなるにつれ、幾何剛性の影響があらわれるものの、曲げモーメントが基本モデルよりも小さくなっている。これは、正方形セル構造体の面内剛性の異方性が非常に大きく、骨組軸方向で面内剛性が最大となるのに対し、45° 度方向で面内剛性が最小となるためである。さらに、曲率を与えている軸と直角方向の軸周りの無次元化曲げモーメントを「回転 $\tilde{M}_{22}$ 」として図-3に示した。変形が小さいうちは直角方向の曲げモーメント $\tilde{M}_{22}$ はゼロであるが、変形が大きくなるにつれ大きくなり、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 0.15$ 程度で $\tilde{M}_{11}$ の 50% を越す程度に大きくなっていく。この現象も、正方形セルの異方性と幾何剛性の影響による。正方形セルの面内の平均 Poisson 比は骨組軸方向でゼロ、45° 度方向でほぼ 1 となる異方性を有しており¹、幾何剛性の影響で x 軸方向に引張りが生じ、Poisson 効果により y 軸方向にも引張りが生じ、結果として直角方向の曲げモーメント $\tilde{M}_{22}$ を生じさせている。なお、「基本モデル」では変形が大きくなっても直角方向の曲げモーメント $\tilde{M}_{22}$ はゼロである。線形問題の範疇では、セル構造体の配置の角度に関わらず直角方向の曲げモーメント $\tilde{M}_{22}$ はゼロである。

3.2 正六角形セル構造体

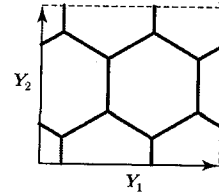
次に、図-6に示す正六角形セル構造体に対して、前節と同様にマクロ変形を仮定した非線形ミクロスケール解析を行った。セルを構成する骨組の断面および材料の Young 率は前述の正方形セル構造体と同じにし、単位周期構造を 2×2 個含み、基本周期ベクトルが $Y_1 = \{31.7, 0\}$ 、 $Y_2 = \{0, 27.5\}$ となるような代表体積要素を解析対象とした。要素数は単位周期構造あたり 24 とした。前節と同様、マクロ面内変形はすべてゼロとし、マクロ曲率は $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} = w_{,11}$ もしくは $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22} = w_{,22}$ のみ漸増させ、他の曲率成分はゼロとした。

無次元化したマクロ曲げモーメントとマクロ曲率の関

¹ 面外方向に関する Poisson 比 ν_{13} および ν_{23} はゼロとなるので、材料が安定であるための条件から、面内の Poisson 比 ν_{12} の取り得る範囲は $-1 < \nu_{12} < 1$ となる。また $\nu_{12} = 1$ が非圧縮に相当する。



(1) 正六角形セル構造体 (2) 単位周期構造



(3) 代表体積要素

図-6 正六角形セル構造体とその単位周期構造

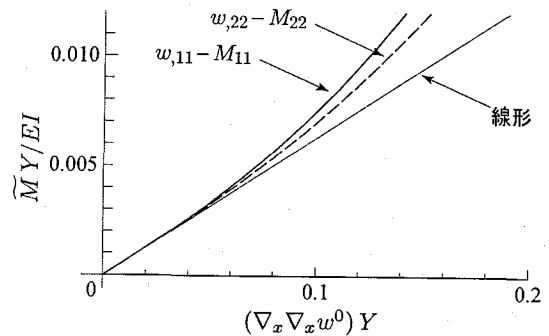
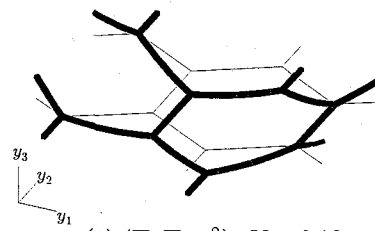
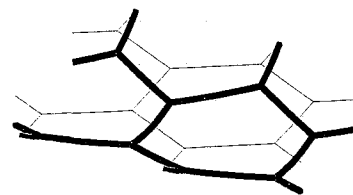


図-7 正六角形セル構造体の曲率 - 曲げモーメント関係



(1) $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 0.16$



(2) $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22} Y = 0.16$

図-8 正六角形セル構造体の変形形状

係を図-7に示す。図中、「線形」と記した細い実線は線形ミクロスケール解析の結果である。曲率が小さいときは両者の結果は一致し、曲率が大きくなるにつれて、幾何剛性の影響により非線形解析の結果の剛性が高くなる点は、正方形セル構造体と同じである。 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} Y = 0.16$ および $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22} Y = 0.16$ のときの代表体積要素の変形を 10 倍にして図-8に示す。この 2 種類の

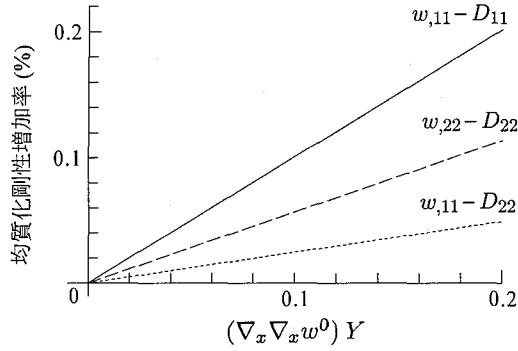


図-9 正六角形セル構造体の曲率-均質化曲げ剛性関係

$(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ および $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22}$ の曲げで幾何剛性の現れ方が異なる理由は、基本周期ベクトル Y_1 と Y_2 の長さの違いによる。本解析では、ミクロスケール構造に一樣曲率を与えているが、曲率は長さの次元を有するため、中立面の伸びが曲げに与える影響は基本周期ベクトルの長さに依存する。

ここで、無次元化したマクロ曲げモーメント増分とマクロ曲率増分の関係を

$$\frac{Y}{EI} \{\tilde{M}\} = D^H Y \cdot \{\nabla \nabla \tilde{w}\} \quad (46)$$

と関係付けるマトリクス D^H を均質化接線曲げ剛性と定義する。 D^H は、連続体における均質化接線係数¹³⁾に相当する。ここに、

$$\{\tilde{M}\} := \frac{Y}{EI} \begin{Bmatrix} \tilde{M}_{11} \\ \tilde{M}_{22} \\ \tilde{M}_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{\nabla \nabla \tilde{w}\} := \begin{Bmatrix} (\nabla_x \nabla_x w^0)_{11} \\ (\nabla_x \nabla_x w^0)_{22} \\ (\nabla_x \nabla_x w^0)_{12} + (\nabla_x \nabla_x w^0)_{21} \end{Bmatrix}$$

と定義した。この均質化曲げ剛性は、マクロ曲率の各成分が

$$\{\nabla \nabla \tilde{w}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

となるような3つの基本モードに対するマクロ曲げモーメントを、それぞれ $\{\tilde{M}\}^1, \{\tilde{M}\}^2, \{\tilde{M}\}^3$ とすれば、

$$D^H = \begin{bmatrix} \{\tilde{M}\}^1 & \{\tilde{M}\}^2 & \{\tilde{M}\}^3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

として求めることができる。

非線形ミクロスケール解析により得られた均質化曲げ剛性と無次元化曲率の関係を図-9に示す。縦軸の均質化剛性変化率は、均質化接線曲げ剛性の変化を初期の均質化接線曲げ剛性で無次元化した値である。また同図には、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ を与えたときの均質化接線曲げ剛性の成分 D_{11} および D_{22} を、それぞれ $w_{11} - D_{11}$, $w_{11} - D_{22}$ として、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22}$ を与えたときの D_{22} を $w_{22} - D_{22}$ として示した。なお、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{22}$ を与えた

ときの D_{11} は $w_{11} - D_{22}$ に一致した。正六角形セル構造体の面内変形特性は等方的であり、Poisson比はほぼ1となることが知られている。Poisson比が大きければ、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ の曲げにより、 y_1 軸方向の面内応力が生じ、Poisson効果により y_2 軸方向の面内応力も生じる。したがって、 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ の曲げにより、 D_{11} のみならず、 D_{22} の曲げ剛性も高くなる。

4. おわりに

一般化収束論を用いて、Kármánの仮定にしたがう曲げを受ける平板に対する非線形均質化理論の適用を行い、非線形マルチスケール解析の定式化を行った。これまでのはりや平板に対する均質化理論の適用を行った研究と異なり、一般化収束論を用いることにより、線形問題の定式化とまったく同様の手順により非線形問題の定式化が可能となることを示した。

線形ミクロスケール問題において考慮する周期境界条件は、相対たわみ角のみであった。一方で、Kármánの板理論では、面内ひずみがたわみ角に依存するため、ミクロ構造の剛体回転を意味する平均たわみ角は任意ではなくなる。したがって、本論文で定式化した非線形ミクロスケール問題では、相対たわみ角に加えて、平均たわみ角を規定する相対たわみを考慮する必要があることを述べ、課すべき相対たわみを示した。

次いで、平面セル構造体の微視構造を骨組によりモデル化し、マクロ変形を仮定した非線形ミクロスケール解析を行い、幾何学的非線形性に起因する特徴的な曲げモーメント-曲率関係を示した。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: *Cellular Solids*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1997.
- 2) Allaire, G.: Mathematical approaches and methods, in: Hornung, U. ed., *Homogenization and Porous Media*, Springer, New York, pp.225-250, 1996.
- 3) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M.: Appropriate number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.191, pp.2561-2585, 2002.
- 4) 大植 健, 齊木 功, 寺田賢二郎, 中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング, 土木学会論文集, No.724/I-62, pp.249-256, 2003.
- 5) 齊木 功, 大植 健, 寺田賢二郎, 中島章典: 非均質化理論に基づく骨組要素を用いたセル構造材料のマルチスケール解析, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.69, No.680, pp.786-793, 2003.
- 6) 齊木 功, 佐野道徳, 中島章典: はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察, 土木学会応用力学論文集, Vol.7, pp.407-413, 2004.
- 7) 高野直樹, 座古 勝, 菊池 昇: 均質化法による単層波

- 状コアサンドイッチ板の解析, 材料, Vol.44, No.502, pp.905-910, 1995.
- 8) 岡田 裕, 藤谷修太津, 福井泰好, 熊澤典良: はり・棒や薄板構造の均質化法解析, 計算工学講演会論文集, Vol.5, pp.741-744, 2000.
 - 9) Kohn, R. V. and Vogelius, M.: A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.20, No.4, pp.333-350, 1984.
 - 10) 京谷孝史, 寺田賢二郎: 周期構造を有する梁構造物への均質化法の適用, 土木学会応用力学論文集, Vol.1, pp.185-194, 1998.
 - 11) Moreau, G. and Caillerie, D.: Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis, *Comput. Struct.*, Vol.68, pp.181-189, 1998.
 - 12) Tollenaere, H. and Caillerie, D.: Continuous modeling of lattice structures by homogenization, *Adv. Eng. Software*, Vol.29, pp.699-705, 1998.
 - 13) Terada, K., Saiki, I., Matsui, K. and Yamakawa, Y.: Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.3531-3563, 2003.
 - 14) Timoshenko, S. and Woinowsky-krieger, S.: *Theory of Plate and Shells*, McGraw-Hill, 1959.

(2006 年 4 月 13 日 受付)