

ケーブル構造の張力決定に関する一計算法

A numerical method for determination of cable tension on cable structures

Dang Tung Dang*・岩崎英治**・長井正嗣***

Dang Tung DANG, Eiji IWASAKI and Masatugu NAGAI

*学生会員 工修 長岡技術科学大学博士後期課程 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

The objective of the research presented here is to develop a determination of cable tension for cable structures basing on proposed cable element with pulley by using some constraint conditions. First, known horizontal component of cable tension is assumed to be equal at position of intersection between cable and tower. Secondly, displacement of girder is supposed to be minimized at position in which the girder is supported by cable. These conditions are reasonable because it is considered that bending moment of the tower does not occur under the action of dead load of girder and bending moment of the girder has the same features as bending moment of continuous beam. With proposed procedures, even if a special calculation technique for finding shape is not used, shape-finding and structural analysis for cable structures could be done with the same technique. The results of the method are compared with those of the conventional one in the application of some numerical examples of cable-stayed bridge to show the accuracy and efficiency of the proposed shape-finding method.

Key Words : Cable element, shape finding, pulley, singular value decomposition

1. はじめに

ケーブル系の吊構造の形状は、自重やケーブルプレストレス、外力等が作用するまで確定しないため、形状決定の問題は構造解析と並んで重要である。このような形状決定の問題は、つり合い状態での形状やケーブル軸力などが予め設定された目標値に近くなるように、初期ケーブル長やケーブル交点の座標値を決めることになる。そのような解を最適値問題として解く方法^{1),2)}や、ケーブル軸力やつり合い状態での座標値を、ケーブル長や変位前の節点位置の関数として表して解く方法^{3),4)}などがある。また、吊橋や斜張橋の構造形式に特化した形状決定の方法も開発されている^{5),6),7),8)}。

しかし、これらの形状決定に用いられる計算手法は、通常の構造解析の手法と大きく異なっている。著者らは、ケーブル要素の節点に、すべり変位を許容した滑車の概念を導入することで、等張力のもとでの形状決定と、形状決定後には、すべり変位を拘束することで、ケーブル構造の構造解析を行えることを示した^{10),11)}。この滑車の概念を導入することで、形状決定が通常の構造解析と同様に平衡方程式を解くことで求められることから、形状決定と構造解析の垣根を除いたシームレスな方法と考えることができる。

ところで、斜張橋は構造的には、高次の不静定構造物であり、そのケーブルにプレストレスを導入することにより、桁の断面力を小さくすることが可能となり、よって軽量化を図ることができる。ただし、プレストレス力の値は設計者が任意に与えることができることから、ケーブル本数の多いマルチケーブルタイプの斜張橋においては、最適なプレストレス力を決定す

る解析に、かなり熟練した技術が必要となる。

このケーブルの最適プレストレス力を求める手法については、現在までに種々の方法が開発されている^{5),6),7),8)}。このうち、設計者に広く受け入れられている考え方は、山田ら⁵⁾が提案する「ひずみエネルギー最小規準」に基づくものであり、これは完成系における主桁の断面力分布を均一にし、その絶対値を極力小さくすることを目標にしている。また、ニュートンラプソン法を用いて桁の死荷重作用下での目標形状になるようにケーブルのプレストレス力を決定する方法^{7),8)}もある。

著者らの既往の研究^{10),11)}では、滑車の概念を導入したケーブル要素による形状決定手法を、ケーブルトラス、ケーブルネット、吊橋に適用した例を示している。しかし、斜張橋は滑車の概念だけでは、通常用いられる形状決定の条件を十分に満足した解析は行えていない。すなわち、斜張橋では、自重の作用した状態で塔に曲げが作用せず、桁の曲げを最小に抑えるために、桁とケーブルの取り付け部で自重による鉛直変位が生じないようにケーブルの形状決定を行うことが多い。滑車の概念を導入した方法では、塔に曲げが生じないようにするには、塔に取り付けられた前後のケーブルの橋軸方向水平分力が等しくなるような滑車を導入すれば良い。また、桁とケーブルの取り付け位置が鉛直方向に移動しないようにするには、取り付け部に滑車を導入し、鉛直変位がゼロになるようなケーブルプレストレスを決定すればよい。しかし、塔とケーブルの接続部に滑車を導入し、さらにケーブルと桁との接続部に滑車を導入すると、すべり変位が拘束されず、剛性行列が特異になる。

そこで、本論文では、文献¹¹⁾に示した任意の節点での変位成分が規定の値になるようなケーブル張力の決定方法に連立方程式の特異値分解による手法を適用する方法を提案し、その有効性を斜張橋の形状決定により示す。

2. ケーブル要素

種々のケーブル要素が提案され、もっとも単純な要素は2節点直線ケーブル要素である。しかし、本研究で扱うような滑車の概念を導入した形状決定の問題では、初期形状と形状決定後の形状が大きく異なる場合に、滑車部でのケーブルのすべり変位は大きな値になる。すべり変位により計算前後のケーブル長は大きく変化することになるが、単純なケーブル要素では、多数の要素分割を行う必要があり、必然的に要素長は短くなる。このとき、要素長以上のすべり変位が生じると要素長が負になり計算が破綻することとなる。したがって、滑車の概念を導入するためには、一つのケーブル要素でケーブルの変形状態を精度良く表現して、要素長を大きくとる必要がある。

そこで、著者らの既往の研究^{9),10),11)}では、汎関数を修正することで、積分さえ正確に行えれば、一つの要素で大きく弛緩したケーブルを表現可能なケーブル要素を開発している。ここでは、これらの文献に示したケーブル要素と滑車を含んだケーブル要素の定式化の概略を示す。

2.1 ケーブル要素

ある増分ステップにおいて平衡条件と適合条件を満たした解が得られているものとし、独立変分量に要素両端の変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{u}_a$, $\Delta \mathbf{u}_b$ と要素中央の軸力増分ベクトル $\Delta \mathbf{N}_c$ を用いたときの次の増分ステップまでの汎関数は、次のように表される。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x^* - N^*)] \right\} dx + \left[\{ (N^* - n_x Q^*)^T \Delta \mathbf{u} \}_0^l \right] \quad (1)$$

ここで、 Q^* は次の増分ステップでのケーブル要素端の集中荷重ベクトル、 N^* は次の増分ステップでの軸力、 n_x はケーブル端部の断面の外向き法線ベクトルとケーブルに沿った x 軸との間の方向余弦、 ΔN は軸力増分、 EA は伸び剛性である。

また、 F_x^* と N^* はそれぞれ軸力 N^* から次式のように与えられる。

$$F_x^* = e^T N^*, \quad N^* = |N^*|, \quad \Delta N = N^* - N \quad (2)$$

ここで、 e は前増分ステップでのケーブルの単位接線ベクトルである。なお、次の増分ステップでのケーブルの単位接線ベクトル e^* は、 N^*/N^* で与えられる。

式(1)において N^* は要素内での平衡方程式を満たしている必要があり、要素中央での軸力ベクトル N_c^* と分布荷重 q^* から次式のように表される。

$$N^* = N_c^* - \int_{l/2}^x q^* dx \quad (3)$$

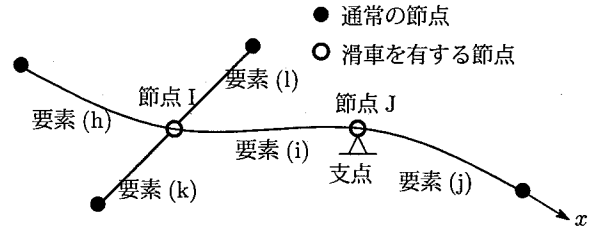


図-1 滑車を有するケーブル

式(1)の独立変分量は、ケーブル要素両端の変位増分 $\Delta \mathbf{u}_a (\equiv \Delta \mathbf{u}(0))$, $\Delta \mathbf{u}_b (\equiv \Delta \mathbf{u}(l))$ と要素中央の軸力増分 ΔN_c であり、汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta \mathbf{u}]_0^l = 0 \quad (4a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (4b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (4c)$$

ここで、 N_a^* , Q_a^* と N_b^* , Q_b^* は N^* や Q^* の a 端 ($x=0$) と b 端 ($x=l$) での値を表している。

式(4a)は増分前後のケーブルの適合条件を表している。また、式(4b), 式(4c)はそれぞれ両端での力の釣り合いを表している。

これらの式を全てのケーブル要素について組み立てて、解くことによりケーブル構造の構造解析が行える。

2.2 軸力が等しい滑車を有するケーブル要素

図-1のように、ケーブル(h), (i), (j)が節点I, Jに取り付けられた滑車内を通して接続されたケーブルの系を考える。滑車内を通して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}$, $\Pi_C^{(i)}$, $\Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C^{total} &= \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ &\quad + \Delta \tilde{u}_I \{ N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)} \} \\ &\quad + \Delta \tilde{u}_J \{ N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)} \} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I$, $\Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点IとJのケーブルの滑り変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている。また、式中の $N_I^{*(h)}$ の添え字は、要素(h)と節点Iを表している。

上式の汎関数に要素(k)や(l)の汎関数を含めて、これらの要素には滑り変位を導入しなければ、節点Iの滑車は、要素(k)や(l)の変形に伴って、要素(h)や(i)上を移動することになる。また、節点Jの節点変位を拘束すると、要素(i)や(j)はこの節点上の滑車内を滑ることになる。

式(5)から要素(i)に関する項を取り出すと、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関

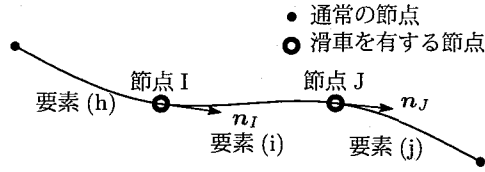


図-2 分力が等しい滑車を有するケーブル

数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} N^*]_0^l \quad (6)$$

上式の独立変分量は、ケーブル要素両端の変位増分と要素中央の軸力増分のほかに、両端のすべり変位 $\Delta \tilde{u}_a (= \Delta \tilde{u}(0))$, $\Delta \tilde{u}_b (= \Delta \tilde{u}(l))$ が含まれ、停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (7a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (7b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (7c)$$

$$-e_a^{*T} N_a^* = 0 \quad (7d)$$

$$e_b^{*T} N_b^* = 0 \quad (7e)$$

式 (7a) は、 ΔN_c に関する停留条件であり、増分変位前後の適合条件を表している。式 (7b), (7c) は、それぞれ増分変位 Δu_a , Δu_b に関する停留条件、式 (7d), (7e) は、それぞれ滑車の滑り変位増分 $\Delta \tilde{u}_a$, $\Delta \tilde{u}_b$ に関する停留条件である。最後の2式は、便宜上、一つの要素の停留条件を示したために右辺がゼロとなっているが、実際には、構造全体に組み立てると隣接要素の軸力と等しくなる条件を表す。なお、分布荷重 q^* は、ケーブルに直接作用しているが、集中荷重 Q^* は、ケーブルではなく、滑車（節点）に作用していることに注意する必要がある。

2.3 軸力の分力が等しい滑車を有するケーブル要素

図-2 のようなケーブル構造系の節点 I や J に隣接するケーブル要素の軸力について、それぞれの節点で予め決められた n_I や n_J 方向の軸力成分が等しくなるような条件を与えた汎関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_C^{total} = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta \tilde{u}_I n_I^T \{ N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)} \} \\ & + \Delta \tilde{u}_J n_J^T \{ N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)} \} \end{aligned} \quad (8)$$

上式から要素 (i) に関する項を抜き出すと、ケーブル軸力の単位ベクトル n 方向成分が等しくなるような滑車を含んだケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} n^T N^*]_0^l \quad (9)$$

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx$$

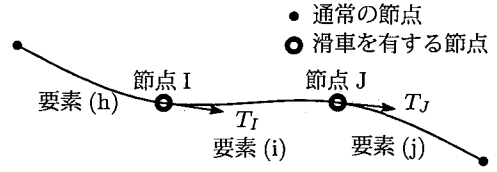


図-3 滑車部でケーブルに力が作用する場合

$$+ [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (10a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (10b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (10c)$$

$$-n_a^{*T} N_a^* = 0 \quad (10d)$$

$$n_b^{*T} N_b^* = 0 \quad (10e)$$

上式の最後の2式は、便宜上、一つの要素の停留条件を示したために右辺がゼロになっていることに留意する必要がある。

2.4 滑車部でケーブルに力が作用する場合

図-3 のようなケーブル構造系の節点 I や J の滑車を通るケーブルに張力 T_I^* や T_J^* を作用させた場合の汎関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_C^{total} = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta \tilde{u}_I \{ N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)} - T_I^* \} \\ & + \Delta \tilde{u}_J \{ N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)} - T_J^* \} \end{aligned} \quad (11)$$

上式から要素 (i) に関する項を抜き出すと、滑車部のケーブルにすべりを起こさせるような力 T^* が作用した場合の汎関数は次のようになる。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} (N^* - n_x T^*)]_0^l \quad (12)$$

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (13a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (13b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (13c)$$

$$-e_a^{*T} N_a^* - T_a^* = 0 \quad (13d)$$

$$e_b^{*T} N_b^* - T_b^* = 0 \quad (13e)$$

最後の2式より、滑車部において、ケーブルに直接、力を与えるには、滑り変位に対応する停留条件式に、力の項を代入すると良いことが分かる。

3. ケーブルプレストレス力の決定法

ケーブル系構造の形状決定においては、任意の節点の変位成分の大きさが決められた値に等しくなるか、または近くなるように形状を決めたいことがある。このために、任意のケーブルに滑車を導入して、ケーブルプレストレスを決める必要がある。

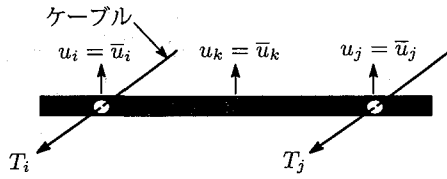


図-4 ケーブルのプレストレス

例として、図-4のような梁部材にケーブル部材が滑車を介して接続されている状態を考える。節点 i, j, k などの変位 u_i, u_j, u_k が、規定値 $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k$ に等しくなるように、または、規定値との差の二乗和が最小になるように、滑車内を通っているケーブルの張力 T_i, T_j などを決める方法を示す。なお、変位を与える節点と、張力を決める節点は同一である必要はなく、同数である必要もない。

滑車を含んだケーブル系の全体の平衡方程式は、次のように表される。

$$KD = F \quad (14)$$

ここで、変位ベクトル D には、通常の節点変位だけでなく、滑車部でのすべり変位も含まれている。また、荷重ベクトル F も同様に、通常の節点力だけでなく、滑車部ですべり変位を生じさせるような張力も含んでいる。変位が規定された成分と、張力成分を明示的に示すと、次のようになる。

$$D = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (15)$$

この方程式は、変位ベクトル D と荷重ベクトル F に未知量と既知量が混在している。

通常の有限要素法でも平衡方程式に支持条件を与えると、変位ベクトルと荷重ベクトルには、未知量と既知量が混在する。しかし、本論文での規定変位成分と張力成分は、同一節点にはなく、また、同数でもないために、通常の有限要素法での支持条件の処理手法は使用できない。そこで、次のような方程式を考える。

$$\begin{aligned} KD^{(0)} &= F^{(0)} \\ &\vdots \\ KD^{(i)} &= F^{(i)} \\ KD^{(j)} &= F^{(j)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $F^{(0)}$ は、未知のプレストレス力 T_i, T_j などをゼロとおいた荷重ベクトル、 $F^{(i)}$ は張力 T_i に相当する成分を '1'、他の成分を '0' とおいた荷重ベクトルである。

したがって、上式の方程式群の右辺の荷重ベクトルには未知量は含まれていない。これらの方程式の解 $D^{(0)}$ 、

$D^{(i)}, D^{(j)}, \dots$ から、元の方程式 (14) の解は、次のように表される。

$$D = D^{(0)} + \dots + T_i D^{(i)} + T_j D^{(j)} + \dots \quad (17)$$

この式から、変位が規定されている成分を取り出すと、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i^{(0)} \\ u_j^{(0)} \\ u_k^{(0)} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots u_i^{(i)} & u_i^{(j)} & \dots \\ \dots u_j^{(i)} & u_j^{(j)} & \dots \\ \dots u_k^{(i)} & u_k^{(j)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (18)$$

後の説明の便宜上、上式を次のように表す。

$$\bar{u} = u^{(0)} + AT \quad (19)$$

上式は、プレストレス T に関する連立方程式になっている。

変位を規定するベクトル $\bar{u}$ の成分数 (m) と、プレストレス T の成分数 (n) が同じ場合には、上式の連立方程式は容易に解くことができ、変位が規定の値になるようなプレストレスが求められる。一方、両者のベクトルの成分数が異なる場合には、最小二乗法などにより、上式の両辺の差の二乗和が最小になるようなプレストレス力を求めることが、妥当な解決法と考えられる。もし、特定の変位成分だけは、他の成分よりも残差を小さくしたければ、重み付けを行うことで対応できる。

最小二乗解を得る方法には、正規方程式を用いる方法と用いない方法がある。式 (19) の正規方程式は、次のようになる。

$$A^T A T = A^T (\bar{u} - u^{(0)}) \quad (20)$$

上式の連立方程式を T に関して解くと、式 (19) の最小二乗解が得られるが、この正規方程式の係数行列 ($A^T A$) の条件数は、式 (19) の係数行列 (A) の条件数の 2 乗になり、計算機の打ち切り誤差が入りやすく、変数の少ない問題にしか適用できず実用的ではない。そこで、正規方程式を用いないで最小二乗解を求める方法が考案されている。本論文では係数行列 A の特異値分解による方法¹²⁾を用いる。

$m \times n$ 係数行列 A の特異値分解は以下のような分解である。

$$A = U W V^T \quad (21)$$

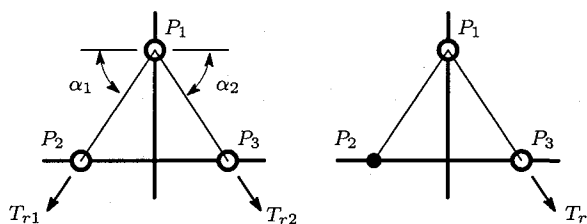
ここで、 W は $n \times n$ 対角行列、 U は $m \times n$ 行列、 V は $n \times n$ 行列であり、以下の条件を満足する。

$$U^T U = V^T V = V V^T = I \quad (22)$$

このような分解は、係数行列 A が正方行列でなくても、一意的に行うことができ、これより、式 (19) の解は次のように表される。

$$T = V W^{-1} U^T (\bar{u} - u^{(0)}) \quad (23)$$

この解は、係数行列 A が正方行列の場合には、式 (19) を満足し、正方行列でない場合には、式 (19) の両辺の差の二乗和が最小になるような解になっている (付録 I 参照)。



(a) P_1 で左右のケーブルの水平分力が等しくなるような条件を付加し、 P_2 と P_3 では滑車が鉛直方向に移動しないようなケーブル張力 T_{r1} , T_{r2} を決定する。
(b) P_1 で左右のケーブル水平分力が等しくなるような条件を付加し、 P_2 と P_3 の鉛直変位がゼロになるようにケーブル張力 T_r を決定する。

図-5 斜張橋のモデル化

4. 数値計算例

本論文に示した特異値分解によるケーブルプレストレス決定法の有効性を示すために、斜張橋の形状決定の計算例を示す。

以下のような形状決定の条件を満足するケーブル張力を求めることを考える。

自重が作用した状態での形状決定の条件

- 塔には曲げモーメントが作用しない
- 桁とケーブル接続部にたわみは生じない

上述の一つ目の条件は、塔から桁に接続された一対のケーブルについて、塔との接続部で水平分力が等しくなるような条件を与えると満足される。また、二つ目の条件は、ケーブルと桁の接続部の鉛直変位がゼロとなるように張力を決定することで満足される。図 5(a) はそのようなモデル化を示しているが、このようなモデル化を行うとケーブルのすべり変位を拘束する節点がないため、剛性行列が特異となる。

そこで、図 5(b) のように、桁と一対のケーブルの接続部では、一方の接続部にのみ滑車を導入することとし、前述の特異値分解を用いて、点 P_2 と P_3 の鉛直変位の二乗和が最小になるようにケーブル張力を決定することとする。

最初の計算例のファンタイプ斜張橋のケーブルと桁との接続位置での鉛直変位をゼロとする条件は、($m=$)12 個であり、これを ($n=$)6 個のケーブルプレストレス力により規定値との差の二乗和が最小となるような最小二乗法の問題である。一方、2 番目の斜張橋では、桁とケーブルとの接続点は ($m=$)88 個あり、ケーブルプレストレス力を求める箇所は ($n=$)44 個になる。この規模の最小二乗法の問題になると、正規方程式による方法では桁落ちのために解が得られなかった。

4.1 ファンタイプ斜張橋

図-6 のようなファンタイプ斜張橋の簡単なモデルの形状解析に、本論文に示したケーブルプレストレス力決定法と既往のケーブルプレストレス力決定法^{7),8)}を用いる。モデルの主要寸法を図-6 に示す。構造諸元、および死荷重は文献⁸⁾を参考に表-1 のように仮定した。

自重を想定した $w=87.5\text{kN/m}$ の等分布荷重を桁に作用させたとき、各方法^{7),8)}により求めた結果を、比較のために表-2 にケーブル軸力、図-7 に桁の曲げモー

メント、図-8 に桁の鉛直変位を示している。部材番号 (6) において Wang らの手法による桁の曲げモーメントの値がほかの手法に比べて大きな値であるが、これは一部のケーブルと桁との接続部の鉛直変位を最小にすることだけを条件としているためであり、本手法と Kim らの手法による桁の曲げモーメントの値がほぼ一致した。

4.2 3 次元斜張橋

図-9 と表-3 のような諸元の斜張橋を対象とする。桁とケーブルの接続は、図-10 のように桁断面の重心位置からケーブル接続位置まで剛体要素を伸ばしたフィッシュボーンモデルを用いている。

塔から桁に接続されたケーブルの桁位置での鉛直移動を止めるために図-5(a) のように滑車を導入すると、ケーブルの滑り変位を拘束する節点なくなるために、剛性行列が特異になる。そこで、文献¹¹⁾では、図-5(b) のように、一方のケーブルの取り付け位置に滑車を導入し、この点での鉛直変位だけがゼロになるような条件によりプレストレス力を決定した。

この計算例では、この文献¹¹⁾による結果と、本論文に示した特異値分解により、図-5(b) の P_2 点と P_3 点の鉛直変位が最小になるようにプレストレスを求めた場合の結果を比較する。

自重を想定した $w=70\text{kN/m}$ の等分布荷重を桁に作用させたときの鉛直変位、斜張橋の左側半分の桁の曲げモーメント、およびケーブル軸力をそれぞれ図-11, 12, 13, 14 に示している。本手法では、ケーブルと桁との接続部の節点の鉛直変位が小さくなるように特異値分解の手法によりケーブルプレストレス力の最小二乗解を求めているために図-11 のように鉛直変位が多少生じているが、文献¹¹⁾の手法による図-12 の結果に比べて変位量が小さくなっていることが分かる。

一方、図-13 と 14 から本手法と文献¹¹⁾の結果を比較すると、本手法による結果では、幾つかのケーブル軸力が文献¹¹⁾の結果に比べて小さくなっている。また、本手法による桁の曲げモーメントが塔位置に対して対称な分布になっていることが分かる。これはケーブルと桁との接続位置を橋軸方向に調整することにより、個々のケーブル張力の均一化の可能性を示唆していると考えられる。

5. あとがき

本論文は、著者らの開発したケーブル要素を元に、軸力が等しくなるような滑車を含んだ要素の他に、任意な方向の軸力成分が等しくなるような滑車を含んだ要素、滑車部でケーブルに直接、張力を作用させる方法を用い、さらに特異値分解による最小二乗法の解法を用いて、任意の変位成分の規定値と計算値との残差の二乗和が最小になるように、滑車部でのケーブル張力を決める方法を開発し、一例として斜張橋を対象に、形状決定が行えることを示した。

本論文で扱っている滑車を用いた形状決定法は、形状決定と構造解析が同一の手法で行うことができるため、簡便に吊形式構造の解析が行える特徴を有している。

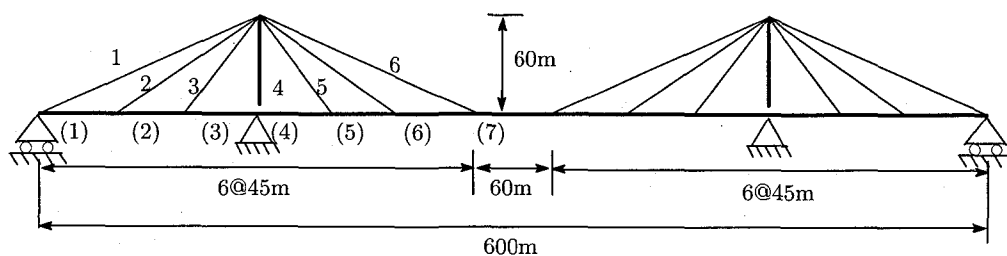


図-6 ファンタイプ斜張橋の形状

表-1 ファンタイプ斜張橋の構造諸元

要素	断面積	弾性係数	断面2次モーメント
	A, m^2	N/m^2	I_z, m^4
外ケーブル	0.0042	207.0×10^9	
内ケーブル	0.0016	207.0×10^9	
桁	0.320	207.0×10^9	1.131
塔 (0.00-20.0m)	0.269	207.0×10^9	0.432
塔 (20.0-40.0m)	0.228	207.0×10^9	0.345
塔 (40.0-60.0m)	0.203	207.0×10^9	0.211

表-2 ケーブルの軸力

Cable No.	Present study (MN)	Wang's study (MN)	Difference (%)	Kim's study (MN)	Difference (%)
1	12.09	10.73	12.0	11.38	6.2
2	7.75	8.26	-4.5	8.26	-4.5
3	4.91	4.79	1.1	4.85	0.5
4	5.04	4.55	4.3	5.11	-0.6
5	7.23	7.81	-5.1	6.79	3.9
6	12.09	11.30	6.9	12.55	-0.4

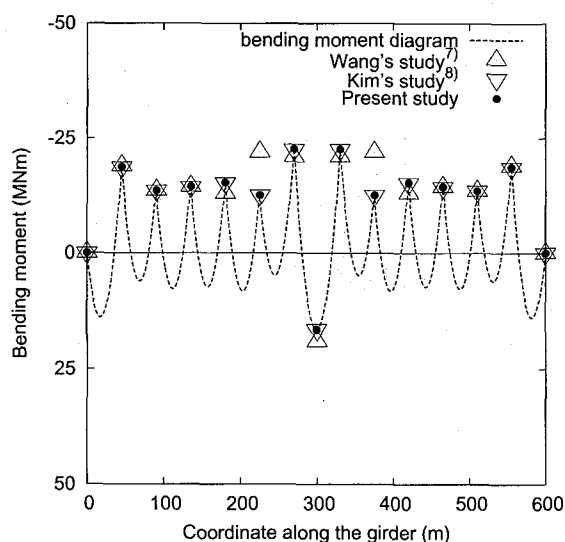


図-7 斜張橋の桁の曲げモーメント

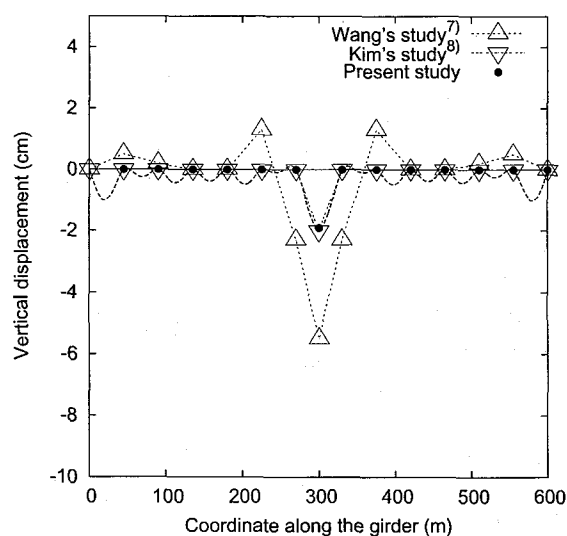


図-8 斜張橋の桁の鉛直変位

付録 I 特異値分解による連立方程式の解

次のような方程式の最小二乗解を正規方程式を用いないで得るための必要十分条件を示す。

$$Ax = b \quad (I.1)$$

ここで、 A は $m \times n$ 行列、 x は n 次元ベクトル、 b は m 次元ベクトルであり、 $m \geq n$ とする。

この方程式の最小二乗法の問題は、

$$r(x) = (Ax - b)^T (Ax - b) \quad (I.2)$$

が最小となるような x を見出すことに帰着する。

係数行列 A によって一意に定まる $n \times m$ の行列 G

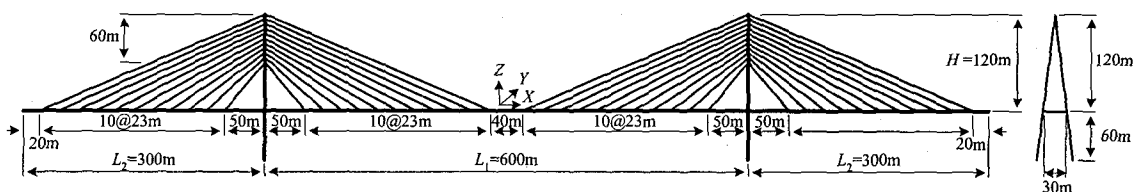


図-9 3次元斜張橋の形状

要素	断面積 A, m ²	弾性係数 N/m ²	断面 2 次モーメント m ⁴
ケーブル	0.01	200.0 × 10 ⁹	
桁	0.5	200.0 × 10 ⁹	$I_x=1.2, I_z=40, J=3$
塔	0.7	200.0 × 10 ⁹	$I=2.1, J=5$

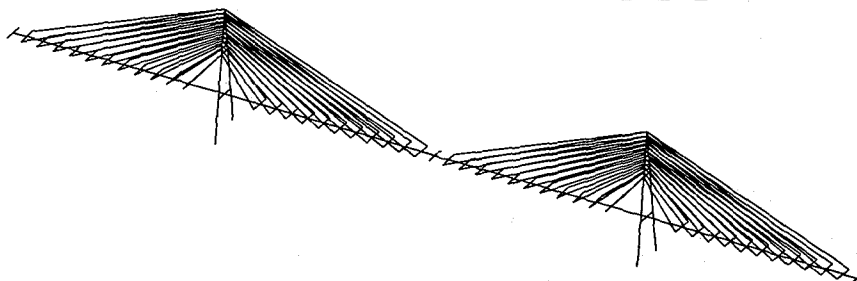


図-10 斜張橋のモデル化

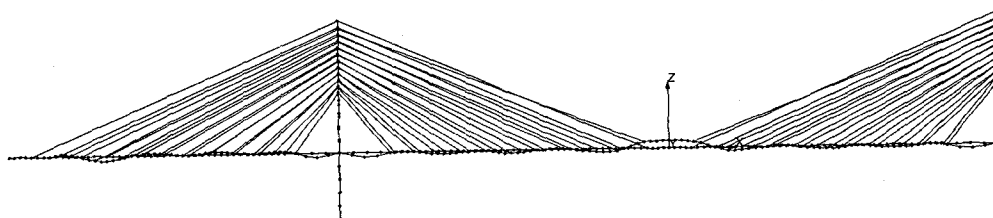


図-11 本決定法による鉛直変位の結果 (鉛直変位を 500 倍に拡大)

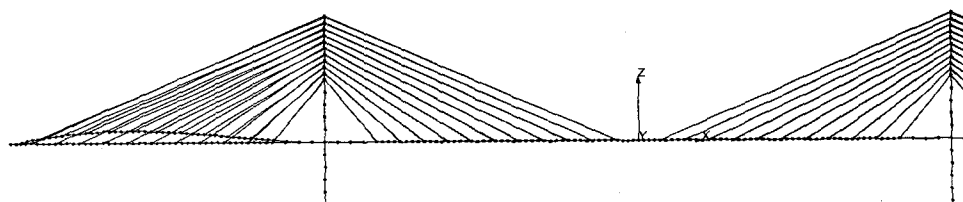


図-12 文献¹¹⁾のプレストレス力決定法による鉛直変位の結果(鉛直変位を100倍に拡大)

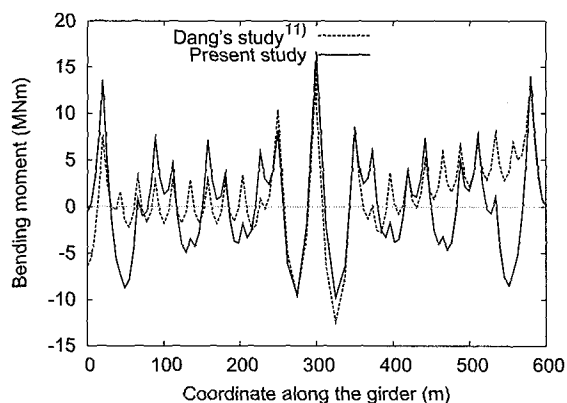
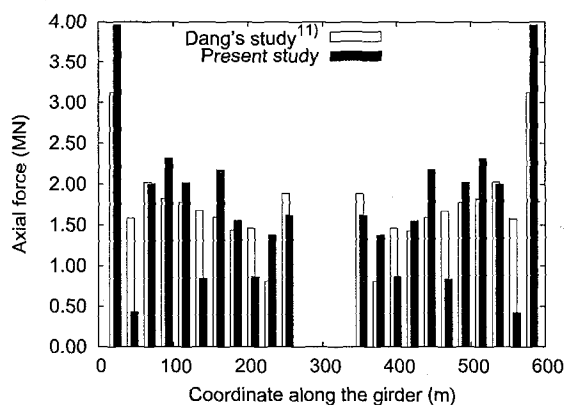


図-13 文献¹¹⁾の決定法と本手法による桁の曲げモーメントの結果の比較



文献¹¹⁾の決定法と本手法によるケーブルの軸力の結果の比較

によって、任意の b に対して、最小二乗解が次式により与えられるための条件を考える。

$$x = Gb \quad (I.3)$$

Gb は最小二乗解であるので、任意の z に対して次式が成立していなければならない。

$$\begin{aligned} r(z) - r(Gb) &= (Az - b)^T (Az - b) \\ &\quad - (AGb - b)^T (AGb - b) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (I.4)$$

$z = Gb + dx$ とおくと、上式は次のようになる。

$$(Adx)^T Adx + 2b^T (AG - I)^T Adx \geq 0 \quad (I.5)$$

行列 G について、 $(AG)^T A = A$ が成立しているとき上式は満足する。また、 $(AG)^T A \neq A$ のとき、式 (I.5) 中の $b^T (AG - I)^T A$ は非ゼロとなる場合がある。これを y^T とおき、さらに、 c を定数として $dx \equiv cy$ の場合を考えると、式 (I.5) は次のように表される。

$$c^2 (Ay)^T Ay + 2cy^T y \geq 0 \quad (I.6)$$

これより、係数 c が負の場合には、上式は成立しない場合がある。したがって、 $(AG)^T A = A$ は Gb が最小二乗解になるための必要十分条件を表している。

行列 A を特異値分解すると、

$$A = U W V^T \quad (I.7)$$

のように表され、 W は $n \times n$ 対角行列、 $m \times n$ 行列 U と $n \times n$ 行列 V は正規直交行列である。

$$U^T U = V^T V = V V^T = I \quad (I.8)$$

これより、式 (I.3) の G は次のようになる。

$$G = V W^{-1} U^T \quad (I.9)$$

ここで W^{-1} の i 番目の対角項は、 W の i 番目の対角項が $w_i \neq 0$ のときには、この逆数 $1/w_i$ となる。また、 $w_i = 0$ の場合や計算機の打ち切り誤差程度に小さな値の場合には 0 とおく。

これより、

$$\begin{aligned} (AG)^T A &= U W^{-1} W W V^T \\ &= U W V^T = A \end{aligned} \quad (I.10)$$

となることから、特異値分解による解は、最小二乗解を表している。

参考文献

- 1) 中西 宏, 波田凱夫: 最適値問題の手法による吊構造の形状決定解析, 日本建築学会論文報告集, 第 238 号, pp.13-23, 1975.
- 2) Y. Namita and H. Nakanishi: Optimum design analysis of structural cable networks, *Proc. JSCE*, No.432/I-16, pp.21-30, 1991.
- 3) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32, 1977.
- 4) M. Ai and H. Imai: A shape finding analysis of suspended structures on the displacement method equilibrium, *J. Struct. Mech. Earth quake Eng., JSCE*, No.752/I-66, pp.27-41, 2004.
- 5) 山田善一, 古川浩平, 江草 拓, 井上幸一: 斜張橋ケーブルの最適プレストレス量決定に関する研究, 土木学会論文報告集, No.356/I-3, pp.415-423, 1985.
- 6) 古田 均, 亀井正博, 金吉正勝, 田中 洋: ファジ理論を用いた斜張橋ケーブルの最適プレストレス力決定法, 土木学会論文集, No.540/IV-31, pp.105-112, 1996.
- 7) P.H. Wang, T.C Tseng and C.G. Yang: Initial shape of Cable-stayed bridges, *Computers & Structures*, Vol.47, No.1, pp.111-123, 1993.
- 8) K.S. Kim, H.S. Lee: Analysis of target configuration under dead loads for cable-supported bridges, *Computers & Structures*, Vol.51, No.1, pp.47-56, 1994.
- 9) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.
- 10) Dang Tung Dang, 岩崎英治, 長井正嗣: ケーブル構造の等張力場における形状決定と構造解析, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.265-276, 2005.
- 11) Dang Tung Dang, 岩崎英治, 長井正嗣: ケーブル構造の形状決定に関する一計算法, 応用力学論文集, Vol.8, pp.133-142, 2005.
- 12) W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery: Numerical recipes in C++, *Cambridge University Press*, 2nd ed. pp.62-73, 2002.

(2006 年 4 月 13 日 受付)