

Eulerian 有限要素法による亀裂進展解析

Crack propagation analysis by using Eulerian finite element method

山田翔太*・梅木裕三**・岡澤重信***・柳原大輔****・藤久保昌彦†

Shota YAMADA, Yuzo UMEKI, Shigenobu OKAZAWA, Daisuke YANAGIHARA and Masahiko FUJIKUBO

*広島大学 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

**スズキ株式会社 (〒432-8611 静岡県浜松市高塚町 300)

***正会員 博(工) 広島大学助教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

****博(工) 広島大学助手 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

†正会員 工博 広島大学教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

This paper describes static fracture analysis by an Eulerian finite element method. The Eulerian finite element method is attractive to simulate fracture because it can generate new free surface without special computational procedure. Although we have developed the Eulerian finite element code, treated only dynamic fracture behavior in short time duration. One reason for this is that the previous Eulerian finite element code employs an explicit dynamic method to advance time. The present study extends the explicit dynamic Eulerian finite element method to implicit static Eulerian finite element method. In addition, static crack propagation is simulated by using the present static Eulerian finite element method based on fracture mechanics.

Key Words : Eulerian finite element method, Static analysis, Crack propagation, Fracture mechanics

1. 緒言

有限要素法の解析格子制御法はLagrangian法とEulerian法の2つに大別される。Lagrangian法は物体領域のみを格子分割して、物体の変形と共に解析格子もそれを追従するように変形する。固体解析では通常このLagrangian法が用いられる。それに対してEulerian法は、物体の存在しない空隙領域も含めた全領域を格子分割する。解析格子は空間に固定されたままで、物体はその固定された解析格子を超えて変形する。流体解析は通常はこのEulerian法が用いられる。またLagrangian法およびEulerian法のそれぞれの長所を取り入れたArbitrary Lagrangian Eulerian法(ALE法)も提案されている¹⁾²⁾³⁾⁴⁾。

筆者らは、Lagrangian法が常套手段である固体の大変形解析に対して、Eulerian法の適用を行いその成果を発表している⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾。Eulerian法で空間に固定された解析格子を用いることによって、極めて大きな変形の際にも解析格子が歪むことなく有限要素の数値的健全性が確保される。また新たな自由境界面を特別な方法なしに生成させることができるので、破断・破壊・亀裂進展などを効率的に再現可能である。このように固体解析にEulerian法を適用することによって、Lagrangian法での固体解析が抱えていた問題点を克服できる。

しかしながら、これまでに筆者らがEulerian有限要素法による大変形固体解析で扱ってきた現象は、時間スケールの極めて短い動的現象にとどまっている。これ

は時間積分において中央差分法を用いるいわゆる動的陽解法を採用しているために、クーラン条件により時間増分が制限されるためである¹¹⁾。一方で、Newton-Raphson法に代表される反復計算によって解を収束させる陰解法は、時間増分に制限がないため時間スケールの長い現象や静的現象を効率的に取り扱うことが可能である。

本研究では亀裂進展を扱うが、亀裂進展解析は古典的な破壊力学に立脚するものである¹²⁾。さらにより身近な亀裂現象との比較検討のためには静的破壊力学の取り扱いが必要不可欠である。図-1はLagrangian法による亀裂の再現を示したものである。Lagrangian法においては、大変形時に解析格子の歪みにより、その有限要素の数値的健全性が損なわれることはよく知られている。また亀裂などの再現においては、二重節点などの特別な手法を用いる必要がある。それに対して図-2はEulerian法による亀裂の再現を示している。Eulerian法においては解析格子が歪むことがないので、二重節点などを用いることなく自由境界面の生成が可能である。よってEulerian法によって大変形挙動の絡んだ亀裂進展などを効率的に取り扱えると期待できる。

以上のような背景において、本研究ではまず既存の動的陽解法によるEulerian有限要素法を反復計算による静的陰解法に拡張する。そして静的破壊力学を導入することで、これまでに動的陽解法によるEulerian有限要素法では解析が不可能であった静的問題における亀裂進展解析を実施する。

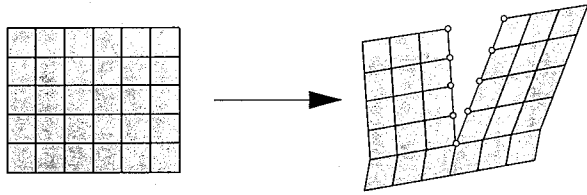


図-1 Lagrangian 法による亀裂の再現

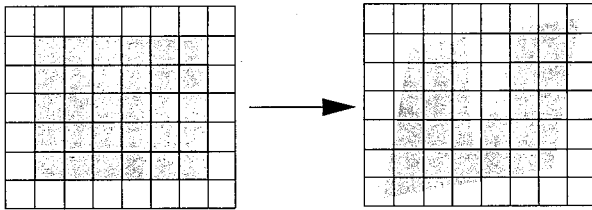


図-2 Eulerian 法による亀裂の再現

2. Eulerian 有限要素法

ここでは本研究で用いる Eulerian 有限要素法について述べる。

2.1 operator split 法

Eulerian 法での解くべき方程式の一般形は以下のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = F_{ext} \quad (1)$$

ここで ϕ は任意の関数, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$ はそれぞれ物質点の速度ベクトル及び位置ベクトル, F_{ext} は外力項である。また左辺第 2 項は移流項と呼ばれる。

まず式 (1) を解く事を考える。解法として operator split 法¹³⁾を用いる。operator split 法では、式 (1) を以下の 2 式に分離する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F_{ext} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (3)$$

式 (2) は物体を変形させる非移流計算であり、式 (3) は歪んだ解析格子を固定座標に引き戻し、諸量を移流させる移流計算である。ここで非移流計算においては時間を進めて、移流計算においては時間を固定していると解釈する。よって式 (3) の左辺第 1 項は厳密には存在しないが、移流計算をするために必要であるため擬似的に明記している。このような操作をそれぞれの増

分ステップで繰り返しながら計算を進めていくことにより、解析格子を固定した Eulerian 法での解析が可能となる。

2.2 接線剛性方程式

図-2 から分かるように、Eulerian 法においては 1 つの要素に空隙と物質もしくは複数の物質が混在する。それら各々の物体含有率を設定するために、要素内の各物質の含有率を 0 から 1 の密度関数 f_i で表現する Volume of Fluid (VOF 法)¹⁴⁾を用いる。ここで i は物質番号を意味する。Eulerian 有限要素法ではこの密度関数を用いることによって、図-2 のような空隙や複数の物質を有する解析格子の諸量の評価を行う必要がある。このように複数の物質が混入した解析格子の平均的な諸量を評価する理論は、混合理論¹⁵⁾と呼ばれており様々なアプローチがある。本研究では、1 つの解析格子に混入する複数の物質のすべてが同一のひずみ増分を有すると仮定する混合理論を用いる。

まずは節点変位および節点座標からひずみ増分 $\Delta \epsilon$ を評価する。混合理論においては、各物質の密度関数に関わりなく、1 つの解析格子に各物質が満杯に詰まった状態であるとして各物質の応力増分を求める。図-3 は 1 つの解析格子に 2 つの物質が混入している場合である。

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{C}_i : \Delta \epsilon \quad (4)$$

ここで σ は 2 階の Cauchy 応力テンソル, $\mathbf{C}$ は 4 階の構成式テンソルである。

時刻 n から $n+1$ における応力の更新も各物質で行う。

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \Delta \sigma_i \quad (5)$$

それぞれの物質の応力と密度関数から次式のように解析格子における平均応力 $\bar{\sigma}$ を求める。

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^m f_i \sigma_i \quad (6)$$

m は解析格子に混入している物質の総数である。ここでは空隙も 1 つの物質とみなしている。つまり単一物質の場合でも Eulerian 法における混合理論においては m は 2 である。

混合理論における平均化された接線剛性マトリクス $\bar{\mathbf{K}}$ も同様に求めることができる。

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^m f_i \cdot \mathbf{K}_i \quad (7)$$

式 (7) における各物質の接線剛性 $\mathbf{K}_i$ は、以下のような材料剛性マトリクス $\mathbf{K}_{iL}$ と幾何剛性マトリクス $\mathbf{K}_{iG}$ の和として評価できる¹⁶⁾。

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{iL} + \mathbf{K}_{iG} \quad (8)$$

さらに平均化された内力ベクトル $\bar{Q}$ は、ひずみと変位を関連付ける B マトリクスを用いて以下のように求められる。ここで V は物体の体積である。

$$\bar{Q} = \int_V B^T \bar{\sigma} dV \quad (9)$$

式 (7) の接線剛性マトリクスと式 (9) の内力ベクトルから、次式のように非移流計算において解くべき接線剛性方程式を求めることができる。なお F_{ext} は外力ベクトルである。

$$\bar{K} \Delta u = F_{ext} - \bar{Q} \quad (10)$$

式 (10) の右辺は残差力となり、この残差力が設定値以下となるように反復計算を用いて変位増分ベクトル Δu を求解する。

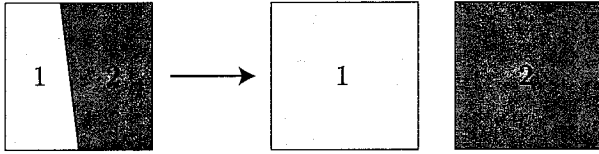


図-3 混合理論

2.3 移流計算

式 (10) の非移流計算の後に移流計算を行う。固体解析での移流計算においては、応力や構成式パラメータなどの経路依存性のある諸量全てを移流させる必要がある。移流方程式の解法として、2 次精度の移流計算法である MUSCL 法¹⁷⁾を採用する。

まず式 (3) の左辺第 1 項を次のように差分近似する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad (11)$$

式 (11) を式 (3) に代入すると、次のような整理できる。

$$\phi^{n+1} = \phi^n - v \Delta t \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (12)$$

式 (12) から分かるように、右辺第 2 項が時間に依存する。ところで、時刻 t^n から t^{n+1} における変位増分ベクトル Δu には次のような関係がある。

$$\Delta u = x^{n+1} - x^n = v \Delta t \quad (13)$$

これを式 (12) に代入すると、

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (14)$$

となり移流方程式 (3) から時間 t を排除できた。よって静的解法においても式 (14) を用いて時間に関係なく諸量を移流させることができる。

3. 破壊力学

静的問題に対応した破壊力学は、大きく線形破壊力学と非線形破壊力学に分類することができる。以下に本研究で用いる非線形破壊力学の主要パラメータと破壊条件について説明する。

3.1 非線形破壊力学

亀裂先端の塑性領域が亀裂長さに対して無視できない場合やさらに降伏が進んだ状況では、線形破壊力学を適用することはできない。非弾性状態の破壊の評価では非線形な破壊力学のアプローチが必要である。その非線形破壊力学でよく用いられるパラメータとして J 積分がある。亀裂進展に伴うひずみエネルギーの変化率をエネルギー解放率というが、 J 積分は、このエネルギー解放率を亀裂先端から離れた場所の応力場や変位場を用いて定義する方法である。Rice¹⁸⁾ の定義した J 積分は、

$$J = \int_{\Gamma} (W dx_2 - T \frac{\partial u}{\partial x_1} ds) \quad (15)$$

と表される。ここで、 W はひずみエネルギー密度、 T は Γ 上の表面力、 u は変位ベクトルである。図-4 に示すように、亀裂先端から亀裂の向きに x_1 、その直角方向に x_2 を定義している。また s は積分経路の長さである。なおこの J 積分値は、どのような積分経路をとっても同じ値となる経路独立性を満たしている¹⁹⁾。

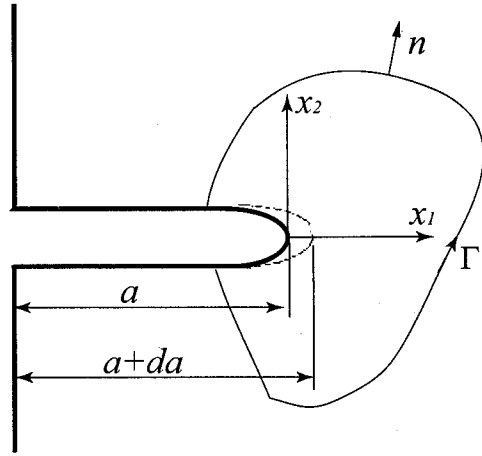


図-4 J 積分の評価

J 積分により計算した J 値が、限界値である破壊靱性値 J_{IC} に達した時に亀裂が進展すると考える。この J_{IC} は材料によって決まるパラメータであり、図-5 に示すように、亀裂鈍化直線と $J-R$ 曲線との交点で求まる¹²⁾。ここで亀裂鈍化直線は降伏応力 σ_{ys} 、亀裂進

展長さ Δa により決まるもので、 M には通常 2 が入るが、 $J-R$ 曲線の形状によってそれ以外が入る場合もある。

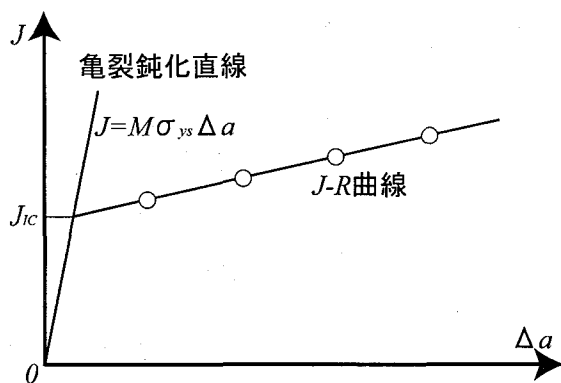


図-5 破壊靱性値

3.2 Eulerian 有限要素法による J 値の評価

本研究では 2 次元 4 節点アイソパラメトリック要素を用いており、図-6 は J 値を評価する際の積分経路を示している。式 (15) で表される J 値は、亀裂先端近傍を囲む経路において積分することにより評価する。亀裂先端要素を囲むような要素で経路をとり、 J 値の評価に用いる諸量は各要素でのサンプリング点での平均値を用いる。

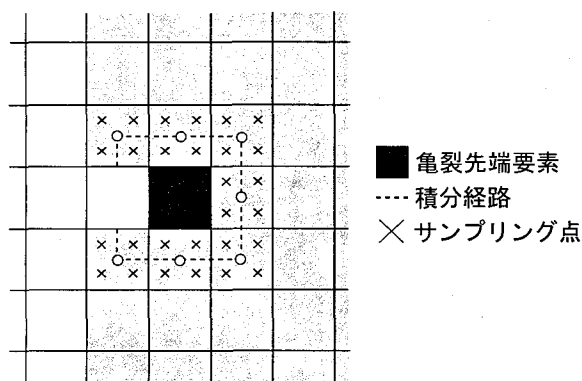


図-6 積分経路

式 (15) における第 1 項内の W は、積分経路上の要素の各サンプリング点で

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma : d\epsilon \quad (16)$$

を計算し各要素で平均したものを、その要素のひずみ

エネルギーとして用いる。式 (16) 内の応力およびひずみ速度共に移流計算後の値を用いて時間積分している。また第 1 項の評価においての積分は x_2 方向だけなので、解析格子が変形しない Eulerian 有限要素法では、積分経路の変形による傾きを持つことがなく、図-7 のように計算が簡略化できる。

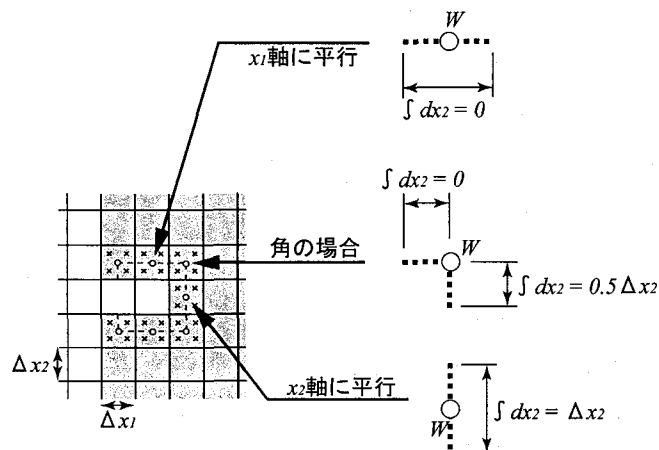


図-7 J 積分の第 1 項の評価

式 (15) における第 2 項内の表面力 T は、積分経路の外向法線方向 n の応力成分を用いる。

$$T = \sigma \cdot n \quad (17)$$

経路長さ s で積分するため、要素で平均した諸量に要素長さを乗じる。図-8 のように経路の角の要素ではそれぞれのベクトルに対して要素長さの半分の乗じる。また第 2 項の評価においても式 (16) と同様な積分を施していることを付記する。

4. 亀裂進展法

前節で非線形破壊力学に起因する Eulerian 有限要素法における破壊評価について議論した。ある物質の破壊後にさらに亀裂を進展させるためには、どのような数値的操作を与えるかを決定する必要がある。Eulerian 有限要素では解析格子は固定されているので、物質の破壊を表現するために解析格子そのもの操作することは困難である。その代わりに図-9 に示すように亀裂先端要素に隣接した要素のうちの 1 つの物質の密度関数 f_i をゼロに設定する。

さらに亀裂の進展方向を決定する必要がある。本研究では、図-10 のように隣接する要素の平均相当塑性

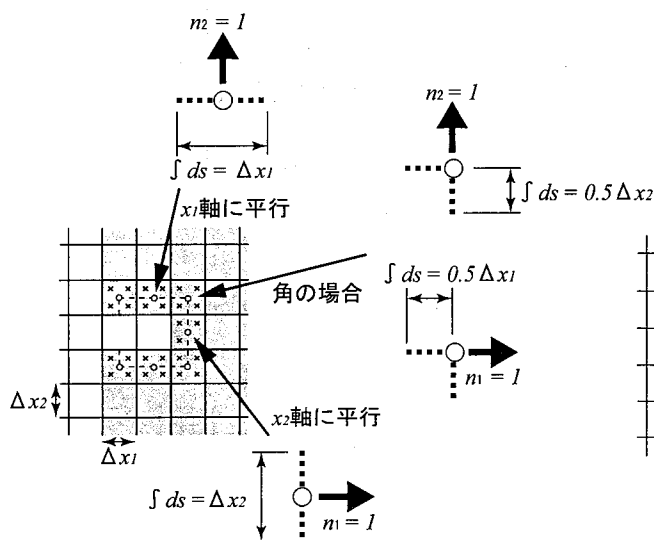
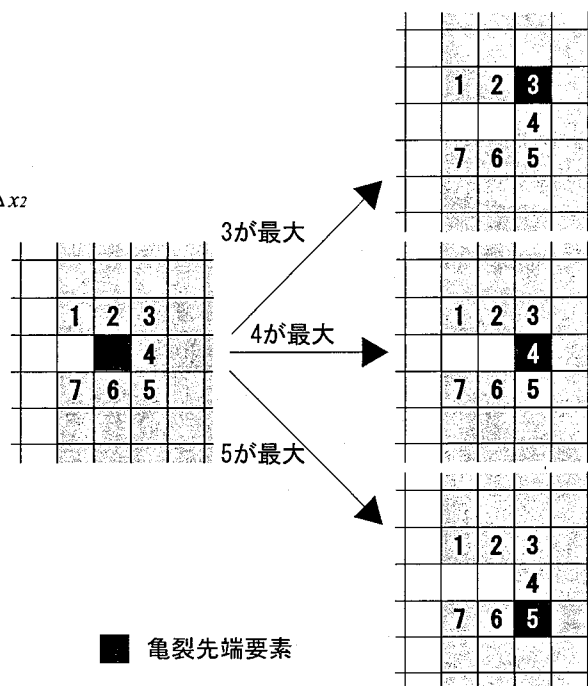
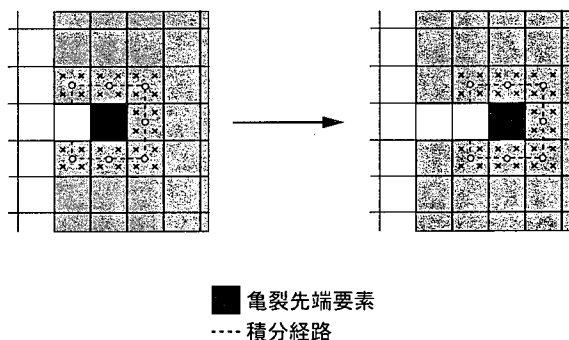


図-8 J 積分の第 2 項の計算



■ 亀裂先端要素



■ 亀裂先端要素
---- 積分経路

図-9 亀裂の進展

図-10 亀裂の進展方向

5.1 解析モデル

図-11 は初期亀裂を有する解析モデルである。対称性から材料の半分のみを扱っており、上端に y 方向の一樣な強制変位を与える。解析格子分割が空隙部分を除いて 30×61 の場合、図-12 のようになる。また表-1 は本解析で用いた一般的な金属材料を対象とした材料定数を示している。

表-1 材料定数

ヤング率	$E(\text{GPa})$	206
ポアソン比	ν	0.3
降伏応力	$\sigma_Y(\text{GPa})$	0.431
塑性係数	$H'(\text{GPa})$	0
破壊靱性値	$J_{IC}(\text{MJ/m})$	0.3

ひずみを評価してその値が最大である要素の密度関数をゼロに設定する。以上のような操作を繰り返すことによって、物体の破壊および亀裂進展解析を Eulerian 有限要素法により実施することが可能となる。

5. 解析結果

ここでは、これまでに述べた Eulerian 有限要素法による亀裂進展解析を実施する。まずは J 積分値の経路独立性を検証するために、2 種類の積分経路における J 積分値とその理論値との比較検討を行う。そしてその検討結果をもとに J 積分値の積分経路を決定して亀裂進展解析に適用する。

5.2 J 積分の検証

J 積分値の経路独立性を検証ために、亀裂進展を無効化し 2 つの異なる積分経路での J 積分値のみを解析する。図-13 は扱う 2 つの積分経路である。また、 J 積分の理論値としてエネルギー解放率を以下のように定義する¹⁹⁾。

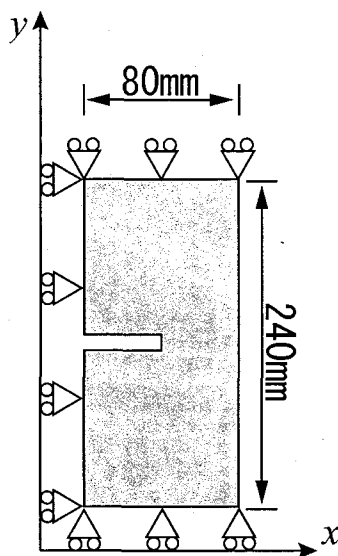


図-11 解析モデル

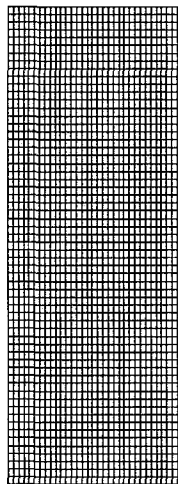
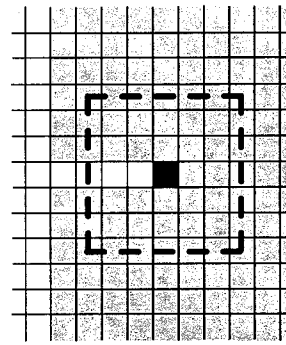


図-12 解析格子分割 (30 × 61 分割)

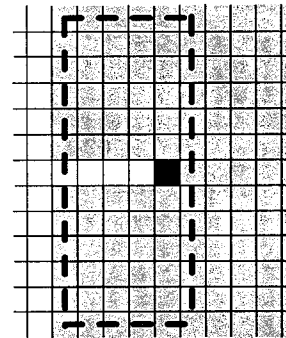
$$J = \frac{\int P du_{(\text{進展前})} - \int P du_{(\text{進展後})}}{da} \quad (18)$$

ここで P は荷重であり、 du は上端部の変位である。エネルギー解放率とは、新生面形成に必要なエネルギーの変化率であり、亀裂が進展したときに変化するエネルギー変化率と言い換えられる。つまり初期亀裂状態におけるひずみエネルギーと、亀裂が1要素分進展した状態のひずみエネルギーとの差を亀裂進展長さ（要素長さ）で除した値である。

図-14、図-15 および図-16 は解析格子分割をそれぞれ 10×21 、 20×41 および 30×61 とした場合の、



積分経路1



積分経路2

図-13 2つの積分経路

2つの積分経路における J 値と式 (18) で評価されるその理論値との荷重の関係を示している。ここで上記3つの解析において理論値からすでに異なるのは、亀裂に対して1要素分の幅を当てはめているため要素寸法依存性が発生したためだと考えられる。図-14、図-15 および図-16 の解析結果から、要素分割数によらず比較的安定した J 値を評価できる。しかし図-13の積分経路1に対し積分経路2の J 積分の精度が悪い。これは、Eulerian 有限要素法の密度関数による数値拡散により、亀裂先端要素の応力集中が忠実に再現されていないためであると解釈できる。

5.3 亀裂進展シミュレーション

上記で J 積分がより高精度に評価できた積分経路1を用いて、 30×61 分割の要素分割数で亀裂進展シミュレーションを行う。図-17はそのシミュレーション結果である。ここで ϵ は伸びひずみであり、コンターは相当塑性ひずみである。この結果より本研究におけるEulerian型有限要素法が亀裂進展を定性的には再現できており、終局的な破断に至るまでの過程をシミュレートできることが分かる。

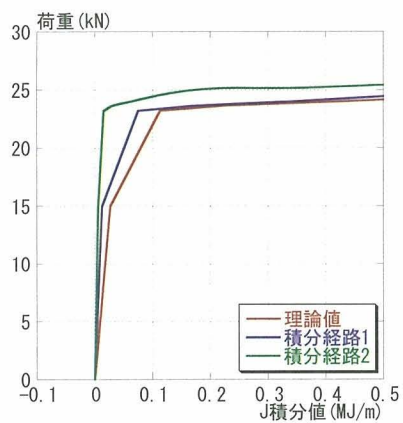


図-14 10 × 21 分割

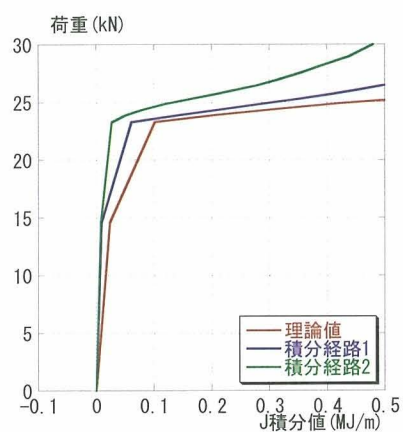


図-15 20 × 41 分割

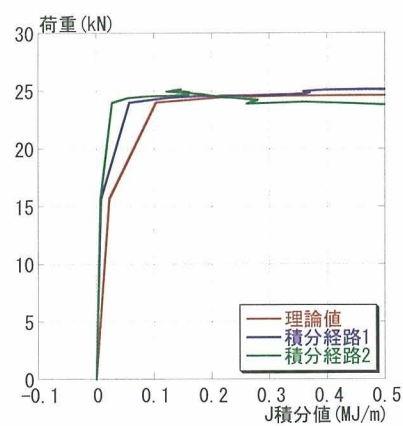
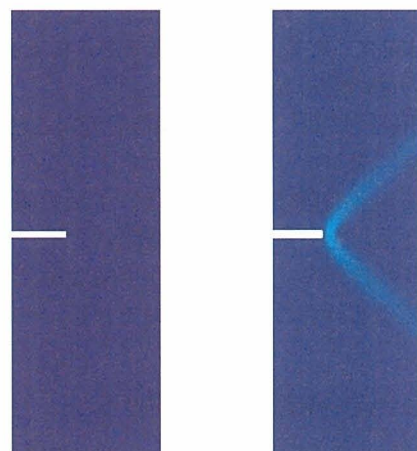
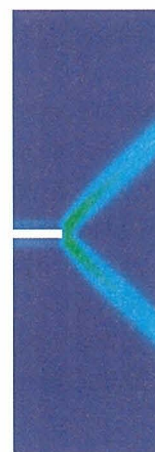


図-16 30 × 61 分割

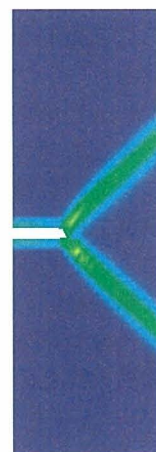


$\epsilon = 0.0$

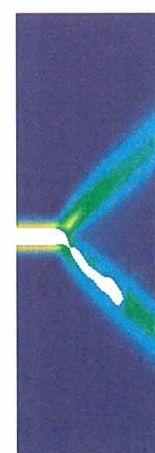
$\epsilon = 0.00375$



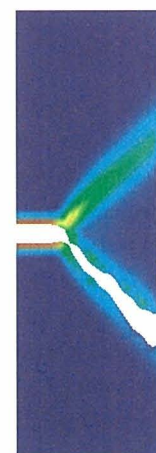
$\epsilon = 0.0075$



$\epsilon = 0.01125$



$\epsilon = 0.0150$



$\epsilon = 0.02$



図-17 亀裂進展シミュレーション

6. 結言

本研究で得られた結論を以下にまとめる。

1. 静的陰解法を Eulerian 有限要素法に適用することによって、これまでに困難であった Eulerian 解法での静的解析が可能となった。
2. 解析格子に対して特別な操作を施すことなしに、亀裂進展をシミュレートできた。
3. Eulerian 有限要素法のための J 積分値の評価方法を提案した。解析格子が空間に固定されているという特性から、積分経路が単純な形状となり積分に要する計算コストを軽減できる。

最後に今後の課題を以下に挙げる。

1. 数値拡散を軽減することにより亀裂先端近傍の応力分布の精度を向上させる。
2. さらに効果的な亀裂進展方向の決定方法などを検討する。
3. Eulerian 有限要素法では亀裂先端要素の密度関数が必ずしもゼロとならない。その場合の積分経路についての数値的な取り扱い方法を検討する。
4. 本研究では、亀裂進展を密度関数をゼロにすることによって表現している。今後は力学的解釈が明確な亀裂進展の再現方法を検討する。
5. Eulerian 有限要素法における亀裂進展解析結果と実験結果等との比較による定量的整合性を検討する。

参考文献

- 1) Huerta, A. and Casadei, F. : New ALE applications in non-linear fast-transient solid dynamics. *Engineering Computations*, **11**, 317-345, 1994.
- 2) Rodriguez-Ferran, A., Casadei, F. and Huerta, A.: ALE stress update for transient and quasistatic process, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 241-262, 1998.
- 3) Rodriguez-Ferran, A., Perez-Foguet, A. and Huerta, A: Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 1831-1851, 2002.
- 4) Liu, W.K. Belytschko, T. and Chang, H.: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element formulation for path-dependent material, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **58**, 227-246, 1986.
- 5) 岡澤重信, David J. Benson: Eulerian ハイドロコードによる破壊解析, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, 209-214, 2003.
- 6) 開田隆弘, 高浦弘志, 岡澤重信, 藤久保昌彦: オイラー

型解法による大変形ボクセル解析, 応用力学論文集, 土木学会, **7**, 461-468, 2004.

- 7) 岡澤重信, David J. Benson: オイラー型解法による高速切削加工シミュレーション, 日本機械学会論文集 (A 編), **70-691**, 420-425, 2004.
- 8) Benson, D.J. and Okazawa, S.: Contact in a multi-material Eulerian finite element formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 4277-4295, 2004.
- 9) Doig, R., Okazawa, S. and Fujikubo, M.: High-speed contact-impact simulation with Lagrangian and Eulerian hydrocode, 応用力学論文集, 土木学会, **8**, 267-276, 2005.
- 10) 金子恭久, 岡澤重信, 樫山和男: 安定化有限要素法を用いた Eulerian 解法による固体の大変形解析, 応用力学論文集, 土木学会, **8**, 311-317, 2005.
- 11) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, 151-158, 2003.
- 12) 萩原芳彦, 鈴木秀人: よくわかる破壊力学, オーム社, 2000.
- 13) Chorin, A.J.: Flame advection and propagation algorithms, *Journal of Computational Physics*, **35**, 1-31, 1980.
- 14) Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of three boundaries, *Journal of Computational Physics*, **39**, 201-225, 1981.
- 15) Benson, D.J.: A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **140**, 59-86, 1997.
- 16) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 17) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection, *Journal of Computational Physics*, **23**, 276-299, 1977.
- 18) J. R. Rice : A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, **35**, 379-386, 1968.
- 19) 星出敏彦: 基礎強度学 破壊力学と信頼性解析への入門, 内田老鶴圃, 1998.

(2006 年 4 月 13 日 受付)