

移動境界を考慮した浅水長波流れ解析のための メッシュ細分化手法を用いた Space-Time 安定化有限要素法

A Space-Time Stabilized Finite Element Method using Mesh Refinement Method
for Shallow Water Flow Considering Moving Boundaries

高瀬慎介*・田中聖三**・榎山和男***

Shinsuke TAKASE, Seizo TANAKA and Kazuo KASHIYAMA

*正会員 修士(工学) (株) 計算力学研究センター 技術開発部(〒142-0041 東京都品川区戸越1-7-1 戸越NIビル)

**正会員 博士(工学) 中央大学助手 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a space-time stabilized finite element method for shallow water flow considering moving boundaries. The finite element method is introduced for both space and time discretization to express the moving boundaries, accurately. The SUPG formulation is employed for the finite element discretization, and the shock capturing method is introduced to remove the numerical instability at the free surface. A new stabilized parameter for shock capturing term and the adaptive remeshing technique are introduced to improved the numerical accuracy. The present method is applied to several numerical test examples and the computed results are compared with the existing analytical and experimental results.

Key Words : *Shallow Water Flows, Space-Time Finite Element Method, Moving Boundaries, Mesh Refinement Method*

1. はじめに

洪水・津波・高潮などによる浸水災害は、人間の生命・財産に直接的に影響を与えるため重要な社会問題となっている。これらの災害予測を行う上で重要となるのは、浸水域を精度良く予測することであり、これまで模型実験による方法と数値シミュレーションによる方法により検討がなされている。近年では、計算機性能および計算技術の進歩、さらには高精度な2次元および3次元の数値地図の整備・普及により、数値シミュレーションによる方法が数多くなされるようになってきている。

浸水災害の予測を数値シミュレーションにより行う場合、移動する水際線の境界と水面形状を高精度に解析することが重要となる。移動境界問題に対する数値解析手法はいくつか提案されているが、図-1のように、水際線をEuler的に扱う方法^{1)~4)}とLagrange的に扱う方法^{5)~6)}に大きく分類される。Euler的手法は、計算領域をあらかじめ要素分割して、各時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定する手法である。この方法は、水際線を固定メッシュを用いて間接的に表現する方法であり、複雑な地形に対しても計算は比較的容易に行える長所があるが、水際線を固定メッシュを用いて表現しているため、水際線位置の精度は要素サイズに依存する。一方、Lagrange的手法は移動メッシュを用いて水際線を直接的に表現する方法であり、複雑地形に対する適用性はEuler的手法に比べてやや劣る

が、Euler的手法に比べて比較的粗いメッシュを用いても水際線位置を精度良く求めることが可能である。

本研究では、移動境界を正確に表現可能なLagrange的手法に着目し、その中でも代表的な手法であるSpace-Time法^{7)~8)}に基づく安定化有限要素解析手法を提案するものである。Space-Time法は、時間と空間領域に対して有限要素法により離散化を行う手法であり、移動境界をLagrange的に取り扱い移動境界位置を正確に表現することができる手法である。Space-Time法の浅水長波方程式への適用の試みは、著者らによりなされているが⁵⁾、流速や水位の物理量および水際線位置の高精度化に関する検討は十分になされていなかった。

そこで、本論文は、浅水長波流れに対するSpace-Time法に基づく安定化有限要素法の高精度化に関する検討を行うものである。具体的には、物理量のおよび水際線位置の高精度化を行うために、Space-Time有限要素法における安定化項である衝撃捕捉項に対して、新たな安定化パラメータの提案を行うとともに、水位の変化量に応じて要素の局所細分化を行うメッシュ細分化手法^{9)~10)}の導入を行った。また、水際線位置の決定には、最小二乗法に基づく反復計算手法を適用している。本手法の有効性を検討するため、数値解析例として、段波問題、ダムブレイク問題、障害物のあるダムブレイク問題を取り上げ、理論解や実験値およびEuler的手法を用いた安定化有限要素法による計算結果との比較を行った。

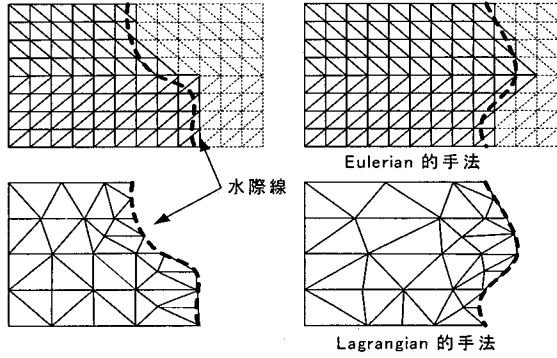


図-1 移動境界処理方法の分類

2. 数値解析手法

2.1 支配方程式

浅水長波流れの支配方程式は、非圧縮粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を、浅水長波の仮定に基づき鉛直方向に平均化した浅水長波方程式で表現される。支配方程式として、保存型の浅水長波方程式を用いると、以下ようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{R} = 0, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は保存変数であり、次式のように定義される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ここで、 h は全水深、 u および v はそれぞれ、平均流速の各方向成分を示す。また、 $\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{K}_{ij}$ はそれぞれ移流項と拡散項のマトリックスであり、次式のようになる。

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & u & 0 \\ -uv & v & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & 0 & u \\ c^2 - v^2 & 0 & v \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u & 2 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 \\ -2v & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

ここで、 $c = \sqrt{gh}$ は波速、 ν は渦動粘性係数であり、以下のように定義される。

$$\nu = \frac{\kappa}{6} hu_*, \quad u_* = \frac{gn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (9)$$

ここで、 u_* は摩擦速度、 n はマンニングの粗度係数、 κ はカルマン定数である。また、 $\mathbf{R}$ は圧力と底面摩擦に関する項であり、次式のようになる。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{u_*}{h} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{v_*}{h} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

ここで、 z は底面の高度である。

2.2 Space-Time 安定化有限要素法の定式化

Space-Time 安定化有限要素法は、時間と空間の両方に対して有限要素法を適用する方法である。まず、図-2に示すように時間・空間領域を N 個の時間・空間要素 Q_n に分割する。ここで、 Q_n は時刻レベル t_n と t_{n+1} の間の時間・空間領域である。弱形式における積分は時間・空間領域 Q_n において行われる。時間・空間要素の補間関数は、時間・空間ともに 1 次の多項式を用いている。空間に対しては連続であるが、時間に対しては時刻レベルを横切って不連続なものである。支配方程式 (1) に対して、安定化 Space-Time 法を適用すると以下の重み付き残差方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\ & + \int_{\Omega_n} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) dQ \\ & + \int_{\Omega_n} (\mathbf{U}^*)_n^+ \cdot ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Q_n^e} \tau \left[\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + (\mathbf{A}_i)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_j} \right) \right] \\ & \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{R} \right] dQ \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Q_n^e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\ & = \int_{\Omega_n} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R} dQ + \int_{P_n} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{H} dP, \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{U}^*$ は保存変数に関する重み関数、 $\mathbf{H}$ はノイマン型の境界条件、 P_n は時間・空間要素の縦境界である。左辺第1項、第2項は通常の Galerkin 項、第3項は時刻 $t = t_n$ における解の連続性を弱く要求するものである。第4、5項は安定化に寄与する項である。第4項は上流化による安定化項である SUPG 項であり、安定化

パラメータ^{11) 12)}である τ は以下のように定義される.

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

ここで, Δt は微小時間増分量, h_e は要素サイズである. また, 第5項は不連続面での数値不安定を回避する衝撃捕捉項であり, 安定化パラメータである δ は次節で詳しく述べる.

第3項における $(\cdot)_n^+$, $(\cdot)_n^-$ はそれぞれ境界における節点の上限値, 下限値を表しており, 次式で定義される.

$$(\mathbf{U}^h)_n^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}(t_n \pm \epsilon) \quad (13)$$

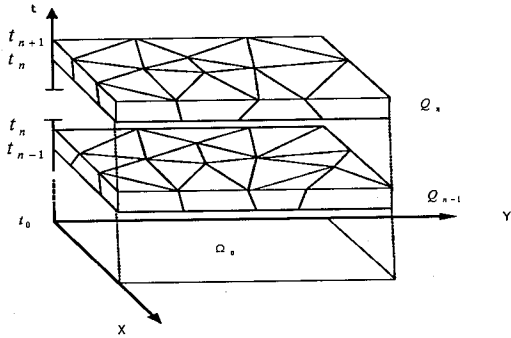


図-2 時間・空間要素 (Space-Time Slab)

2.3 衝撃捕捉項の安定化パラメータ

浅水長波方程式を安定に解析するために, 移流項の卓越に対する不安定性に対しては, SUPG法を適用することで解消することができるが, 水位の不連続面における水面振動に対して安定に解析を行うためには, 式(11)に示す第5項の不連続面での数値不安定を回避する衝撃捕捉項を導入する必要がある. 衝撃捕捉項における安定化パラメータについてはいくつか提案されており, 筆者らの研究グループでは, Navier-Stokes方程式に対して提案されていた安定化パラメータを用いていた²⁾.

$$\delta = \frac{h_e \|\mathbf{u}\|}{2} \quad (14)$$

この安定化パラメータの大きさは, 流速のみに依存しており, 必ずしも適切とは言えない. そこで, 本研究では, Tezduyarが圧縮性流体に対して提案した安定化パラメータ¹³⁾を参考に, 以下のように水位を考慮した安定化パラメータを提案する.

$$\delta = \tau_{shoc} (\|\mathbf{u}\|)^2 \quad (15)$$

$$\tau_{shoc} = \frac{h_{shoc}}{2\|\tilde{\mathbf{u}}\|} \left(\frac{|\nabla^2 H^e|}{|\nabla^2 H|_{max}} \right)$$

$$\frac{h_{shoc}}{2\|\tilde{\mathbf{u}}\|} = \left(\sum_{\alpha=1} (c|j \cdot \nabla N_\alpha| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_\alpha|) \right)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + c^2},$$

ここで, h_{shoc} は, 水面勾配の方向に対する波速と流速による要素サイズである. 本パラメータは, 水面勾配の変化量を基準に値の大きさを調整している点に特徴がある. そのため, 水面の変化量が小さいところで自動的に過剰な粘性が入らないように工夫を施している.

2.4 メッシュ細分化手法の導入

汎用解析等の流れ解析を行う場合, 地形の変化や水位の変化の激しいところでは, 現象を表現可能な解像度をもった要素を用いることが望ましい. 水位の変化などは, 時々刻々変化するため, その変化に応じて要素の細分化を行う必要がある. そこで, 本論文では, 図-3に示すように, 時間・空間要素 (Space-Time Slab) に四面体要素を用いることにより, 時刻 t_{n+1} と時刻 t_n で用いる要素を四面体要素でつなぎ, 解析を行っている. Space-Time Slabの再構築に関するアルゴリズムは, 以下のとおりである.

1. 各要素に対して, 時刻 t_n で得られた水位を用いて水位の2階微分値を求める.
2. 時刻 t_{n+1} 面への細分化節点の生成のため, 1.で得られた水位の2階微分値の中心値を基準とし, その値より大きくなる要素に対して, 2階微分値の値に応じて2倍と4倍の2段階に節点密度を設定する (図-3(a)). このとき, 同じ時刻の隣接する要素では, 要素のひずみを少なくするため, 節点密度変化は1段階とする.
3. 時刻 t_n での要素と2.で作成した要素から3次元Delaunay分割を用いてSpace-Time Slabの再構築を行う. (図-3(b))

Space-Time Slabの再構築には, 3次元Delaunay分割法¹⁴⁾を用いている. これにより, 与えられた節点に対し, 四面体要素を自動的に生成することが可能になる. また, Space-Time法では, Space-Time Slabを用いて解析を行うため, 解析結果に対して要素の細分化を行う場合に生じる値の補間を行うことなく, 解析を行うことができる長所がある.

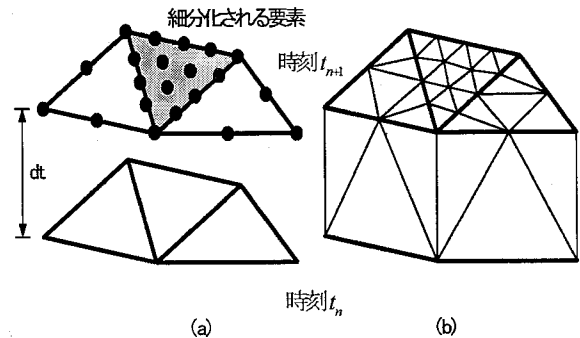


図-3 Space-Time Slabの再構築

2.5 水際線の境界処理方法

本手法では、水際線をLagrange的に取り扱い、移動境界上の節点移動距離を求めた後に、内部領域の節点移動量は、移動境界上の節点移動距離を境界値とした線形弾性方程式の弱形式を解くことにより求める。水際線の移動境界処理を含む解析領域の更新アルゴリズムは以下ようになる。

1. 時刻 t_{n+1} における水際線の位置 $X_{n+1} = x_n$ (時刻 t_n の位置) と仮定する。
2. Space-Time有限要素法によって解析を行う。その際、時刻 t_n での水際線境界上の水位を $H_n = 0$ として境界条件を与える。
3. 時刻 t_{n+1} の実流速を算定する。実流速の算定には式(16)に示す最小二乗法に基づいた方法を適用する。
4. 3.で求めた実流速を用いて水際線の座標位置を求める。
5. 4.で求めた座標位置を領域境界の変位として線形弾性方程式の弱形式を解くことにより、内部領域の節点移動量を求める。
6. 節点位置の収束判定を行い、収束していなければ、 X_{n+1} を時刻 t_{n+1} における水際線位置として、2.に戻り収束するまで計算を行う。

なお、3.の実流速の算定を行う際、水際線の近傍での水深が0に近い場合には、保存変数を水深で除する計算が破綻するおそれがある。このため、本手法においては、水際線の流速 u_{n+1}^- を次式のように最小二乗法に基づいて計算を行った。

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{n+1}^- d\Omega_{n+1} = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u}_e)_{n+1}^- d\Omega_{n+1} \quad (16)$$

ここで、 N_{em} は要素数を示す。 $(\mathbf{u}_e)_{n+1}^-$ は次式のように表現される。

$$(\mathbf{u}_e)_{n+1}^- = \frac{1}{H^e} \sum_{a=1}^3 (U_{n+1}^-)_a N_a \quad (17)$$

ここで、 N_a は形状関数、 H^e は要素平均水深である。式(16)より得られた有限要素方程式を解くことにより、水際線での実流速が得られる。

また、5.で使用している線形弾性方程式の基礎方程式は、以下ようになる。

$$\nabla \cdot \sigma_m(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (18)$$

ここで、構成方程式は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mathbf{v}) &= \lambda_m (\text{tr } \varepsilon_m(\mathbf{v})) \mathbf{I} + 2\mu_m \varepsilon_m(\mathbf{v}), \\ \varepsilon_m(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は節点移動量、 λ_m, μ_m は要素の歪みを制御するパラメータであり、以下のように定義する¹⁵⁾。

$$\lambda_m = \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{\Delta_e}, \quad (20)$$

$$\mu_m = 1, \quad (21)$$

ここで、 $\Delta_{max}, \Delta_{min}, \Delta_e$ はそれぞれ最大、最小、評価対象の要素面積を表している。

このパラメータは、Lagrange的手法を用いる場合の問題点の1つである節点の移動に伴う要素の過度の歪みを防ぐものである。このパラメータを導入することにより、小さな要素に対しては強い拘束を課して変形を少なくし、一方で大きな要素に関しては小さい要素に比べ変形を大きく与えることができる。

また、境界条件は以下のように与えられる。

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_m \quad \text{on } \Gamma_{g_m}, \quad (22)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma_m = \mathbf{h}_m \quad \text{on } \Gamma_{h_m}. \quad (23)$$

式(18)に対してGalerkin法を用い、重み付き残差方程式(弱形式)を導くと以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega} \varepsilon_m(\mathbf{w}) : \sigma_m(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_{h_m}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h}_m d\Gamma. \quad (24)$$

式(24)を各収束反復計算において解くことにより節点移動量を求めている。

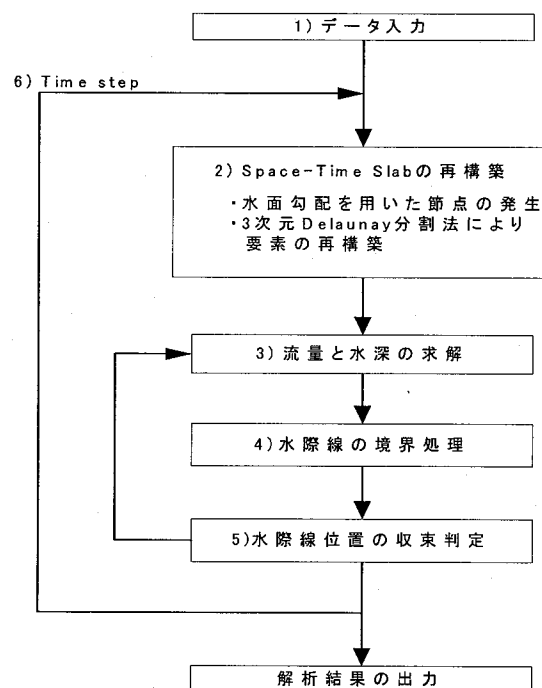


図-4 フローチャート

2.6 解析アルゴリズム

前述の解析手法による計算の流れをまとめると、図-4に示すフローチャートのようになる。以下にその手順を示す。

1. 初期形状に合わせて、有限要素分割、境界条件、計算条件を入力する。
2. 水位の変化量を用いて、要素の細分化を行い、そのデータより3次元Delaunay分割を用いてSpace-Time Slabを作成する。

3. 保存形の浅水長波方程式の運動方程式と連続式より、流量と水深を求解する。
4. 水際線の境界処理を行い、線形弾性方程式(18)の弱形式(24)を解き、解析領域の更新を行う。
5. 水際線の移動量の収束判定を行い、移動量が収束するまで、3)に戻り、反復計算を繰り返す。
6. 時間進行を行い、時間ステップが終了するまで2)～5)を繰り返す。

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために、数値解析例として、段波問題、ダムブレイク問題、障害物のあるダムブレイク問題を取り上げ、理論解や実験値およびEuler的手法による計算結果と比較を行った。

3.1 段波問題

提案する安定化パラメータおよびメッシュ細分化手法の有効性の検討を行うことを目的として、段波問題を取り上げる。初期の波形図を図-5に示す。計算に用いた有限要素分割は、三角形要素を使用し、節点数：303、要素数：400、x方向分割幅0.1[m]（100分割）、y方向分割幅0.1[m]（2分割）である。境界条件として、壁面においてはslip条件を与えた。また、微小時間増分量は、0.001[s]を用いて解析を行った。

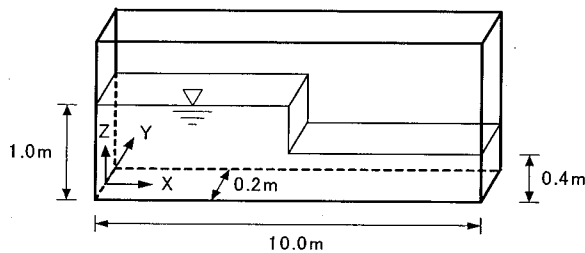


図-5 段波問題の初期条件図

まず、数値解析結果として、1.0[s]後における計算結果と理論解¹⁶⁾との水面形状および流速分布の比較を図-6、図-7に、また、不連続面付近の拡大図を右側に示す。なお、ここで、case1は衝撃捕捉項の安定化パラメータ δ に従来提案されている式(14)を使用した場合、また、case2は安定化パラメータ δ に本研究で提案する式(15)を使用した場合の結果である。これらの計算結果より、本研究で提案する衝撃捕捉項の安定化パラメータ(case2)は、波先端部での数値振動をより良く抑えており、また理論解とも良い一致を示していることがわかる。このことから以後の解析例では、安定化パラメータとして本論文で提案するものを適用する。

次に、この問題に対してメッシュ細分化手法を適用し計算精度の比較を行った。数値解析結果として、1.0[s]後における計算結果と理論解との水面形状および流速分布の比較を図-8、図-9に、不連続面付近の拡大図を

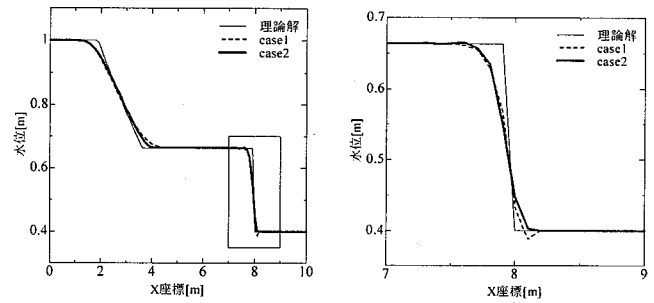


図-6 水位分布図（左：全体図，右：拡大図）

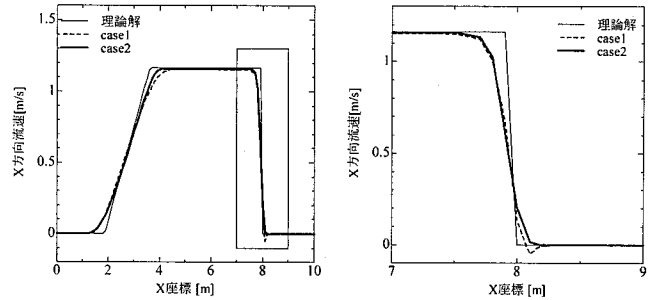


図-7 流速分布図（左：全体図，右：拡大図）

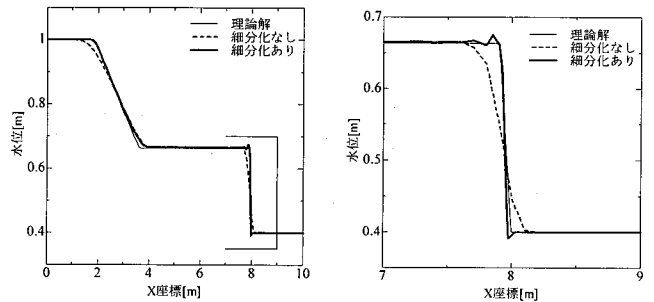


図-8 メッシュ細分化手法を適用した場合の水位分布図（左：全体図，右：拡大図）

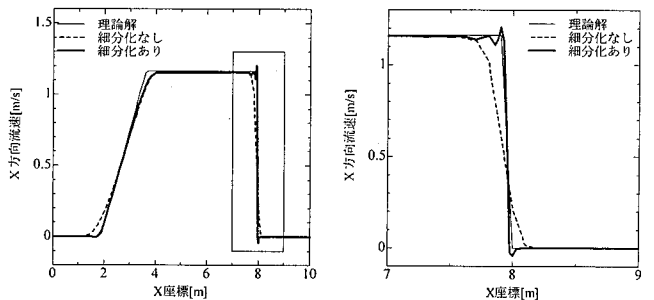


図-9 メッシュ細分化手法を適用した場合の流速分布図（左：全体図，右：拡大図）

右側に示す。なお、そのときの拡大図領域の有限要素分割図を図-10に示す。また、各節点における理論解との絶対残差の分布図を図-11に示す。図より、不連続面付近において、要素が細分化されていることより、不連続面付近での計算精度が向上していることがわかる。なお、メッシュ細分化手法の導入による計算時間の増

加は、導入しない場合に比べて1割程度であった。このことにより、メッシュの細分化の有効性が確認できた。ただし、波先端部において若干の数値振動がみられており、この点については今後の課題としたい。

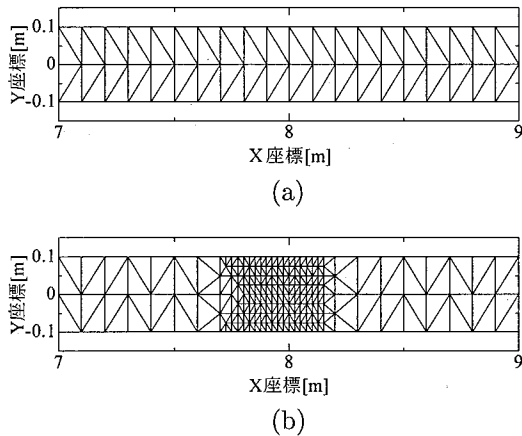


図-10 1.0秒後における有限要素分割図 ((a) 細分化なし, (b) 細分化あり)

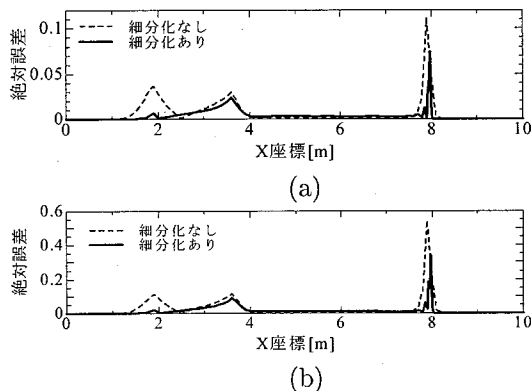


図-11 絶対残差分布図 ((a): 水位に関する相対残差, (b): 流速に関する相対残差)

3.2 ダムブレイク問題

ここでは、本研究で用いている水際線の境界処理方法の有効性の検討を行うことを目的として、ダムブレイク問題を取り上げる。初期の波形図を図-12に示す。初期水位 $h = 1.0[m]$ 、水位領域 $L = 50.0[m]$ 、奥行き $0.2m$ とし、陸域では、水位 $H = 0$ として取り扱っている。計算に用いた有限要素分割は、三角形要素を使用し、節点数: 333, 要素数: 440を用いている。また、境界条件として壁面においては、slip条件を与え、微小時間増分量は、 $0.01[s]$ を用いて解析を行った。

まず、数値解析結果として、水際線の移動量の求解において、反復計算を行う場合と行わない場合について比較を行う。10.0[s]後における計算結果と理論解¹⁶⁾との水面形状の比較を図-13に、また、流速分布の比

較を図-14に示す。この図より、移動量の反復計算を導入することにより、水面形状、流速分布ともに、理論解とよい一致を示していることがわかる。このことより、本手法の有効性が確認できた。

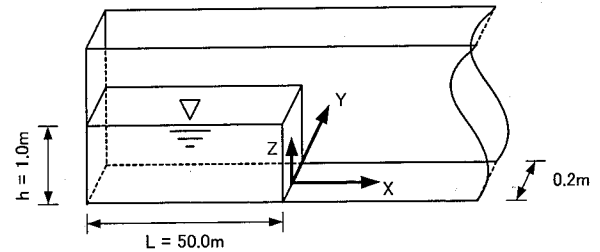


図-12 ダムブレイク問題初期条件図

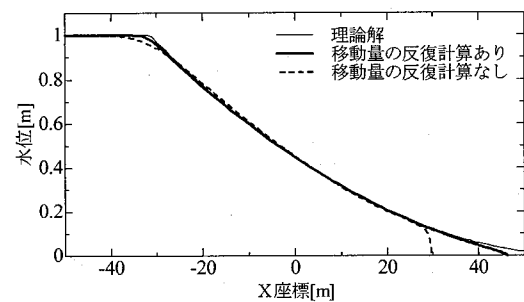


図-13 水位分布の比較

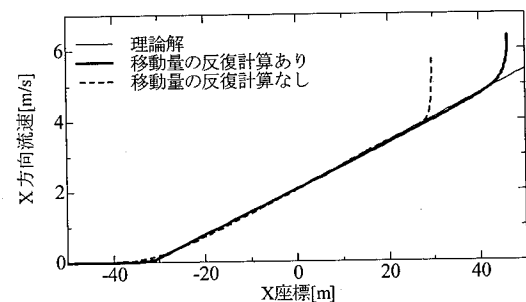


図-14 流速分布の比較

次に、Euler的手法を用いて解析を行った場合との水面形状の比較を図-15、水際先端での拡大図を図-16、また、流速分布の比較を図-17に示す。ここで、Euler的手法には、安定化有限要素法²⁾を用いている。使用した有限要素分割は三角形要素を使用し、Lagrange解法と比べて約2倍の節点数: 603, 要素数: 800を用いている。Euler的手法に比べて少ない自由度でも水際先端での形状をよく捉えていることがわかる。以上より、本論文で用いる水際線の境界処理方法の有効性が確認できた。

3.3 障害物のあるダムブレイク問題

本手法の任意地形への適応性および有効性を検討を行うことを目的とし、障害物のあるダムブレイク問題

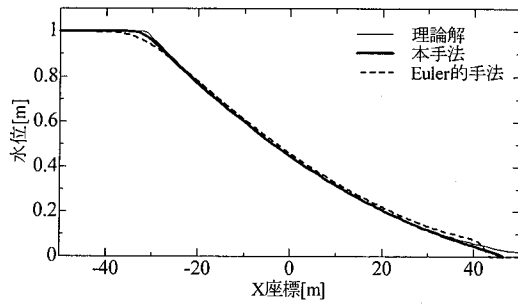


図-15 水位における Euler 的手法との比較

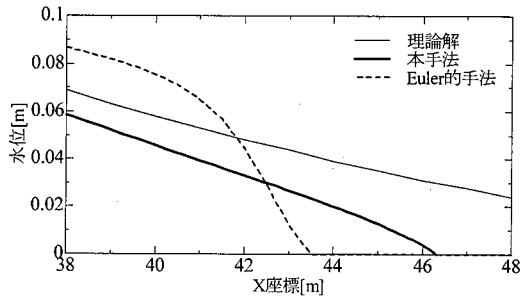


図-16 水位における Euler 的手法との比較（水際先端部の拡大図）

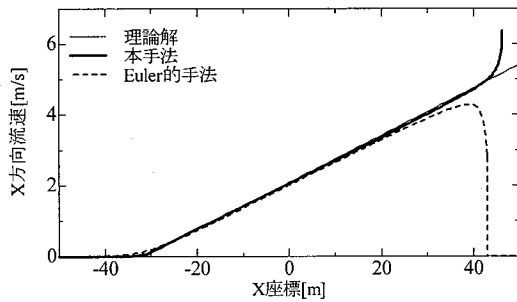


図-17 速度における Euler 的手法との比較

を取り上げる。初期形状と解析モデルを図-18に示す。なお、図中の G10, G11, G13, G20 は実験の測定点である。有限要素分割は、三角形要素を使用し、初期状態での最小要素サイズ（水際先端）は 0.05[m] とし、総節点数：555、総要素数：880 である。微小時間増分量は 0.01[s]、Manning の粗度係数は平坦部：0.0125、斜面部：0.011 を用いている。また、メッシュ細分化手法の有効性を検討するため、要素の細分化を行う場合と行わない場合について比較を行った。

各測定点における水深の時刻歴の計算結果と実験値¹⁷⁾の比較を図-20に示す。また、5秒後、5.5秒後における水面形状と有限要素分割図を図-21に示す。障害物を乗り越えた後の測定点 G20 において、計算結果は実験値に比べ、過大評価していることがわかる。しかしながら、他の測定点については、計算結果と実験値との良い一致を示している。また、要素の細分化を

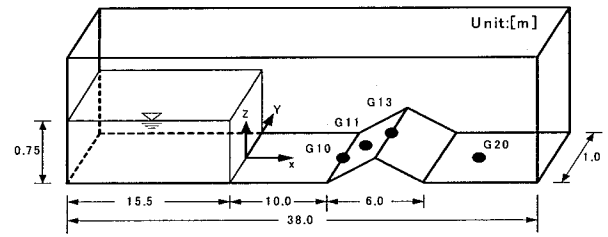


図-18 障害物のあるダムブレイク問題初期条件図

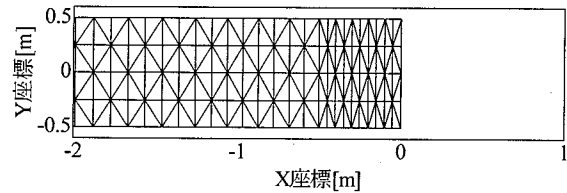


図-19 初期の要素分割図（水際線近傍図）

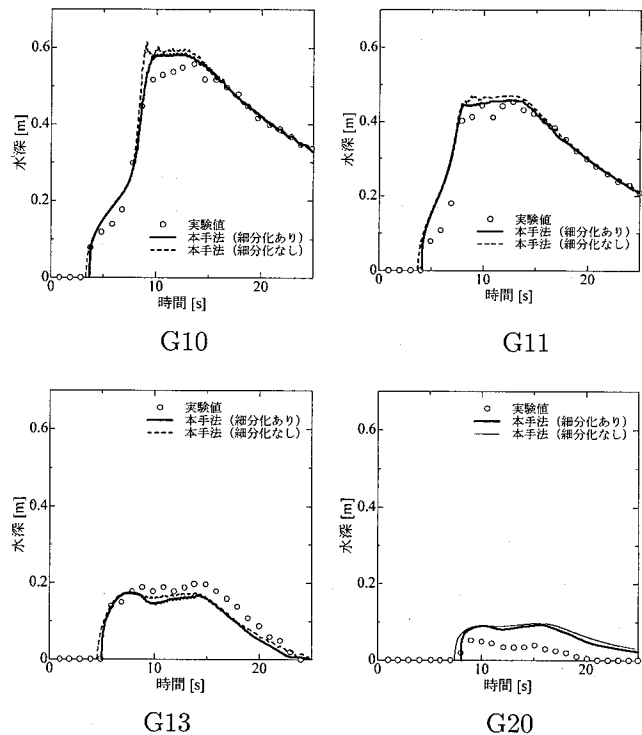


図-20 各測定点における水深の時刻歴

行うことで、より水位の振動が抑えられていることがわかる。

4. おわりに

本論文では、移動境界を伴う浅水長波流れに問題に対する高精度で安定な数値解析手法として、Space-Time 法に基づく安定化有限要素法を用いた解析手法を提案した。物理量のおよび水際線位置の高精度化を行うために、Space-Time 有限要素法における安定化項である

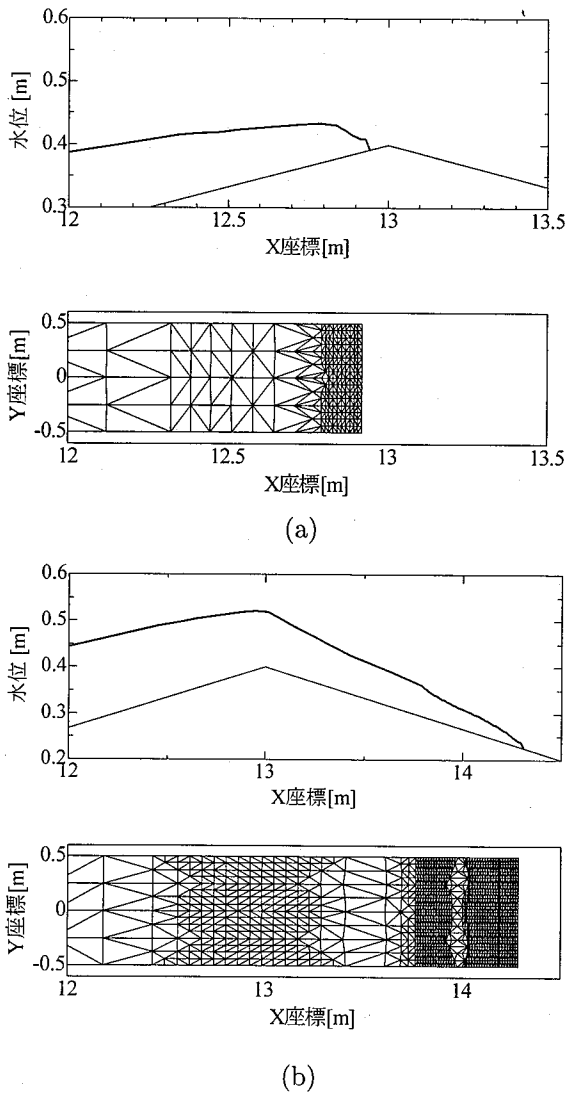


図-21 各時刻における水面形状と有限要素分割図 ((a)) 5秒後, (b) :5.5秒後)

衝撃捕捉項に対する新たな安定化パラメータを提案を行うとともに、水位の変化に応じてメッシュの細分化を行う手法の導入を行った。本手法の有効性を検討するため、本手法をいくつかのベンチマーク的例題に適用して、理論解や実験値およびEulerの手法による計算結果との比較を行った。

その結果、以下の結論が得られた。

- 本論文で提案した安定化パラメータは、従来のものに比べて高精度でかつ安定な結果を与えることが明らかとなった。
- メッシュ細分化手法の導入により、水位の変化の激しい領域に対して要素の細分化が図れ、物理量の高精度化が実現された。
- Space-Time安定化有限要素法に基づく計算結果は、理論解や実験結果と良好な一致を示すとともに、固定メッシュを用いたオイラー的手法に比べて水際線位置を正確に捉えることができることが確認された。

以上より、本手法は、移動境界を伴う浅水長波流れ

現象を高精度かつ安定に計算可能な手法であるといえる。今後は、本手法を実際問題の事例に適用してその有効性の検討を行う予定である。

参考文献

- 1) M.Kawahara and T. Umetsu : Finite element method for moving boundary problems in river flow, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **6**, pp.365-386, 1986.
- 2) 小林義典, 榎山和男 : 津波による構造物に作用する流体力の安定化有限要素解析, 計算工学講演会論文集, 日本計算工学会, **10**, pp.299-302, 2005.
- 3) 松本純一, 梅津剛, 川原睦人 : 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析, 応用力学論文集, 土木学会, **1**, pp.263-272, 1998.
- 4) M. Heniche, Y. Secretan, P. Boudreau and M. Leclerc : A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries, *Advances in Water Resources* **23** pp.360-371, 2000.
- 5) 桜庭雅明, 榎山和男, 菅野諭 : 移動境界を考慮したSpace-Time有限要素法による浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 土木学会, **3**, pp.255-262, 2000.
- 6) T.C.Gopalakrishnan and C.C.Tung : Numerical analysis of moving boundary problem in coastal hydrodynamics, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **3**, pp.179-200, 1983.
- 7) T.J.R.Hughes and G.M.Hulbert : Space-Time finite element methods for elastodynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **66**, pp.339-363, 1988.
- 8) T.E.Tezduyar, M.Behr and J.Lino : A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interface the deforming-spatial-domain/Space-Time procedure, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **94**, pp.339-351, 1993.
- 9) M.J.Berger and J. Olinger : Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations, *Journal of Comput. Phys.*, **53**, pp.484-512, 1984
- 10) 手塚明, 土田英二 : アダプティブ有限要素法, 計算力学レクチャーシリーズ2, 丸善 (株), 2003
- 11) A.N.Brooks and T.J.R.Hughes : Streamline up- wind / Petrov -Galerkin formulations for convection dominated flow with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **87**, pp.364-384, 1991
- 12) S.K.Aliabadi and T.E.Tezduyar : Space-Time finite element computation of compressible flows involving moving boundaries and interface, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **107**, pp.209-223, 1993.
- 13) T.E.Tezduyar and M.Senga : Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195**, pp.1621-1632, 2006
- 14) 谷口健男, 大田親 : 三次元凸体の四面体有限要素分割, 土木学会論文集, **432**, pp.137-144, 1991
- 15) A.Masud and T.J.R.Hughes : A space-time Galerkin / least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **146**, pp.91-126, 1997.
- 16) J.J. Stoker : The Breaking of a dam, *Water Waves*, Interscience Publisher, Inc. New York, pp.333-341, 1957.
- 17) P. Brufau, M. E. vazquez-Cendon and P. Garcia-Navarro : A numerical model for the flooding and drying of irregular domains, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **39**, pp.247-275, 1983.

(2006年4月13日 受付)