

四面体要素を用いた接触を伴う剛体運動の数値計算法

A NUMERICAL PREDICTION METHOD FOR ARBITRARY-SHAPED RIGID BODIES'
MOTIONS USING TETRAHEDRAL ELEMENTS

藤岡 奨*・牛島 省**・福谷 彰***

Susumu FUJIOKA, Satoru USHIJIMA, Akira FUKUTANI

*正会員 独立行政法人 水資源機構 (〒 501-0801 岐阜県揖斐郡揖斐川町鶴見字下平 639)

**正会員 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

***学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (同上)

This paper concerns the numerical method for the motions of complicated shaped rigid bodies which consist of tetrahedral elements. Using tetrahedral elements makes it easier for us to acquire the exact volumes and inertial tensors of the complicated shaped bodies. Furthermore, this paper describes how to probe the contact point between the bodies and evaluate the contact forces. The System Energy Minimize Method(SEMM) is applied to evaluate the contact forces. The motions of the bodies are solved based on Euler's equation. Although the validations are not carried out, the proposed method has predicted the motions of complicated shaped bodies such as coins, columns, and rings. This paper concludes that although the proposed method is in its infancy the insight of the proposed method is bright considering wide range of its applications.

Key Words : SEMM, Distinct Element Method, arbitrary figured bodies, tetrahedral element, contact force

1. はじめに

個別要素法 (Distinct element method, DEM) ¹⁾ は、粒状体 ^{2),3),4)}、流砂 ^{5),6)} のような多数の粒子が密集した運動あるいは粒子群の輸送過程 ^{7),8)}、堆積過程 ^{9),10),11)} などの現象の数値予測などに用いられ、これまでに多数の研究例が認められる。また、DEM は多相流の数値解析 ^{12),13)} にも広く用いられ、多相流場の数値計算法 MICS ^{14),15)} にも利用されている。しかし、固液混相流れの計算においては固体の形状を単純化して計算されることが多く、今後、任意形状の剛体を含む流れ場への適用を考える段階にある。この中で、任意形状の剛体を含む流れ場を数値計算するために、任意形状の剛体の運動を計算する手法について検討することは意義のあることと考えられる。粒子形状の複雑化に関する研究は間隙バネで結んだ複数の球体で形状表現を行う研究 ^{16),17),18)}、多面体を利用した形状表現を用いた研究 ^{19),20)} およびボクセル分割を用いて接触判定を行う研究 ²¹⁾ が行われている。また、粒状体の数値計算手法の一つである GEM の研究 ^{3),22)} でも任意形状剛体の接触を伴う運動を扱っているが、対象とする現象が準静的なものであり本研究で扱う現象とは異なる。本論文で扱うような、接触を伴う任意形状の剛体

運動を数値計算する方法の一つとして球体および円を組み合わせた形での任意形状を表現する方法が提案されている ^{23),24)}。これらの手法は接触に関する処理の簡潔さにおいて有利な点が認められるものの、球体および円の重なり等により慣性テンソルに誤差が生じること、球の組合せでは形状の表現力に限界があることなどの問題がある。本論文では形状の表現力を高めるため、また体積や慣性テンソルの正確な値を得るために四面体を基本要素とする個別要素法 (Tetrahedral Element Method, TEM) による形状生成法および接触の処理法を提案する。

2. 物理量の設定方法

2.1 接触判定の基準について

四面体要素を用いて形状生成された任意形状物体同士の接触判定基準に以下に示すものを用いた。図-1 で、黒丸は各物体の重心を示し、白丸は物体の表面に位置するノードである。図には二次元の場合が示されている。重心点と表面に位置するノードの二点を用いて出来る三角形が物体を構成する形状の最小単位であり、エレメントと呼ぶ。3次元の場合には、重心点と物体表面を構成する3点を利用して構成した四面体をエレメ

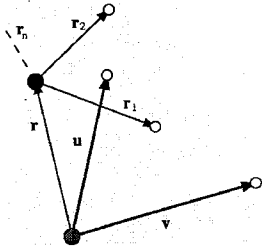


図-1 接触判定の原理

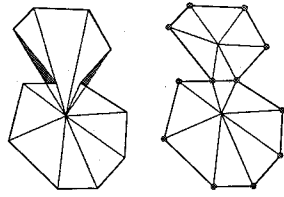


図-2 物体のエレメントへの分割方法

ントと呼ぶ。このとき、相手の物体のノードがエレメントの内部にあれば接触していると判定できる。図-1の例によると、重心点から表面を構成する二点のノードへ伸びるベクトルをそれぞれ u, v とし、物体の重心間の位置ベクトルを r 、相手の重心から n 番目のノードまでのベクトルを r_n とすれば、次式が得られる。

$$r + r_n = su + tv \quad (1)$$

ここで、 s, t は実数である。式 (1) は s, t を未知数とする連立一次方程式である。 s, t が正でありその和が 1 よりも小さい場合、相手の物体の n 番目のノードは、物体の内部に存在するので二物体は接触したと判定できる。

2.2 物体のブロック分け

前節で示した接触判定法を用いるためには、以下に示す理由により任意形状の物体を複数の凸形状のブロックに分ける必要性が出てくる。図-2 に示されるようなくびれを持つ物体を考える。図-2 の左側は、物体の重心から物体の表面に位置するノードまでを結び、それぞれのエレメントを示したものである。このとき、前節の接触判定法を用いると物体の外部であるにも関わらず、接触していると判定されてしまう領域が生じてしまい、正確な計算ができない。図中にはこの領域が着色によって示されている。同じ物体を凸形状の 2 個のブロックをつなぎ合わせたものとして考えたものが図-2 の右側の図である。この場合は、各ブロックのエレメントが物体の外部に飛び出すことがないので、前節の接触判定法を用いて正確な接触判定が行える。

このように、正確な接触判定を行うために凸形状のブロックの組み合わせで物体形状を表現する必要がある。ある形状が与えられたときその形状を適切なブロックに切り分けるという作業が必要となる。あるいは、基本的なブロックのデータを用意しておけばそれらを組み合わせて任意の形状を作ることができる。

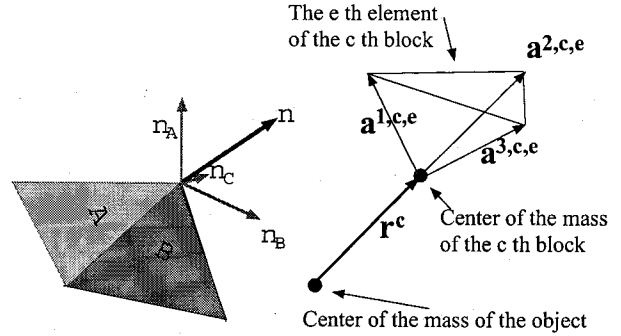


図-3 法線ベクトルの定義

図-4 慣性テンソル評価のための変数の定義

2.3 法線ベクトルの定義

物体の接触点において、接触力の方角を決めるために法線ベクトルが必要となる。本研究では物体を構成する全てのノードおよび辺に法線ベクトルを定義した。図-3 において、 n_A, n_B, n_C はあるノードを含む面 A, B, C に対する法線ベクトルである。これらを用いてノードの法線ベクトル n は、次式で定義した。

$$n \equiv \frac{n_A + n_B + n_C}{|n_A + n_B + n_C|} \quad (2)$$

各辺の法線ベクトル n は、その辺の両端のノードの法線ベクトルを平均して定義した。

$$n \equiv \frac{n_L + n_R}{|n_L + n_R|} \quad (3)$$

ここで、 n_L, n_R は特定の辺の両端のノードに定義された法線ベクトルである。辺の法線ベクトルを決定する際、辺を共有する面の法線ベクトルを平均する方が適切であると考えられるが、本研究ではグループ分けの関係上辺を両端のノードを用いて定義したため、両端のノードの法線ベクトルを用いて辺の法線ベクトルを決定した。これはプログラミングの都合上の措置であるので、今後辺をはさむ面の法線ベクトルを平均する方向へ修正することが望まれる。

2.4 慣性テンソルの定義

任意形状の物体の慣性テンソルは、重心系を用いることによって、定義から計算することができる。物体の重心から、その物体を構成する c 番目のブロックの重心へのベクトルを r^c とする。 $a^{1,c,e}, a^{2,c,e}, a^{3,c,e}$ はブロックの形状空間において定義されるベクトルであり、 c 番目のブロックの e 番目のエレメントを構成する三つのノードのブロックの重心からみた位置ベクトルとする。ブロックの形状空間において、 $a^{1,c,e}, a^{2,c,e}, a^{3,c,e}$

によって構成される四面体の慣性テンソル $A_{jk}^{c,e}$ は次式で得られる。

$$A_{jk}^{c,e} = I_{ii}^{c,e} \delta_{jk} - I_{jk}^{c,e} \quad (\forall j, k, c, e) \quad (4)$$

ただし, $I_{jk}^{c,e}$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} I_{jk}^{c,e} &\equiv 6m^{c,e} \int_0^1 \int_0^{1-s_1} \int_0^{1-s_1-s_2} (s_1 a_j^{1,c,e} + s_2 a_j^{2,c,e} + s_3 a_j^{3,c,e}) \times \\ &\quad (s_1 a_k^{1,c,e} + s_2 a_k^{2,c,e} + s_3 a_k^{3,c,e}) ds_1 ds_2 ds_3 \\ &= \frac{m^{c,e}}{20} \sum_{m,n=1}^3 a_j^{m,c,e} a_k^{n,c,e} (1 + \delta_{mn}) \quad (\forall j, k, c, e) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, $m^{c,e}$ は c 番目のブロックの e 番目のエレメントの質量である。以上により, ブロックの形状空間において各ブロックの慣性テンソル A_{jk}^c が次式で得られる。

$$A_{jk}^c = \sum_e A_{jk}^{c,e} \quad (\forall j, k, c) \quad (6)$$

さらに各ブロックの質量を M^c , 物体の形状空間での各ブロックの姿勢行列を $B^c = \{b_{ij}^c\}$, 物体の重心からの各ブロックの重心への位置ベクトルを t^c とすると, 物体の形状空間での慣性テンソル A_{jk} が得られる。

$$A_{jk} = \sum_{c=1}^C M^c t_j^c t_k^c + b_{jm}^c b_{kn}^c A_{mn}^c \quad (\forall j, k) \quad (7)$$

このように, 計算対象とする物体の体積および慣性テンソルの値が理論値で得られる点は, 球要素を組み合わせる形状生成する方法と比べて優れている点であると言える。

3. 剛体の運動方程式とその離散化

3.1 支配方程式の導出

剛体の運動の支配方程式は, Hamilton の原理から求められる Euler の方程式を用いた。剛体の並進運動については, 線運動量の保存則を用いた。角運動量 $\mathbf{L}$ が $g A_X \Omega$ で得られるので, 角運動量保存則によれば, 式 (8) が得られる。また, 線運動量の保存則によって式 (9) が得られる²⁵⁾。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{g} A_X \Omega + g A_X \dot{\Omega} \\ &= g (A_X \dot{\Omega} + \Omega \times A_X \Omega) \\ &= \mathbf{N} \end{aligned} \quad (8)$$

$$M \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \quad (9)$$

ただし, Ω は角速度ベクトル, g は形状空間から実空間へと変換する姿勢行列, A_X は慣性テンソルを表す行列, M は剛体の質量, $\mathbf{F}, \mathbf{N}$ はそれぞれ剛体に働く力

の合力, 剛体に働くトルクの合計である。また, $\dot{\cdot}$ は時間に関する一階微分を示す。剛体の重心からはかった作用点 k の位置ベクトルを $\mathbf{r}_k$, 接触力を $\mathbf{f}_k$ とすると, $\mathbf{N}$ は次式で示される。

$$\mathbf{N} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_k \quad (10)$$

これらは実空間内でのベクトルであることに注意する。ここで, 3次元のベクトル $\mathbf{a} = {}^T\{a_1, a_2, a_3\}$ に対して写像 $R(\mathbf{a})$ を以下のように定義する。左肩の添字 T は転置を表す。

$$R(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

姿勢行列 g の時間変化には以下の式 (12) を用いた。

$$\dot{g} = g R(\Omega) \quad (12)$$

3.2 Euler 方程式の離散化

剛体の運動は Euler 方程式を解くことによって求めた。姿勢行列 g , 角速度 Ω , 並進速度 $\mathbf{v}$, 剛体の質量中心の位置 $\mathbf{x}$ は次式で更新した。

$$\Omega^{n+1} = \Omega^n + \dot{\Omega}^n \delta_t + \frac{1}{2} \ddot{\Omega}^n \delta_t^2 \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{v}^n \delta_t \quad (14)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{\mathbf{F}}{M} \delta_t \quad (15)$$

$$g^{n+1} = g^n + g^n R(\Omega^n) \delta_t \quad (16)$$

ただし, δ_t は時間刻み, $\ddot{\cdot}$ は時間に関する二階微分の項であることを示す。式 (8) によれば, $\dot{\Omega}, \ddot{\Omega}$ は以下に示される。ただし, $\tilde{A}_X$ は A_X の逆行列である。

$$\dot{\Omega}^n = \tilde{A}_X ({}^T g^n \mathbf{N}^n - \Omega^n \times A_X \Omega^n) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}^n &= \tilde{A}_X ({}^T R(\Omega^n) {}^T g^n \mathbf{N}^n + {}^T g^n \dot{\mathbf{N}}^n \\ &\quad - \dot{\Omega}^n \times A_X \Omega^n - \Omega^n \times A_X \dot{\Omega}^n) \end{aligned} \quad (18)$$

4. TEM における接触量の計算

4.1 ノードの接触判定法

計算領域内部に物体 A, B があり, これらが接触しているものとする。物体 A, B の間の接触点の座標を求めるために, 相手の体積内部に存在するノードの座標を求める。どのノードが相手の体積内部にあるかどうかは, 2.1 で示された式を用いて判定される。三次元の場合で, ブロックの組合せによって物体を表現するとき, 以下に示される手順で判定される。図-5 の $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$

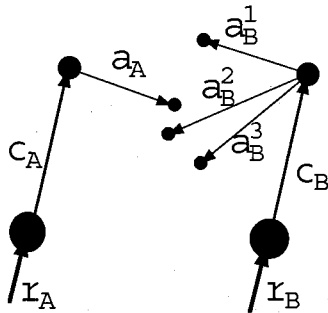


図-5 ノードの接触判定

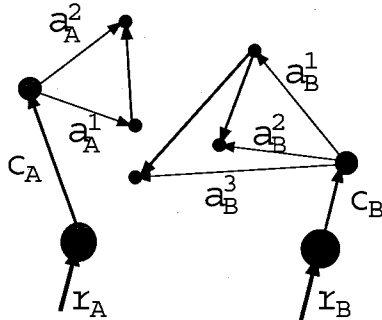


図-6 辺の接触判定

は物体 A, B の重心の座標, c_A, c_B は物体の重心からブロックの重心へのベクトル, $a_B^i, (i = 1, 2, 3)$ は, 物体 B のブロックの重心から各エレメントを構成するノードまでのベクトル, a_A は, 物体 A のブロックの重心からあるノードまでのベクトルである。このとき, 次の連立一次方程式を解くことにより得られた実数 s, t, u が共に正でありその和が 1 より小さな値であれば接触していると判定できる。

$$r = sa_B^1 + ta_B^2 + ua_B^3 \quad (19)$$

ただし, r は次式で与えられる。

$$r = r_A + c_A + a_A - r_B - c_B \quad (20)$$

4.2 辺の接触判定法

物体のノードが相手物体の体積内部にあるかどうかの判定だけでは, 辺同士の接触が認識できない。辺同士の接触は, 片方の物体の辺がもう片方の物体の表面と共有点をもつかどうかで判定できる。辺同士の接触は以下の手順によって判定される。次の連立一次方程式を解くことによって得られた実数 s, t, u が共に正であり, かつ $s + t \leq 1, u \leq 1$ である場合, 物体 A の辺が B の面と共有点を持つと判定できる。

$$\begin{aligned} c_B + a_B^1 + s(a_B^2 - a_B^1) + t(a_B^3 - a_B^1) \\ = r_A - r_B + c_A + a_A - u(a_A^1 - a_A^2) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし, 図-6 中の $a_A^i, (i = 1, 2)$ は物体 A のある辺の両端のノードである。その他のベクトルについては, 図

-5 と同様である。物体 A の辺が物体 B の表面を貫いている場合, 辺と表面の交点の座標と辺が貫いている面の番号を記録する。

4.3 接触判定手順

物体の接触が確認されると, 接触点の座標および, 接触点における法線ベクトルが接触力の評価のために必要となる。これらの接触量を求める手順を以下に示す。

1. すべてのノード, 辺に備え付けた flag に-1 を代入する。
2. 物体 A のノードが物体 B の体積内部にあるかどうかを判定する。ノードが体積内部にあれば, flag の 1 を立てる。
3. A と B を入れ替えて同様の作業を行う。
4. 物体 A の辺が物体 B の表面を貫いているかどうかを判定する。A の辺が表面を貫いていれば, 辺には flag の 0 を立てる。又, 貫いた表面のエレメント番号を記録する。このとき, A の辺が貫く面の数は複数となる可能性もあることに注意する。
5. A と B を入れ替えて同様の作業を行う。

ここまでの時点で, 物体 A と物体 B の接触量を求めるための情報収集は完了する。

4.4 接触量のグループ分け

以下では得られた情報から接触点の判別および接触量を求める手順を示す。複雑形状の剛体同士が接触する場合, 接触点は 1 点とは限らない。この点は円や球といった単純な形状の扱いにはない問題である。接触点に関する情報を一通り収集した後, 接触点の数を判定し, それぞれの情報を接触点ごとにまとめる作業に入る。この作業を本論文ではグループ分けと呼ぶ。以下にグループ分けの作業手順を示す。

1. 接触判定が終了した段階で図-7 に示されるように flag の立っているノードと辺を選び出すことができる。図-7 に示される丸は flag の立っているノードを示し, 併記されている番号は物体毎に決められている各ノードの番号である。図-7 に示される線分は flag の立っている辺を表し, 両端に併記されている番号は端点となるノードの番号である。
2. 最初にそれぞれの物体で flag が 1 であるノードを選び出し, 辺によって結びついているノード同士を同一グループとしてグループ分けを行う。この段階をノードのグループ分けと呼ぶ。各ノード, 辺のグループ番号の設定には接触判定に用いた flag をそのまま流用し, flag の値がそのままグループ番号となるように設定を行う。グループ分け終了時

にはノードに立てられた flag は 1 から g_n までの値を連続的に取るようにする。ただし、 g_n はグループの数である。FORTRAN77 を用いる場合には、flag の値がグループ分けの途中の段階でも常に連続的な値を取るような工夫を行った方がよい。一方で Fortran90 等の言語を用いる場合、flag のとる値が常に連続的でなくても良いのでプログラムは若干簡単になる。しかし、後の段階でグループ番号に関して do ループが現れることを考えると、最終的には flag のとる値が連続的となるようにしたほうがよいように思われる。図-8 には、ノードのグループ分けが終了した時点の様子が図示されている。ただし、ノードの 1 と 3、3 と 10、1 と 10、12 と 15 が辺で結ばれていることは初期の形状生成の段階で分かっているものとする。

3. ノードのグループ分けが終わった段階で辺のグループ分けを行う。辺の両端のノードのいずれかが先にグループ分けされたノードと一致すれば、辺のグループはノードのグループに一致させる。このとき、辺に立てられた flag をグループ番号に一致させる。辺の両端のノードが両方とも先にグループ分けされたノードの中に存在しない場合は、その時点でグループ分けが済んでいる辺と面を共有するかどうかを調べる。あるいは、辺の端点となるノードを共有するかどうかで調べてもよい。もし、既にグループ分けが済んでいる辺と面を共有する場合は、その辺のグループ番号を採用する。そうでない場合は新たなグループとして登録する。この段階が図-9 に示される。グループ 1 から 3 に関しては、ノードが相手物体の内部に入り込むことによる接触であり、グループ 4 は辺同士の接触を表している。

4. ノードのグループ分けおよび辺のグループ分けが終わった時点でグループ分けの最終処理に入る。この段階では本来一つのグループと判定されるべきところが複数のグループと判定されてしまう場合がある。図-11 に示されるように、ノードの位置関係が隣同士であっても辺で結ばれているとは限らないからである。図-11 では、着色されたノードの flag が立っており、正方形で示される点が相手物体の表面との共有点であるとする。着色された 2 ノードは同一グループに振り分けられるべきであるが、辺で結ばれていないので別のグループであるかのように認識される。そこで、それぞれのグループのノードを端点にもつ辺が、あるノードを共有すれば同じグループとする。この段階が図

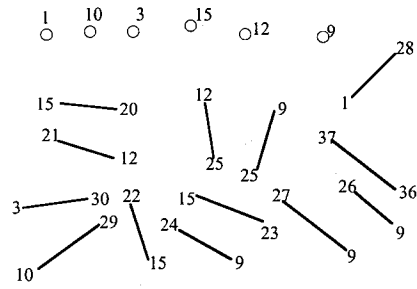


図-7 グループ分けの手順 (1/4)

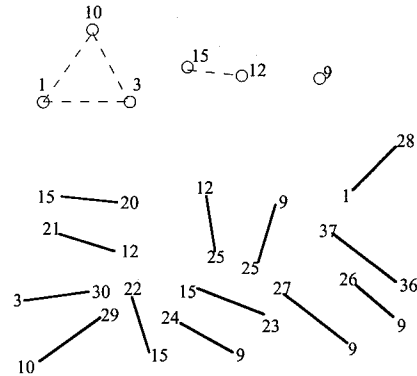


図-8 グループ分けの手順 (2/4)

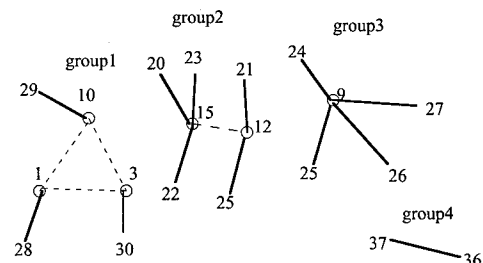


図-9 グループ分けの手順 (3/4)

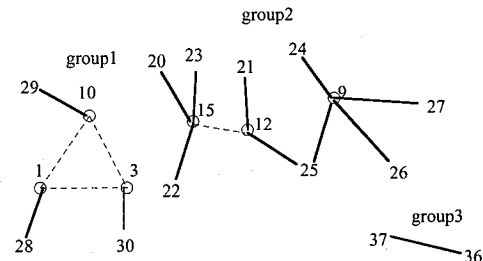


図-10 グループ分けの手順 (4/4)

-10 に示される。図-9 の状態では、グループ 2 およびグループ 3 が共通のノード 25 を持っている。本研究の方針ではグループ 2 とグループ 3 はまとめて一つのグループとして扱った。

以上の手順で辺およびノードのグループ分けが終了する。この時点で、物体 A のグループ数と物体 B のグループ数は一致しているはずである。

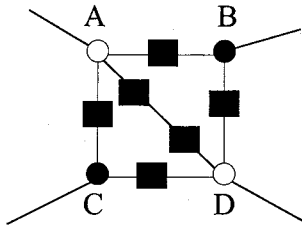


図-11 位置は隣であるが辺で結合されていない点の例

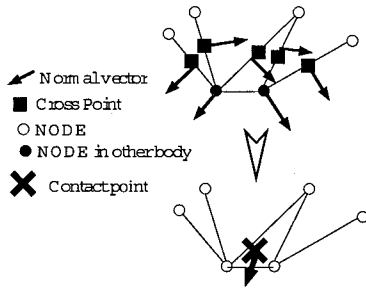


図-12 法線ベクトルおよび接触点算出の概念図

これらのグループ分けされた接触点群の座標から、図-12に示されるように各グループの接触点座標および法線ベクトルを以下のルールで求める。グループ内にノードの座標が含まれていれば、接触点の座標は、ノードの座標の単純平均で求めた。この場合は、図-10のグループ1および2に相当し、接触点における法線ベクトルは各ノードに定義された法線ベクトルの平均をとる。図-10のグループ3のようにグループ内にノードの座標が含まれていなければ、辺と面の接触座標を全て平均して接触点とする。法線ベクトルはグループ内のすべての辺の法線ベクトルを平均して求めた。

壁面との接触交点を求める際も以上のルールに基づく。接触交点が各物体の各グループで求められた後、各物体の各グループの接触点に代表される接触範囲が相手の物体のどの接触範囲に当たるのかを決める。次に、辺が相手物体の面を貫いたときに登録した面番号をもとにしてグループの突き合わせを行う。図-13に示されるように、それぞれの接触範囲で正しく接触点を対応させなければならない。図-13の例では、左側の物体の接触点データがノード1および辺と面の共有点A,Bによるグループ(グループ1,L)とノード2および共有点C,Dによるグループ(グループ2,L)に分けられているものとする。一方で右側の物体の接触点データがノード1および共有点C,Dによるグループ(グループ1,R)とノード2および共有点A,Bによるグループ(グループ2,R)に分けられているものとする。このとき、(グループ1,L)によって示される接触点と(グループ2,R)によって示される接触点が、(グループ2,L)の接触点

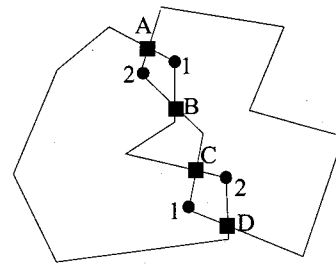


図-13 グループ分けされた接触点データの対応づけ

と(グループ1,R)の接触点が接触していることを対応づけなければならない。このグループの対応づけは次のルールによる。物体Aのフラグがついている辺には、その辺が貫いている相手の物体の面の番号が記憶されている。物体Bのフラグがついている辺には、その辺と隣り合う面の番号が記憶されている。これらの番号が一つでも一致すればそれらの辺を含むグループ同士は同じグループであるとする。この手順により、各グループに接触点が二点、法線ベクトルも二本得られる。各グループの法線ベクトルは、得られた二本の法線ベクトルの差で得られる。また、接触深さは接触点の差で得られる。接触力評価法としてSEMMを用いる場合には共通の接触点が必要となるが、この場合は得られた二点の接触点の midpoint を接触点として利用した。

本論文での数値計算では法線方向の接触力のみが考慮されたが、接触深さベクトルの法線成分のみを用いて接触力が評価されている。接触力評価に用いられる相対速度は物体の並進速度および角速度ベクトルから求め、その法線成分を用いた。

5. SEMM

5.1 剛体と壁面の接触の取り扱い

SEMMでは、系のエネルギーが最小化されるように接触力を決める²⁴⁾。以下では接触力を求める為の連立一次方程式を導出する。

最初は、系に含まれる剛体が一つであるとし、複数の点で壁面と接触しているものとする。実空間において、剛体の質量中心からみた接触点の位置ベクトルは $\mathbf{r}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) で表され、それぞれの作用点での接触力を $\mathbf{f}_k$ とする。nステップにおける系の全エネルギー E^n は次式で表される。

$$E^n = \frac{1}{2} M^T \mathbf{v}^n \mathbf{v}^n + \frac{1}{2} \Omega^n A_X \Omega^n - M^T \mathbf{G} \mathbf{x}^n \quad (22)$$

ただし、 $\mathbf{G}$ は重力加速度である。式(13),(15),(22)を利用して、n+1ステップにおける全エネルギー E^{n+1}

を求め、全エネルギーの変化量 ΔE を求める。以下では $n-1$ ステップにおける変数については右肩に $n-1$ と添えるが、 n ステップにおける変数に対しては右肩に n を添えることをしない。

$$\begin{aligned}\Delta E &= E^{n+1} - E^n \\ &= {}^T \mathbf{v} \mathbf{f}_k \delta_t + {}^T \mathbf{G} \mathbf{f}_k \delta_t^2 + \frac{1}{2M} {}^T \mathbf{f}_k \mathbf{f}_j \delta_t^2 + \frac{M}{2} {}^T \mathbf{G} \mathbf{G} \delta_t^2 \\ &\quad + {}^T \Omega \hat{\mathbf{N}} \delta_t + \left\{ {}^T \hat{\mathbf{N}} \mathbf{A}_X \hat{\mathbf{N}} - 2 {}^T \hat{\mathbf{N}} (\tilde{\mathbf{A}}_X \Omega \times \Omega) \right. \\ &\quad \left. + {}^T \Omega ({}^T g \hat{\mathbf{N}} - \tilde{\mathbf{A}}_X \hat{\mathbf{N}}) \right\} \frac{\delta_t^2}{2}\end{aligned}\quad (23)$$

いくつかの数式の変形の後、上式が得られる。ただし、

$$\hat{\mathbf{N}} = {}^T g \mathbf{N} = {}^T g R(\mathbf{r}_k) \mathbf{f}_k \quad (24)$$

である。また、トルクの時間変化は次式で近似した。

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}^n - \mathbf{N}^{n-1}}{\delta_t} \quad (25)$$

ΔE を未知の接触力 $\mathbf{f}_k$ の関数として陽に書き表すと、いくつかの式変形の後以下のような形となる。

$$\begin{aligned}\Delta E &= {}^T \mathbf{q}_k \mathbf{f}_k + {}^T \mathbf{f}_k J_{kj} \mathbf{f}_j - {}^T \Omega {}^T g \mathbf{N}^{n-1} \frac{\delta_t}{2} \\ &\quad + \frac{M}{2} {}^T \mathbf{G} \mathbf{G} \delta_t^2\end{aligned}\quad (26)$$

ただし、 $\mathbf{q}_k, J_{kj}$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_k &= \left(\mathbf{v} + \frac{3}{2} {}^T \Omega {}^T g R(\mathbf{r}_k) \right) \delta_t \\ &\quad - {}^T (\tilde{\mathbf{A}}_X \Omega \times \Omega + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_X \Omega) {}^T g R(\mathbf{r}_k) \delta_t^2\end{aligned}\quad (27)$$

$$J_{kj} = \left(\frac{1}{M} I + {}^T R(\mathbf{r}_k) g \tilde{\mathbf{A}}_X {}^T g R(\mathbf{r}_j) \right) \frac{\delta_t^2}{2} \quad (28)$$

ここで、 I は 3×3 の単位行列である。さて、接触力の方向は、接触点における法線方向の成分 $\mathbf{d}_k$ と接触点における疑似相対速度 $\mathbf{q}_k$ の方向の成分に分られるものと仮定する。ここで、 $\mathbf{q}_k$ を疑似相対速度と呼ぶ理由は、 $\mathbf{q}_k$ の δ_t に関して一次の項がほぼ接触点での相対速度となっているからである。

$$\mathbf{f}_j = -s_j^1 \mathbf{q}_j - s_j^2 \mathbf{d}_j \quad (29)$$

ここで、 s_j^i は、未知定数である。この表現を式 (26) に代入すると、 ΔE は未知変数 s_j^i の二次関数となる。 s_j^i の全ての組合せのうち、 ΔE を最小にならしめる組合せが求める解である。目的関数が二次関数であるので、Newton 法を用いて s_j^i を求めることができる。理論的には、連立一次方程式を解く回数は一回で済む。解く

べき連立一次方程式は以下に示される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta E}{\partial s_k^1} &= -{}^T \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k + s_j^1 ({}^T \mathbf{q}_k J_{kj} \mathbf{q}_j + {}^T \mathbf{q}_j J_{jk} \mathbf{q}_k) \\ &\quad + s_j^2 ({}^T \mathbf{q}_k J_{kj} \mathbf{d}_j + {}^T \mathbf{d}_j J_{jk} \mathbf{q}_k) = 0\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta E}{\partial s_k^2} &= -{}^T \mathbf{q}_k \mathbf{d}_k + s_j^1 ({}^T \mathbf{q}_k J_{kj} \mathbf{d}_j + {}^T \mathbf{d}_j J_{jk} \mathbf{q}_k) \\ &\quad + s_j^2 ({}^T \mathbf{d}_k J_{kj} \mathbf{d}_j + {}^T \mathbf{d}_j J_{jk} \mathbf{d}_k) = 0\end{aligned}\quad (31)$$

5.2 剛体同士の接触を含む場合の取り扱い

剛体が複数存在する場合も解法の手順は大きくは変わらない。本論文では一点において三体以上の剛体が接触するような場合は考慮しない。全ての接触点は異なる二体の剛体の接触点か壁面と剛体の接触点であるものとする。壁面と剛体の接触点での接触力の扱いは、以上に述べられた通りである。

剛体と剛体の接触においては、作用反作用の法則を考慮する必要がある。そこで、剛体 A と剛体 B が接触点 P で接触する場合について考察する。剛体 A、剛体 B の点 P における法線ベクトルを $\mathbf{d}_A, \mathbf{d}_B$ とする。また、疑似相対速度を $\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B$ とする。このとき、接触力の形を以下のように仮定することを考える。

$$\mathbf{f}_A = -s^1 (\mathbf{q}_A - \mathbf{q}_B) - s^2 (\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_B) \quad (32)$$

$$\mathbf{f}_B = -s^1 (\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_A) - s^2 (\mathbf{d}_B - \mathbf{d}_A) \quad (33)$$

自分の物理量から相手の物理量を引いた値を * を用いて表すと、上式は以下になる。

$$\mathbf{f}_A = -s^1 \mathbf{q}_A^* - s^2 \mathbf{d}_A^* \quad (34)$$

$$\mathbf{f}_B = -s^1 \mathbf{q}_B^* - s^2 \mathbf{d}_B^* \quad (35)$$

前節の $\mathbf{q}$ を $\mathbf{q}^*$ で置き換えると、同様の定式が可能となる。ただし、 s^1, s^2 は一致しなければならないことに注意する。系の中に剛体が複数あり、それぞれが接触しあっている最も一般的な状況をプログラムを用いて数値的に解く場合は以下の手順となる。ただし、 p は剛体を識別する指標、 k はそれぞれの剛体の接触点を識別する指標、 $m(p, k)$ は接触点を識別する指標であり、 $m(p_1, k_1) = m(p_2, k_2)$ であれば、剛体 p_1 の k_1 番目の接触点が剛体 p_2 の k_2 番目の接触点と一致していることを示す。 $s_{p,k}^i = S(m(p, k), i)$ なる二次元の配列を用意する。 i は接触力の方向の成分を示す指標であり、1 または 2 である。同様に、連立一次方程式の右辺の為に D を用意する。さらに、Hessian 行列に相当する配列 K を用意する。このとき、それぞれの配列の要素は

以下のようにプログラムできる。

$$K(m(p,k), i_1, m(p,j), i_2) += T y_{p;k}^{*i_1} J_{p;kj} y_{p;j}^{*i_2} + T y_{p;j}^{*i_2} J_{p;jk} y_{p;k}^{*i_1} \quad (36)$$

$$D(m(p,k), i) += T q_{p;k} y_{p;k}^{*i} \quad (37)$$

ただし,

$$y_{p;k}^{*1} = q_{p;k}^*, \quad y_{p;k}^{*2} = d_{p;k}^* \quad (38)$$

である。右下の添字 p,k は、その物理量が p 番目の剛体の k 番目の接触点で定義される量であることを示す。+= の表記は C 言語の文法に従うものとする。式 (36),(37) を全ての p,k,j,i_1,i_2 について実行すると、 D, K が得られる。これにより、最も一般的な問題に対しては以下の連立一次方程式を解けば良いことになる。

$$KS = D \quad (39)$$

ただし、上記の方法は q と d が一次独立の場合のみ使用できる。 $q = d$ 、または $q = 0$ となると、式 (39) に示される連立一次方程式のランクが下がるが、上記の手順には連立一次方程式の減少が考慮されていない。連立一次方程式のランクの減少がおこらないように、以下の検証計算では接触力の方向として法線方向のみを考慮した。

6. 数値計算例

6.1 落下する六角形コイン

TEM による任意形状剛体の運動の数値計算例として、六角形型のコインの落下問題を取り上げた。具体的な形状としては、ミャンマーの 25pya コインおよびインドの 3paise コインがこれに相当する。表-1 にコインの諸元を示す。また、重力加速度は $98.0[\text{cm/s}^2]$ 、時間刻みは $1.0 \times 10^{-5}[\text{s}]$ とした。接触力評価法には SEMM を用いた。

計算領域は一辺 $1.0[\text{cm}]$ の立方体の内部に設定され、コインは表-1 に示される初期姿勢、初期重心位置から自由落下する。計算結果を図-14 に示す。図-14 に示されるように、コインは立方体の底面と接触した後、コインの淵の部分で底面と接触しながら歳差運動に近い運動を行い最終的に静止する。これらの一連の運動は日常的な感覚に合うものであるので定性的には物理現象を再現しているものと考えられ、TEM による剛体運動の数値計算に一定の有効性が認められた。一方で、最終的な静止状態でコインが水平な状態からずれている問題点が確認されており、定量的な評価と合わせて今後の課題としたい。

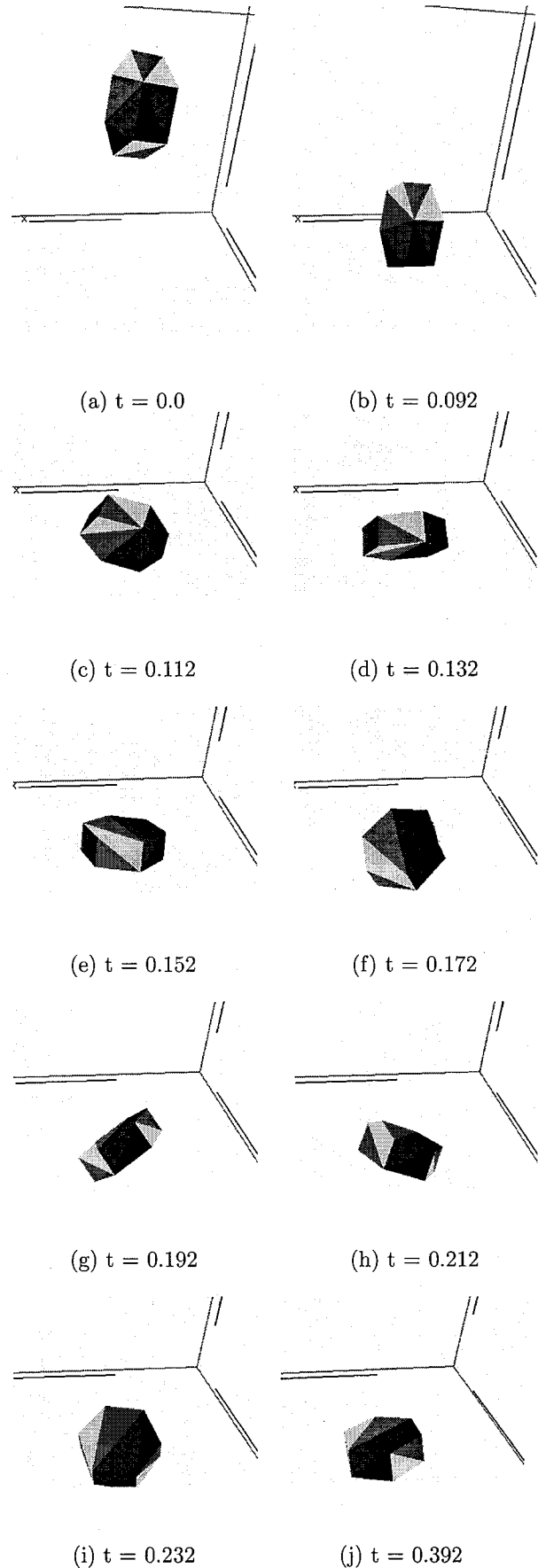


図-14 六角形コインの落下運動

表-1 コインの諸元

半径	0.15[cm]
高さ	0.1[cm]
Euler 角 (初期値)	(10°,80°,10°)
初期重心位置	(0.5,0.5,0.7)[cm]

6.2 落下するリングと六角柱

前節では六角柱が単体で運動する問題を扱ったが、本節では複数の物体が接触を伴いながら運動する問題を扱う。一体目の物体はリング形状である。四面体要素でリングを構成するため、正確にはリングではなく、正十六角形状であり断面は正六角形の物体である。この物体は、凸形状ではないのでブロックの組合せによって形状表現する必要がある。実際、本計算例ではリング形状を八等分して出来る形状が一体のブロックである。同一形状のブロックを八体つなぎ合わせることで、リング形状を表現している。表-2 にリングおよび正六角柱の諸元を示す。重力加速度および時間刻みに関しては前節の計算と同様である。接触力評価法には SEMM を用いた。

計算領域は一辺 1.0[cm] の立方体の内部に設定され、リングおよび六角柱は表-2 に示される初期姿勢、初期重心位置から自由落下する。計算結果を図-15 に示す。図-15 に示されるように、先に六角柱が接地し、更にリングが六角柱と容器の底面に挟まれながら倒れ、最終的にリングと六角柱は互いに複数の接触点で接触しながら静止する。二物体が複数の接触点を持ちながら運動する問題は正に本論文でターゲットとしている問題であり、ここに本論文の目的の一つは達成されたと言える。また、一連のリングと六角柱の運動は日常的な感覚に合うものであるので定性的には物理現象を再現しているものと考えられる。定量的な比較はなされていないが、前節に続き TEM による剛体運動の数値計算に一定の有効性が認められた。

7. おわりに

本論文では、四面体要素を用いて形状生成された任意形状剛体の接触を伴う運動の数値計算法について検討した。形状生成に関しては、基本ブロックの組み合わせによって任意形状を表現する方法を取り、接触力評価法については SEMM を用いた。本手法によって、剛体同士が複数の接触点で接触するような複雑な運動が数値計算され、日常的な感覚に近い計算結果が得られることを確認した。多面体接触判定の分野で標準的な計算法である GJK 法²⁶⁾を用いた計算効率の向上や、

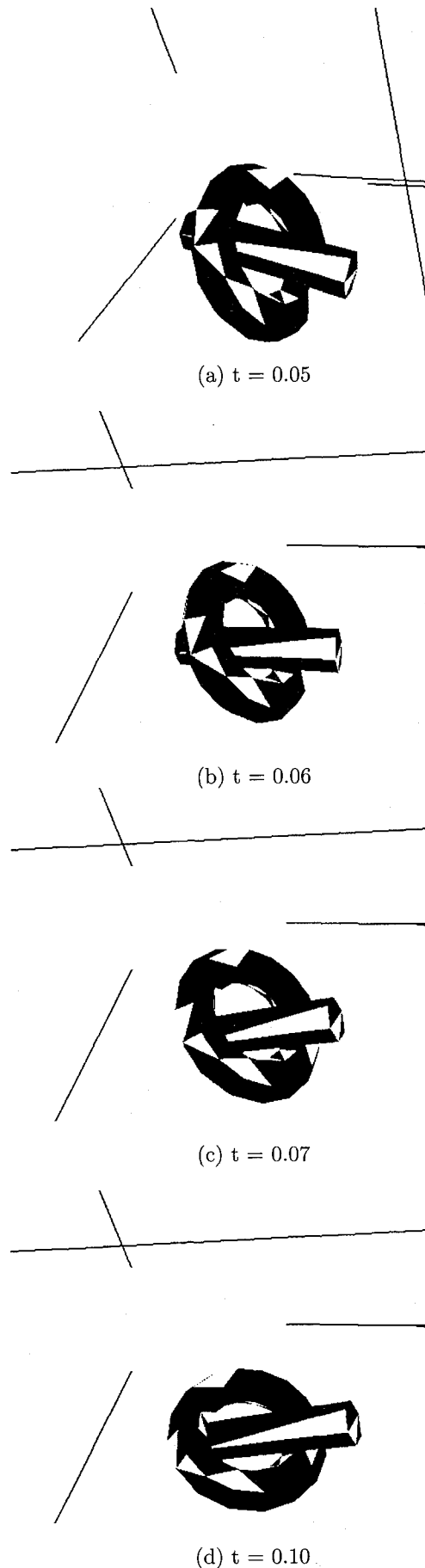


図-15 リングと六角柱の落下運動

表-2 リングおよび六角柱の諸元

リング	
半径	0.15[cm]
断面半径	0.05[cm]
Euler 角 (初期値)	(0°, 110°, 0°)
初期重心位置	(0.5, 0.5, 0.3)[cm]
六角柱	
高さ	0.4[cm]
断面半径	0.05[cm]
Euler 角 (初期値)	(0°, 80°, 0°)
初期重心位置	(0.5, 0.5, 0.3)[cm]

計算精度等の検討は今後の課題としたい。

参考文献

- 1) P.A.Cundall and O.D.L.Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 2) 松岡元, 山本修一. 個別要素法による粒状体のせん断機構の微視的考察. 土木学会論文集, No. 487/III-26, pp. 167-175, 3 1994.
- 3) 岸野佑次. 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析. 土木学会論文集, No. 406/III-11, pp. 97-106, 6 1989.
- 4) 桑原直範, 大野了悟, 前田健一. DEM による密度・過圧密履歴が異なる粒状材料の変形・破壊挙動と内部構造の変化の解析. 応用力学論文集, Vol. 5, pp. 431-440, 2002.
- 5) 清水義彦, 岩井明彦, 長田健吾. 個別要素法と流れの数値解析を組み合わせた高濃度平衡流砂場の数値実験. 水工学論文集, 第 47 巻, pp. 559-564, 2 2003.
- 6) 後藤仁志, 原田英治, 酒井哲朗. 三次元個別要素法による数値移動床の一般化. 水工学論文集, 第 46 巻, pp. 613-618, 2 2002.
- 7) T. Tanaka, K. Kadono and Y. Tsuji. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a vertical pipe. *Transactions of JSME*, pp. 3210-3216, 1990.
- 8) T. Kawaguchi, T. Tanaka and Y. Tsuji. Numerical simulation of fluidized bed using the discrete element method. *Transactions of JSME*, pp. 2119-2125, 1992.
- 9) 牛島省, 山田修三, 竹村雅樹, 瀬津家久. 急勾配ダクトのステップ前面に生ずる混合粒径粒子の分級堆積過程に関する考察. 水工学論文集, Vol. 47, pp. 565-570, 2003.
- 10) 原田英治, 後藤仁志, 酒井哲朗. 分級過程の三次元性に関する計算力学的アプローチ. 水工学論文集, 第 46 巻, pp. 619-624, 2002.
- 11) 原田英治, 後藤仁志, 酒井哲朗. 分級過程の三次元性に関する計算力学的アプローチ. 水工学論文集, 第 46 巻, pp. 619-624, 2002.
- 12) 重松孝昌, 小田一紀, 田野雅彦, 廣瀬真由. 個別要素法による水中沈降粒子群の 3 次元挙動に関する研究. 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 996-1000, 2000.
- 13) 後藤仁志, 林稔, 安藤怜, 酒井哲朗. 固液混相流解析のための DEM-MPS 法の構築. 水工学論文集, 第 47 巻, pp. 547-552, 2 2003.
- 14) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 瀬津家久. 非圧縮性流体解析に基づく粒子 - 流体混合系の計算法 (MICS) の提案. 土木学会論文集, No. 740/II-64, pp. 121-130, 2003.
- 15) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 瀬津家久. 3 次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法 (3D MICS) の提案と適用性の検討. 土木学会論文集, No. 810/II-74, pp. 79-89, 2006.
- 16) K. Meguro, K. Iwashita, and M. Hakuno. Fracture Analysis of Media Composed of Irregularly Shaped Resions by the Extended Distinct Element Method. *Structural Eng. / Earthquake Eng., JSCE*, Vol. 8, pp. 131-142, 1991.
- 17) 栗田哲史, 中瀬仁, 安中正, 嶋田昌義, 藤谷昌弘. ケーソン式護岸の模型振動実験に対する個別要素法シミュレーション. 土木学会論文集, No. 525/I-33, pp. 299-308, 1995.
- 18) T. Matsushima and H. Saomoto. Discrete element modeling for irregularly-shaped sand grains. *Proc. NUMGE2002: Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Mestat ed.*, pp. 239-246, 2002.
- 19) A. Munjina, J.P. Latham, and N.W.M. John. 3d dynamics of discrete element systems comprising irregular discrete elements - integration solution for finite rotations in 3d. *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol. 56, pp. 35-55, 2003.
- 20) A. Munjina. *The Combined Finite-Discrete Element Method*. John Wiley Sons Inc, 2004.
- 21) 鈴木克幸, 久保田純, 大坪英臣. ボクセルベース衝突判定アルゴリズムを用いた剛体運動シミュレーション. 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 131-139, 2003.
- 22) 石井建樹, 金子賢治, 岸野佑次. 真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について. 応用力学論文集, Vol. 5, pp. 451-460, 2002.
- 23) 藤岡奨, 牛島省. 運動する任意形状物体を含む流れ場の MICS による数値計算法. 水工学論文集, 第 50 巻 (掲載予定), 2006.
- 24) 藤岡奨, 牛島省. LBM と DEM による任意形状剛体を含む固液混相流れの数値計算法. 第 19 回数値流体力学シンポジウム 講演論文集, CD-ROM, B4-4, 2005.
- 25) Goldstein H. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- 26) E.G.Gilbert, D.W.Johnson, and S.S.Keerthi. A Fast Procedure for Computing the Distance Between Complex Objects in Three-Dimensional Space. *IEEE Trans.Robotics and Automation*, Vol. 4, No. 2, pp. 193-203, April 1988.

(2006 年 4 月 15 日 受付)