

安定化有限要素法による非等温場風況解析 ～流出境界条件と熱伝達境界条件の検討～

Wind Flow Analysis in Iso-thermal condition by Stabilized Finite Element Method
～Investigation of Outflow Boundary Condition and Heat Transmission Boundary Condition～

板橋翔*・岸昌由**・田中聖三***・榎山和男****・志村正幸†

Show ITABASHI, Masayoshi KISHI, Seizo TANAKA, Kazuo KASHIYAMA
and Masayuki SHIMURA

*正会員 修士(工学) 建設技術研究所 (〒103-8430 東京都中央区日本橋浜町 3-21-1)

**学生会員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 博士前期過程 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

***正会員 博士(工学) 中央大学助手 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

****正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

†正会員 工博 中央大学理工学研究所研究員 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a numerical simulation method for the evaluation of thermal environmental flow. The incompressible Navier-Stokes equation based on the Bussinesq approximation is employed for the basic equation of flow field. The $k-\varepsilon$ model based on RANS is used for the turbulent model. The stabilized finite element method based on the SUPG (Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin) / PSPG (Pressure Stabilizing / Petrov-Galerkin) method is employed. The outflow boundary condition and the heat transmission condition are investigated. The efficiency and validity of this method is investigated by the comparison with the existing experimental and numerical results.

Key Words : Finite Element Method, SUPG/PSPG Method, $k-\varepsilon$ Model, Iso-Thermal Condition, Outflow Boundary Condition, Heat Balance at Ground Surface

1. はじめに

近年、経済社会活動や人口の都市域への過度の集中により、都市部においてヒートアイランド現象が年々顕在化してきている。都市の温熱環境の形成には風、熱、植生、日射、構造物や人口排熱など様々な要素が関連している。特に、ヒートアイランド現象のメカニズムは複雑で、要因となる地表面性状と人工排熱、それらの都市内における分布状況や地形・気象要因などが影響し、時間的・季節的な変化を呈する。都市の熱環境予測を行うためには、まず対象地域の熱特性を把握し評価を行うことが重要である。対象地域の熱特性の把握と評価に関する検討は、これまで実験的検討が主流であったが、近年のコンピュータ性能と数値計算手法の進歩、および標高や建物形状に関する細密な GIS データの充実・普及に伴い、数値シミュレーションに基づく数値的検討も数多く行われるようになってきている^{2)～5)}。

都市の熱環境予測シミュレーションを定量的に行うためには、高精度な離散化手法を採用することはもちろんであるが、境界条件の検討が重要となる。特に、解析領域における流出境界と地表や構造物表面での熱伝達境界での適切な境界条件処理が重要となる。また、地形や建物形状を正確に表現することも重要である。そのため本研究では、任意複雑形状の適合性に優れている有限要素法を用いた、熱環境解析を行う場合、有限要

素法による解析では流出境界条件に対して、Stress-free Condition を扱う場合が多い。しかし、この条件は熱を考慮する場合においては、熱が境界を横切って流出しないという断熱条件を表しているため、出口付近に熱が溜り、これにより不自然な流れが生じてしまう。この問題の解決策としては、着目部分に影響が及ばない程度に計算領域を広くとる方法があるが、自由度が増加し計算コストが高くなるため、実用的な方法ではない。そこで、広い計算領域を必要とせず、設定した流出境界位置の影響を受けない自然な流れの流出を実現する境界条件が望まれ、各種の流出境界処理法の研究が行われている^{6)～10)}。

そこで、本研究は都市の温熱環境予測シミュレーション手法の構築を行うための基礎的研究として、流出境界条件と熱伝達境界の検討を行った。風況を解析するための乱流モデルには RANS に基づく $k-\varepsilon$ 型 2 方程式モデルを用いた。また、空間方向の離散化には、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い、時間方向の離散化には、Crank-Nicolson 法に基づく差分法を用いた。各種の流出境界条件と熱伝達条件に対する処理法を、いくつかのベンチマーク問題に適用して、各種処理法の比較検討を行った。そして、それらの比較検討の結果、最も適切とされる処理法を用いて、実測に基づく例題に適用した。

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式

等温場における非圧縮性粘性流体を考え、乱流モデルには RANS に基づく $k-\varepsilon$ 型 2 方程式モデルを使用する。アンサンブル平均操作を施された運動方程式、連続式、乱れエネルギーの輸送方程式、エネルギー散逸率の輸送方程式はそれぞれ式 (1)~(6) で表される。運動方程式：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} + g\beta(\bar{\theta} - \theta_0)\delta_{i2} = 0 \quad (1)$$

連続式：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

乱流エネルギーの輸送方程式：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - P_k + \varepsilon - G_k = 0 \quad (3)$$

エネルギー散逸率の輸送方程式：

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (4)$$

エネルギー方程式：

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right\} = 0 \quad (5)$$

絶対湿度の輸送方程式：

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_q} \right) \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right\} = 0 \quad (6)$$

ここに

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (7)$$

$$P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (8)$$

$$\bar{S}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (9)$$

$$G_k = g\beta \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \delta_{i2} \quad (10)$$

であり、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{p}$ 、 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{q}$ はそれぞれアンサンブル平均操作を施された流速、圧力、温度、絶対湿度であり、 k は乱

れエネルギー、 ε エネルギー散逸率、 ν は動粘性係数、 ν_T は渦動粘性係数である。また、定数群は $C_\mu = 0.09$ 、 $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ 、 $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ 、 $\sigma_k = 1.0$ 、 $\sigma_\varepsilon = 1.3$ 、 $\sigma_\theta = \sigma_q = 0.5$ である。

2.2 非等温場における浮力の生産項におけるモデル化

非等温場における ε の輸送方程式中の浮力の生産項については、以下の Viollet 型¹¹⁾と Rodi 型¹²⁾を用いた。

(1) Viollet 型¹¹⁾

このモデルは、一般的に用いられているモデルであり、 ε の輸送方程式の左辺第 6 項における浮力による k の生産 G_k を流れ場が不安定 ($G_k > 0$) な場合に平均流による k の生産 P_k と同等に評価する (式 (11) 参照)。また、流れ場が安定 ($G_k < 0$) な場合には無視するという操作を行う。このモデルは、煙突排ガス拡散解析で特に G_k が負となる領域での拡散予測に良い結果を残している。

$$\begin{cases} C_{\varepsilon 3} = 1.44 & (G_k > 0: \text{不安定の場合}) \\ C_{\varepsilon 3} = 0.0 & (G_k < 0: \text{安定の場合}) \end{cases} \quad (11)$$

(2) Rodi 型¹²⁾

このモデルは Viollet 型と同様に ε の輸送方程式の浮力による k の生産を評価する際に、流れ場を垂直せん断流と水平せん断流とに区別する。垂直せん断流では、浮力による k の生産 G_k を平均流による生産 P_k と等しく評価し、水平せん断流では G_k を小さく評価する。

具体的には式 (12) の左辺第 4 項、第 6 項を以下のように書き換えた次式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\ - [C_1(P_k + G_k)(1 + C'_3 R_f) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$$C'_3 = 0.8$$

である。また、 R_f については、鉛直速度成分が卓越する場合 ($u^2 + w^2 \leq v^2$):

$$R_f = 0.0 \quad (13)$$

水平速度成分が卓越する場合 ($u^2 + w^2 > v^2$):

$$R_f = -\frac{G_k}{P_k + G_k} \quad (14)$$

である。

2.3 境界条件

境界条件は、式 (1) に対して式 (15)、(16)、式 (3) に対して式 (17)、(18)、式 (4) に対して式 (19)、(20)、式 (5) に対して式 (21)、(22)、式 (6) に対して式 (23)、(24) が与えられる。

$$\bar{u}_i = g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_g \quad (15)$$

$$\left\{ -\frac{1}{\rho_0} \bar{p} \delta_{ij} + (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (16)$$

$$k = \bar{k} \quad \text{on } \Gamma_{\bar{k}} \quad (17)$$

$$\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial n} = \hat{k} \quad \text{on } \Gamma_{\hat{k}} \quad (18)$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad \text{on } \Gamma_{\bar{\varepsilon}} \quad (19)$$

$$\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \hat{\varepsilon} \quad \text{on } \Gamma_{\hat{\varepsilon}} \quad (20)$$

$$\bar{\theta} = \theta \quad \text{on } \Gamma_\theta \quad (21)$$

$$\frac{\nu_\theta}{\sigma_\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n} = \hat{\theta} \quad \text{on } \Gamma_{\hat{\theta}} \quad (22)$$

$$\bar{q} = q' \quad \text{on } \Gamma_{q'} \quad (23)$$

$$\frac{\nu_q}{\sigma_q} \frac{\partial \bar{q}}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_{\hat{q}} \quad (24)$$

ここで, g_i, h_i はそれぞれ流速, トラクションの既知量, n_j は外向き単位法線ベクトル, $\bar{k}, \bar{\varepsilon}, \theta, q'$ は壁面上での既知量, $\hat{k}, \hat{\varepsilon}, \hat{\theta}, \hat{q}$ は壁面上での各物理量の外向き法線方向勾配を示す。

2.4 安定化有限要素法

基礎方程式 (1), (2) に対して SUPG/PSPG 法¹⁾, (3), (4), (5), (6) に対して SUPG 法¹⁾ に基づく安定化有限要素法を適用すると, 以下の弱形式が得られる。

運動方程式, 連続式;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & - \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \bar{p} d\Omega + \frac{2}{3} \int_{\Omega} w_i \frac{\partial k}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\nu + \nu_T) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_i \{ g\beta (\bar{\theta} - \theta_0) \} \delta_{i2} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left\{ \tau_{supg1} \bar{u}_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \tau_{pspg} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right. \\ & + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} - (\nu + \nu_T) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & \left. + g\beta (\bar{\theta} - \theta_0) \delta_{i2} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_h} w_i h_i d\Gamma \quad (25) \end{aligned}$$

乱流エネルギー k の輸送方程式;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_k \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} w (P_k - \varepsilon + G_k) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg2} \bar{u}_k \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \\ & \left\{ \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - P_k + \varepsilon - G_k \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_k} w_k \hat{k} d\Gamma \quad (26) \end{aligned}$$

乱流エネルギー散逸率 ε の輸送方程式;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_\varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} w_\varepsilon \left\{ (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg3} \bar{u}_k \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_k} \\ & \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \right. \\ & \left. - (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon \hat{\varepsilon} d\Gamma \quad (27) \end{aligned}$$

エネルギー方程式;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\bar{\theta}} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial w_{\bar{\theta}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg4} \bar{u}_k \frac{\partial w_{\bar{\theta}}}{\partial x_k} \\ & \left\{ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{\bar{\theta}}} w_{\bar{\theta}} \hat{\theta} d\Gamma \quad (28) \end{aligned}$$

絶対湿度の輸送方程式;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\bar{q}} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_q} \right) \frac{\partial w_{\bar{q}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg5} \bar{u}_k \frac{\partial w_{\bar{q}}}{\partial x_k} \\ & \left\{ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha + \frac{\nu_T}{\sigma_q} \right) \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{\bar{q}}} w_{\bar{q}} \hat{q} d\Gamma \quad (29) \end{aligned}$$

空間領域を P1/P1(流速・圧力 1 次) 要素を用いて離散化を行うことにより、有限要素方程式を得ることができる。

一方、時間方向の離散化には、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた。なお、移流速度 $\bar{u}_i$ は 2 次精度 Adams-Bashforth 法により近似した。なお、連続式、圧力は陰的に取り扱っている。連立 1 次方程式の解法には、Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

3. 流出境界条件の検討

3.1 既往の流出境界条件処理法

流出境界を有する数値解析において、解析領域には人工的な境界(流出境界)を設け、その境界において何らかの境界条件を設定する必要がある。この境界には、大きく流入境界(Inflow Boundary)と流出境界(Outflow Boundary)の 2 種類に分類される。実際の現象を正確にシミュレーションするには、これらの境界条件は慎重に選択されなければならない。流入境界においては、実験値、観測値、理論値などから流速を規定することは一般的に可能である。一方、流出境界においてはその選択は明らかではないが、これまで様々な条件が提案されている。その代表的な条件を以下に述べる。

(1) Stress-free Condition

非重力場の解析では、しばしば Stress-free Condition が用いられる。この条件は式 (30) に示すように流出境界において応力を 0 とする条件である。Stress-free Condition の場合、解析領域が狭い場合には、解析結果に影響を与えるので、領域をある程度広めに設定する必要がある。

$$h_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_{out} \quad (30)$$

(2) Sommerfeld Radiation Condition(S.R.C)

Orlanski による Sommerfeld の放射条件(Sommerfeld Radiation Condition)を用いた流出境界条件⁶⁾は、波動問題において広く用いられている一般的な流出境界条件である。この方法では、基礎方程式とは別に以下の放射条件も支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (31)$$

ここで、 ϕ は物理量である。また U_c は伝播速度である。Navier-Stokes 方程式では、伝播速度 U_c が必ずしも定義されていないため、流出境界付近の解析結果より内挿的に求めるか、または質量保存を考慮して求めた平均流速を与える場合が多い。放射条件は、線形波動問題において非常に有効的である。放射条件は式 (31) により、流出境界での物理量を求め、それを基本境界条件として与える。

(3) Free Outflow Boundary Condition (F.O.B.C)⁷⁾

通常の有限要素法解析においては、弱形式における境界積分項は自然境界条件として扱われ、既知項とし

て取り扱われる。しかし、Papanastasiou らはこのような慣例には従わず、この境界積分項を未知量として取り扱うことで、流出境界上で解析領域内部と解析領域外部のトラクションを釣り合わせる方法を提案した。彼らは、この処理を Free Boundary Condition と呼んでいる。

Free Boundary Condition の適用により、重み付き残差方程式において流出境界条件処理を必要としなくなるため、No Boundary Condition とも呼ばれている。しかし、この方法は、物理的には流出境界条件を必要としないとしているが、流出境界上で力を釣り合わせているだけであるため、正確に流出流速を規定していないことに注意が必要である。

3.2 本流出境界条件処理法

通常、Sommerfeld Radiation Condition は、求められた物理量を流出境界上で基本境界条件として与える。ここでは Free Outflow Boundary Condition に Sommerfeld Radiation Condition を組み込んだ境界条件を用いる。この方法は Bottaro⁹⁾ によって提案された流出境界条件処理法の考えを、有限要素法に基づく直接法の定式化の中に導入したものである。

Free Outflow Boundary Condition を基に境界積分項の定式化の際、流出境界 Γ_{out} の外向き法線方向が x 軸に平行とすると式 (16), (22), 及び S.R.C(式 (31)) より以下の様になる。

$$\int_{\Gamma_{out}} w_i \left\{ -\frac{1}{\rho_0} \bar{p} \delta_{i1} + (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_i} \right) \right\} d\Gamma \quad (32)$$

$$\int_{\Gamma_\theta} \frac{\nu_\theta}{\sigma_\theta} w_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} n_1 d\Gamma \quad (33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (34)$$

ここで、S.R.C(式 (34)) を以下のように変形する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{U_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (35)$$

式 (35) を式 (32), (33) に代入すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{out}} w_1 h_1 d\Gamma &= -\frac{1}{\rho_0} \int_{\Gamma_h} w_1 \bar{p} d\Gamma \\ &\quad - \frac{2}{U_c} \int_{\Gamma_h} (\nu + \nu_T) w_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} d\Gamma \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{out}} w_2 h_2 d\Gamma &= -\frac{1}{U_c} \int_{\Gamma_h} (\nu + \nu_T) w_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} (\nu + \nu_T) w_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} d\Gamma \end{aligned} \quad (37)$$

$$\int_{\Gamma_\theta} w_\theta \bar{\theta} d\Gamma = -\frac{1}{U_c} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\nu_\theta}{\sigma_\theta} w_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} d\Gamma \quad (38)$$

式 (25), (28) に対して式 (36), (37), (38) を考慮し, P1/P1(流速・圧力 1 次補間) 要素を用いて補間を行うことにより有限要素方程式を得ることができる.

時間方向の離散化には, 2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた. なお, 連続式, 圧力は陰的に取り扱っている.

表-1 解析ケース

	運動方程式	エネルギー方程式
Case1	Stress-free Condition	Heat insulation
Case2	Stress-free Condition	S.R.C
Case3	Stress-free Condition	Present
Case4	Present	Heat insulation
Case5	Present	S.R.C
Case6	Present	Present

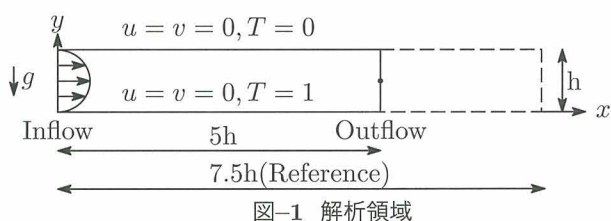


図-1 解析領域

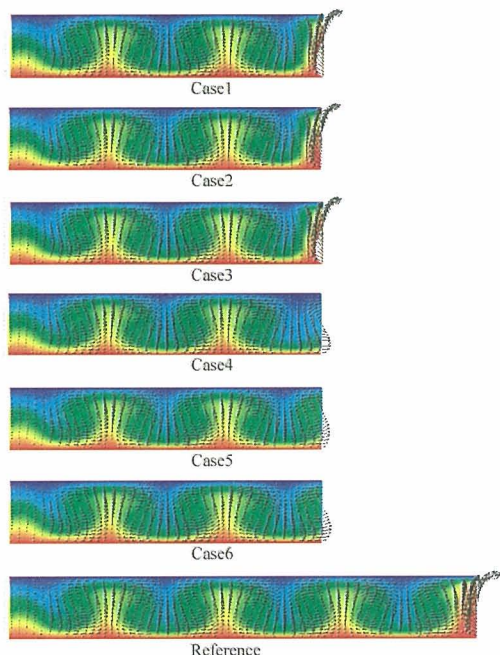


図-2 $t = 0.5$ における温度分布とベクトル線図

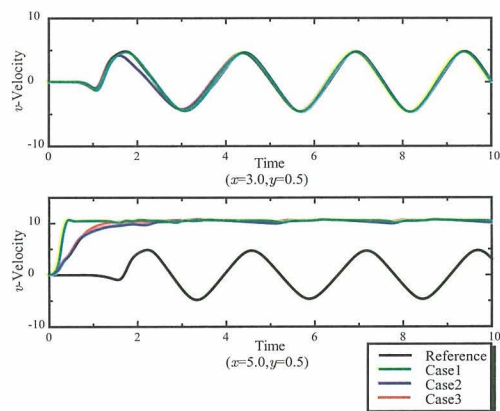


図-3 Case1~3 の節点 $(3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h)$ における y 方向流速の時間変化

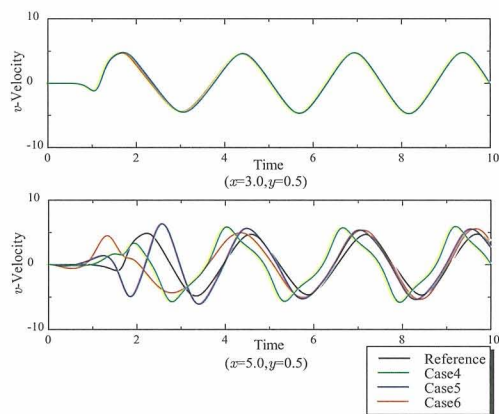


図-4 Case4~6 の節点 $(3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h)$ における y 方向流速の時間変化

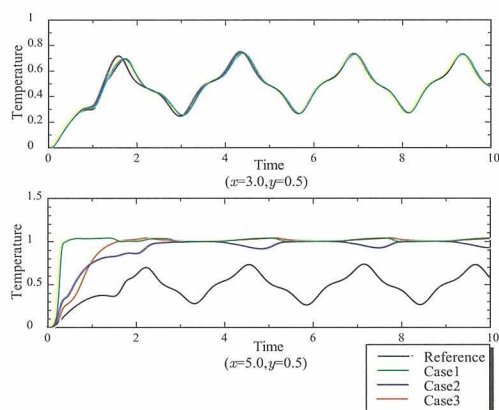


図-5 Case1~3 の節点 $(3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h)$ における温度の時間変化

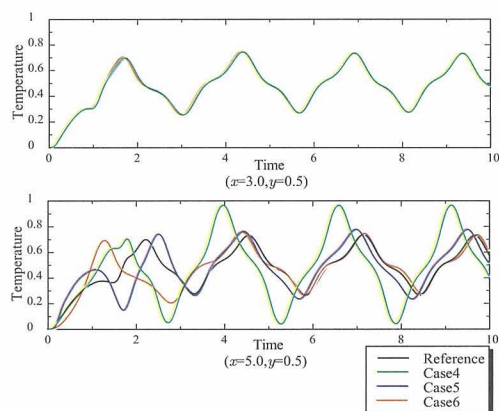


図-6 Case4~6 の節点 $(3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h)$ における温度の時間変化

3.3 各種流出境界条件の比較

本流出境界条件処理法の有効性の検討を行うため, 2 次元平行平板間内熱対流解析を例に, 各種流出境界条件の比較を行った.

(1) 解析条件

対象は非圧縮性粘性流対とし, ここでは乱流モデルは用いず無次元化を施した DNS で行った. 解析領域, 境界

条件を図-1に示す。解析条件は総節点数 861, 総要素数 1600, 最小メッシュ幅 0.05 の等分割メッシュを用い, 各無次元数は $Re = 10, Gr = 1.5 \times 10^4, Pr = 0.667$ とし, 微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ とした。初期条件は, 流速及び圧力を全領域で 0 とし, 温度は下部壁面を除き 0 とした。また, 流入流速は $u = 4y(1-y), v = 0.0$ で与え, 流入壁面温度は $T = 1.0 - y$, 流出境界上での伝播速度 U_c は流入流速, または流出流速の平均値を与えることとした。なお流出境界条件の比較を表-1に示し, 6 ケースについてそれぞれ解析を行った。また, 参照解 (Reference) は, 各メッシュのサイズを変えずに x 方向の領域の長さを 7.5 とした時の節点 (3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h) での時間変化である。なお, 表-1中の Present は, 3.2 節の境界条件処理法である。

(2) 解析結果

図-2 に $t = 0.5$ における温度分布とベクトル線図を, 図-3, 4 にそれぞれ Case1~3 と Case4~6 についての節点 (3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h) における y 方向流速の時間変化の比較を, 図-5, 6 に Case1~3 と Case4~6 についての節点 (3.0h, 0.5h), (5.0h, 0.5h) における温度の時間変化の比較を示す。

運動方程式に Stress-free 条件を用いた Case1~3 の場合, エネルギー方程式にどの境界条件を用いても流出境界から流入が生じていることが, 図-2 から分かる。更に, 図-3, 5 に示すように温度, y 方向流速ともに不自然な値を示して。一方, Case4~6 場合, 流出境界からの流入は抑制された。特にエネルギー方程式の流出境界条件に本手法を用いた場合, 多少の位相のずれと y 方向流速の過大評価はあるものの, 領域内部の節点 (3.0h, 0.5h) での流出境界による影響は見られず妥当な結果を得ることができた。また, 今回は伝播速度 U_c に流入速度の平均値を用いたが, 伝播速度の決定については, 今後さらなる検討が必要であるといえる。

4. 熱伝達境界の検討

4.1 地表面熱収支

太陽から地表面に与えられた熱エネルギーは顕熱と潜熱に変換されるが, 地表面の種類や状態によってその配分比が変わる。これらをモデル化したのが近藤¹³⁾によって提案された熱収支モデルである。このモデルは日射量や温度を入力条件として地表面での熱収支を解き, 地表面温度を求めるものである。その概念図を図-7 に, 熱収支式を式 (39) に示す。

$$(1 - \text{ref})S + L = \sigma T_s^4 + H + \iota E + G \quad (39)$$

ここで, S は短波放射量, L は長波放射量, H は顕熱輸送量, ιE は潜熱輸送量, G は貯熱量, ref はアルベド, σ はステファン・ボルツマン定数 ($= 5.67 \times 10^{-8} [W/m^2 K^4]$), T_s は地表面温度である。

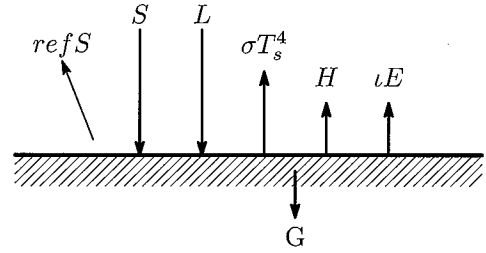


図-7 モデル概念図

(1) 顕熱輸送量

顕熱輸送量とは地表面から大気に輸送される熱量のことであり, 以下の式で与えられる。

$$H = \alpha_c (T_s - T) \quad (40)$$

ここで, α_c は対流熱伝達率 $[W/(m^2 \cdot K)]$, T は代表的な高度における温度である。

(2) 潜熱輸送量

潜熱とは物質が相変化を行う際に使われるエネルギーのことである。ここでは水が水蒸気に変化する際の気化熱を指し, 以下の式で与えられる。

$$\iota E = \iota \alpha_w \beta (f_s - f) \quad (41)$$

ここで, ι は水の気化の潜熱 ($= 0^\circ \text{C}$ で $2.5 \times 10^6 [J/kg]$), $\alpha_w (= 7 \times 10^6 \alpha_c)$ は湿気伝達率 $[kg/m^2 \cdot \text{sec} \cdot kPa]$, β は地表面の蒸発効率, f_s は地表面温度 T_s に対する飽和水蒸気圧 $[kPa]$, f は代表的な高度における水蒸気圧 $[kPa]$ である。

(3) 貯熱量

深さ z における貯熱量 G は, 以下の式で表される。

$$G = \lambda_G \frac{dT_G}{dz} = \lambda_G \frac{T_s - T_0}{dz} \quad (42)$$

ここで, λ_G は熱伝導率, T_0 は地中温度である。

これらから求められた各項を, 式 (39) に与え Newton 法により T_s を求める。更に, 上記の $H, \iota E$ より, 地表面や構造物表面における乱流熱流束 ($= H/\rho C_p$), 乱流水蒸气流束 ($= \iota E/\rho \iota$) を求めることができる。

4.2 地表面高温領域周辺風況解析

$k-\epsilon$ モデルを用いた非等温場における本解析手法の精度の検証を行うため, 地表面高温領域周辺風況解析を行い, 既存の実験値¹⁴⁾との比較を行った。更に, 温度の境界条件に関して, 温度を与える基本境界条件型と熱流束を与える自然境界条件型の違いによる流れ場の影響について検討を行った。

(1) 解析条件

本例題では, 基礎方程式 (1), (2), (5) に無次元化を施した式を用いた。解析領域を図-8 に, 境界条件を表-3 に示す。解析に用いたメッシュは, 53 ×

17(x × y) の最小メッシュ幅 1.0×10^{-1} (メッシュ 1) と、 $200 \times 68(x \times y)$ の最小メッシュ幅 2.5×10^{-2} (メッシュ 2) の不等分割メッシュを用いた。Reynolds 数 (Re) は 2.4×10^4 、Prandtl 数 (Pr) は 0.71、Grashof 数 (Gr) は 1.02×10^9 、微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。各 Line における無次元温度を村上らの実験値¹⁴⁾と比較した。解析ケースとしては、浮力の生産項のモデル化に関して Viollet 型¹¹⁾と Rodi 型¹²⁾の 2 ケースと、境界条件に関して温度境界条件と熱流束境界条件の 2 ケースについて比較した。なお、自然境界条件では、Hot panel 上で ($\Delta\theta_0$: 温度の差 [112 °C], q : 発熱量 [1456 kcal/m²h], ρ : 空気密度 [0.997 kg/m³], $u\theta = q/3600\rho u_0\Delta\theta_0 \Rightarrow 0.012$ の熱流束を与えた。¹⁵⁾

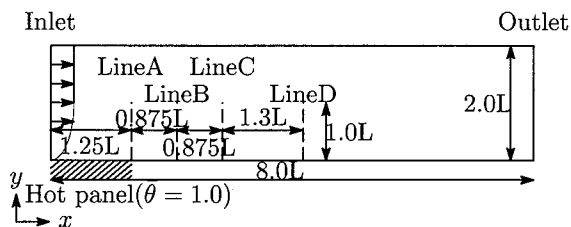


図-8 解析領域

表-2 境界条件

流入境界	$\bar{u} = y^{1/2}$, k : 風洞実験値 ¹⁴⁾ $\bar{v} = \bar{\theta} = 0.0$, $\varepsilon = 300k^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$
流出境界	自由流出境界
上端面	slip 条件
底面	$\frac{u_{ip}}{\tau_w} (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2}$ $= \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{E h_p (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2}}{C_\mu^{3/4} \cdot \nu k_p^{3/2}} \right)$ $\varepsilon_p = \frac{\nu}{\kappa h_p}$

(2) 解析結果

図-9, 10, 11 に各 Line での無次元温度と村上らの実験値¹⁴⁾を示す。

図-9, 10 の境界条件による違いを見ると、Viollet 型も Rodi 型も基本境界条件により直接温度を与えた場合、地表面付近の温度は実験値よりもかなり過大に評価されている。温度境界条件の場合、細かいメッシュ(メッシュ2)を用いることにより計算結果は実験値に近づいたが、粗いメッシュ(メッシュ1)を用いた自然境界条件で熱流束を与える方法が最も実験値と一致していることがわかる。以上の結果より、境界条件に熱流束を与えることの有効性が確認できた。また、図-11 の各 Line における本解析結果は Viollet 型よりも Rodi 型の方がより実験値に近い結果を得られている。

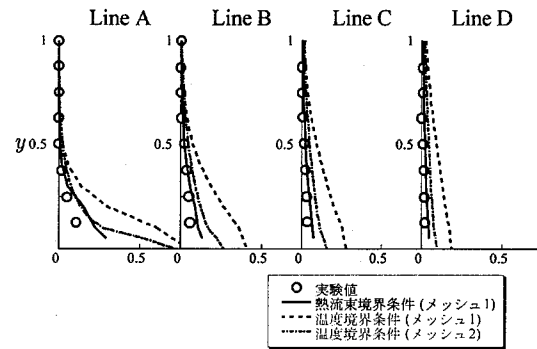


図-9 各 line における無次元温度 (viollet 型)

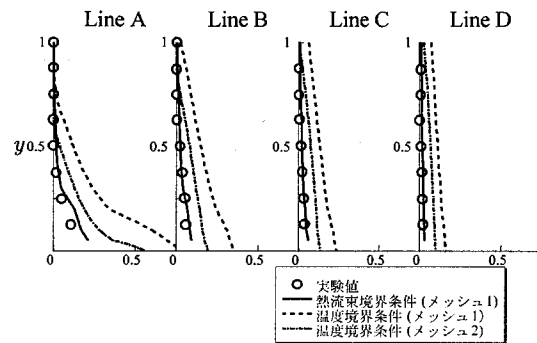


図-10 各 line における無次元温度 (Rodi 型)

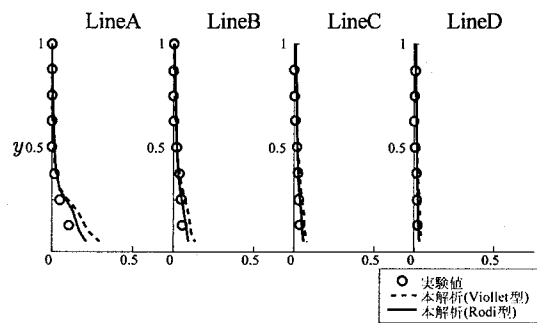


図-11 各 line における無次元温度

4.3 事務所ビル屋上熱環境解析

(1) 実測概要

続いて応用例として、都内某ビルの屋上での外気象(外気温、水平面日射量)の実測例について解析を試みた。図-12 に非緑化の屋上断面図を示す。実測は2002年1月から2004年5月まで継続して行っている。そのうち2002年8月の平均温度の時系列変化の解析を行った。

(2) 解析条件

表-3 に境界条件を示す。解析に用いたメッシュは、 $10 \times 10 \times 60(x \times y \times z)$ の最小メッシュ幅 1.0×10^{-1} の等分割メッシュを用いた。微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ [sec] とした。流入温度は実測で得られた図-14

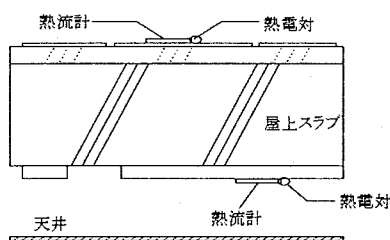


図-12 断面図

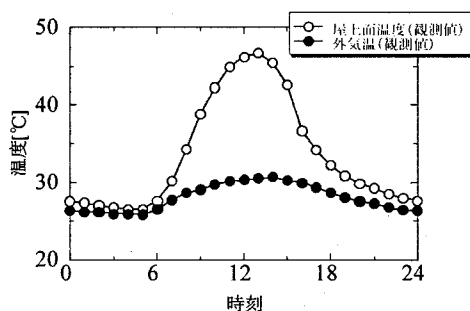


図-13 屋上スラブ上表面温度と外気温 (夏期)

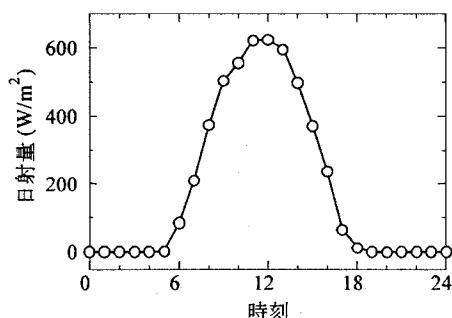


図-14 日射量 (夏期)

の各時刻での外気温を与え、地表面熱収支式に必要な短波日射量と長波日射量は実測から得られた全天日射量とした。なお、解析は非緑化部に関しての0時～24時の25ケースについて行った。

(3) 解析結果

図-15に2002年8月平均の非緑化部の解析結果を示す。

解析結果は、佐竹らの行った実測値¹⁶⁾よりも若干小さい値を示しているが、どの時刻でも非常によく一致している。また、実測値よりも若干小さい値を示している理由としては、顕熱輸送量の式中的対流熱伝達係数の値の影響が考えられる。今後、この値の検討が必要であるといえる。

表-3 境界条件

流入境界	$\bar{u} = y^{1/4}$, k : 風洞実験値 ¹⁴⁾ $\bar{v} = \bar{w} = 0.0$, $\varepsilon = 0.3k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$
流出境界	自由流出境界
上端面	slip 条件
底面	$\frac{u_{ip}}{\tau_w} (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2}$ $= \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{E h_p (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2}}{C_\mu^{3/4} \cdot \nu^{3/2}} \right)$ $\varepsilon_p = \frac{\nu}{\kappa h_p}$ 温度と水蒸気に関しては 顕熱輸送量と潜熱輸送量から得られる 熱流束と水蒸気流束を与えた。

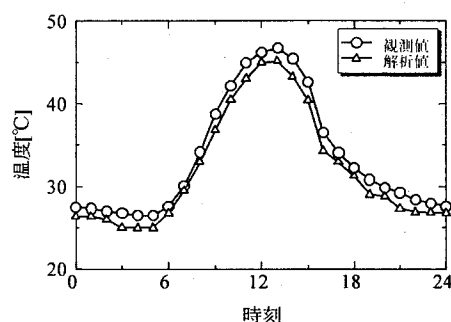


図-15 屋上スラブ上表面温度と外気温 (夏期)

5. おわりに

本研究は、都市の温熱環境解析手法の構築を行うための基礎段階として、流出境界条件の検討と熱伝達境界の検討を行った。数値解析例を通して、以下の結論を得た。

- 本流出境界処理法を運動方程式、連続式、エネルギー方程式に用いることで、流出境界位置の影響のない流れの流出を実現することができた。
- 本流出境界処理法を用いた流出境界条件処理においては伝播速度に流入速度の平均値を与えることにより、定常状態において参照解の流れを再現する事ができた。
- 地表面高温領域周辺風況解析において、自然境界条件を与えることにより、本手法による解析結果は比較的粗いメッシュ分割でも実験値と一致した解を得ることができ、熱流束による境界条件の有効性が確認できた。
- 地表面高温領域周辺風況解析のような、流れ場が水平方向に卓越している場合、浮力のモデル化はRodi型の方が実験値に近い値を示した。

- 実測をモデル化した解析において、本解析結果は実測とよい一致を示し、地表面の熱収支を考慮した本解析手法の有効性が確認できた。

今後の課題として、伝播速度 U_c の検討、緑地等の地表面性状での解析や構造物などがあるような、より複雑な流れ場における解析などがあげられる。

6. 謝辞

本研究を行うにあたり、日野幹雄博士(東京工業大学名誉教授)、義江龍一郎博士(東京工芸大学教授)から有益な助言を賜った。ここに記して、感謝いたします。

参考文献

- 1) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991.
- 2) 持田灯, 村上周三, 大森敏明, 富永禎秀: 日射の影響を考慮した市街地の風環境の予測・評価法に関する基礎的研究(その1), 対流・放射シミュレーションによる夏季の外部空間の SET* の分布の算出, 日本建築学会大会学術講演梗概集, D, pp.63-64, 1994.
- 3) 村上周三: CFD による建築・都市の環境設計工学, 東京大学出版会, 2000.
- 4) 原田雄介, 村上周三, 大岡龍三, 川本陽一, 佐藤大樹: 数値気候モデルによる屋上・地上緑化の都市熱環境の緩和効果の比較, 日本建築学会関東支部研究報告集, 2005.
- 5) 大岡龍三: 建物壁面緑化/屋上緑化の屋外温熱環境緩和効果について, 日本流体力学学会誌「ながれ」, 24, pp.497-503, 2005.
- 6) Orlanski, I.: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comput. Phys.*, 21, pp.251-269, 1976.
- 7) Papanastasiou, T.C., Malamataris, N. and Ellwood, K.: A new outflow boundary condition, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 14, pp.587-608, 1992.
- 8) Wei, R., Sekine, A. and Shimura, M.: Numerical Analysis of 2D Vortex-Induced Oscillations of A Circular Cylinder, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 21, pp.993-1005, 1995.
- 9) Bottaro, A.: Note on open boundary conditions for elliptic flows, *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol.18 1990.
- 10) 吉田尚史, 渡辺崇, 中村育雄: 非定常非圧縮流れの流出境界条件に関する数値的研究, 日本機械学会論文集 (B 編), 61 巻 588 号, pp.2887-2895, 1995.
- 11) Gabill, M. and Viollet, P.: The Three Dimensional Computation of Secondary Flow and Density Currents in A Curved Pipe, *Refined Flow Modeling and turbulence Measurements*. 3rd Int.Symp. 1988.
- 12) Rodi, W. and Hossain, M.S.: Turbulence Model for Buoyant Flow and its Application to Vertical Buoyant Jets., *Turbulence Buoyant Jets and Plumes HMT-Series*, Vol.6, Pergamon Press, Oxford England, 1982.
- 13) 近藤純正: 水環境の気象学 - 地表面の水収支・熱収支 -, 朝倉書店, 1994.
- 14) 村上周三, 大場正昭: 床面に温度差のある成層流中の気流性状並びに拡散に関する風洞実験(その1~その4), 日本建築学会大会学術学会講演梗概集(環境), pp.213-218, 1977.
- 15) 野口康仁, 村上周三, 持田灯, 富永禎秀: LES, $k-\varepsilon$ モデルによる地表面高温領域周辺の成層流の解析, 日本建築学会大会学術学会講演梗概集, pp.779-780, 1993.
- 16) 佐竹晃, 森橋大輔, 野津常義: 薄層屋上緑化による建物温熱環境改善効果に関する実測調査, 前田建設技術研究所報 Vol.45, pp.117-122, 2004.

(2006 年 4 月 13 日 受付)