

膜張力平均化サイマルコントロール法による石鹸膜形態解析

An isotonic surface analysis using the simultaneous control averaging at surface-tension

帯屋洋之*・井嶋克志**・西極春幸***

Hiroyuki Obiya, Katsushi Ijima and Haruyuki Saigoku

*博(工) 佐賀大学助教授, 理工学部都市工学科 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

** 工博 佐賀大学教授, 理工学部都市工学科 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

***修(工) 長崎県庁 (〒850-8570 長崎市江戸町2-13)

The simultaneous control is an incremental technique which can be applied to shape analyses with soap film elements, when the shape has so large volume and high rise. Furthermore, the tangent stiffness method is a clear and strict analytical theory to be able to solve the problems with large deformational behavior. The simultaneous control brings out the best performance for form-finding of isotonic surfaces in combination with the tangent stiffness method. This study proposes a significant modification of the simultaneous control. The modification realizes a wide application range about load conditions and boundary conditions for soap film shape analyses by calculating the average of surface tensile. Results are presented as some computational examples in which the behavior of soap film structures under air pressure and/or water pressure becomes evident.

Key Words: form-analysis, simultaneous control, soap film shape,

follower force, tensile averaging, the tangent stiffness method

キーワード: 形態解析, サイマルコントロール法, 石鹸膜曲面, 位置依存型荷重
膜張力平均化, 接線剛性法

1. まえがき

石鹸膜曲面は, 任意の閉曲線境界に対して, 最小の表面積を与え, かつ, 曲面全体に亘って等張力の条件を満足する. 石鹸膜研究の歴史は古く, 20 世紀初頭にプランドルが等張力曲面に関する微分方程式を示して以降, 実験的, 解析的アプローチが多くなされてきた. 20 世紀後半になり, 高強度膜材料の開発と高性能計算機の登場を背景として多くの膜構造物が建造され, その原型曲面には石鹸膜曲面が用いられるようになった. そのため, この時期には有限要素法を始めとする数値計算手法による石鹸膜曲面 (= 等張力曲面) の研究^{1)~5)}が精力的に行われ, 現在では, 恒久大空間構造として現実的な範囲の低ライズ曲面に関しては, 高い精度の等張力曲面を得ることができるようになったと考えられる. しかしながら, 近年では内部空気圧で膜面を支持する空気膜を恒久大型膜構造として用いることが少なくなったため, 石鹸膜曲面を力学的観点から捉える形態解析の立場からの研究はあまり行われなくなった感がある.

一方で, 微分幾何学としての数学的なアプローチからは, 極小曲面を解析的に表現するための議論が, 今なお盛んに行われている (たとえば文献^{6), 7), 8)}など). ここでは, 離散

数学における極小曲面の存在証明や, 不安定解を含む複数の解の性状の解明に多くの研究者が取り組んでいる. もちろん, 柔構造としての膜構造物の形状決定に際しては, エネルギー的に安定であることが必須であり, あまりに高いポテンシャルエネルギーを持つ解について議論することは工学的見地から考えれば多少実用性に欠けると言わざるを得ない. しかし, 様々な境界条件, 荷重条件に対して力と形のバランスがとれた応力集中が少ない曲面形状が多様に存在するとすれば, 形態解析の立場からも非常に意義深いものであると考えられ, 大空間屋根建築構造以外の石鹸膜曲面の用途にも新たな方向性を見出すことが期待できる.

ここで膜構造物の定義を, 繊維膜を材料とする屋根構造だけでなく, 広い意味で「張力のみで抵抗する膜状の部材で構成された構造系」と考えることにすれば, これまでにも水中構造や地中構造としての用途に多くの建設事例を見ることができる. しかし, これらを対象とした形態解析の例は非常に少なく, Ishii⁹⁾による海中オイルタンクの解析や, 萩原¹⁰⁾によるラバーダム (ゴム堰) の解析などを挙げることができる程度である. さらに, 何れの研究も軸対称問題や二次元問題に限定されており, 複雑な境界形状の場合への対応や位置依存荷重となる荷重条件に関す

る任意性といった点で十分なものではない。

著者らはこれまでに、非常にロバスト性の高い幾何学的非線形解析理論である接線剛性法のアルゴリズムに、膜張力一定の三角形石鹸膜要素を適用することにより、石鹸膜曲面の形態解析を試みてきた^{11)~13)}。文献¹²⁾では、石鹸膜形態解析において任意の一節点に強制変位を与えることを可能とする増分反復手法であるサイマルコントロール法を提案し、これを用いて内部空気圧荷重下で膨張した非常に大きな内包体積を持つ石鹸膜曲面の形態解析を行っている。また、この大容積領域での石鹸膜の挙動には、いわゆるエラスティカにおける弾性座屈後の挙動と同様な不安定さがあることが確認され、条件によっては分岐解が存在することも示された。さらに、文献¹³⁾では、内部空気圧を想定した面外方向等分布荷重だけではなく、水圧などの位置依存型荷重に対しても等張力条件を満たす石鹸膜曲面が存在することが明らかとなった。このように、本手法によれば、高い収束性のもとに、力の釣合を完全に満足する石鹸膜曲面を得ることができ、かつ、様々な荷重条件、境界条件に適応することが可能となる。

本論文においては、これまで著者らが用いてきた「内圧平均化」の考え方に基づくサイマルコントロール法に新たな考察を加え、石鹸膜本来の物理的性質である「表面張力一定」の条件に着目することにより、膜張力平均化の考え方によるサイマルコントロール法の提案を行う。これにより、たとえば、内部から水圧を受ける石鹸膜曲面が非常に大きな容積を持つ領域まで膨張していく過程をシミュレートすることが可能となるなど、本手法による石鹸膜形態解析の位置依存型荷重への適応範囲が大きく広がった。また、荷重条件（空気圧や水圧、土圧など）と境界条件およびコントロールポイントの座標値を入力条件として、曲面形状と単位幅膜張力が解として出力されるため、実膜構造物設計のための原型曲面と初期張力が同時に得られるという合理性も実現する。

2. 接線剛性法による石鹸膜形態解析

2.1 三角形膜要素の接線剛性方程式と接線幾何剛性

三角形膜要素の接線剛性方程式の誘導とその物理的根拠については、文献¹¹⁾に詳しく述べられているが、本論文における幾何学的非線形性を厳密に考慮した形態解析手法の基礎をなす事項であるので、ここではその概略を示す。

いま、要素端節点に離散化された互いに独立な要素端力の組み合わせを要素端力ベクトルを $\mathbf{S}$ とし、これと三次元空間に固定された基準座標系で表示される外力としての節点力ベクトル $\mathbf{U}$ との間の平衡条件マトリックスを $\mathbf{J}$ とすれば、これらの間の釣合関係は、

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

と表示できる。よってこの変分をとると、以下のように接線剛性方程式を得ることになる。

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} \quad (2)$$

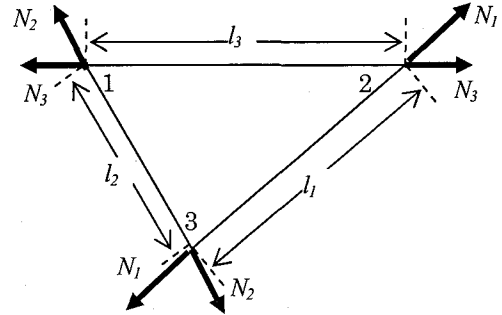


図-1 三角形膜要素と辺に沿う要素端力

ここで、 $\mathbf{K}_0$ は要素座標系内における要素挙動に起因する剛性であり、 $\mathbf{K}_G$ は要素の剛体変位に起因する接線幾何剛性である。また、 $\mathbf{u}$ は基準座標系表示された節点変位ベクトルである。これにより、接線剛性法では、要素剛体変位に起因する幾何学的非線形成分を平衡条件の非線形性として厳密に評価することができる。

したがって、本手法による幾何学的非線形解析では、材料剛性を全く持たない石鹸膜要素を用いる場合も、実膜要素（材料剛性あり）を用いる場合と共通の幾何剛性マトリックスを使用することができる。三角形膜要素に対して、図-1のような辺に沿う方向の力の組み合わせを要素端力ベクトルとして採用した場合、式(2)における接線幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ は、三角形トラスブロックの場合と同じになり、次式のように表示できる。ここで、 $\mathbf{e}$ は 3×3 の単位マトリックス、 α_i は辺 i の方向余弦ベクトルである。

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} k_{G2} + k_{G3} & -k_{G3} & -k_{G2} \\ -k_{G3} & k_{G3} + k_{G1} & -k_{G1} \\ -k_{G2} & -k_{G1} & k_{G1} + k_{G2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$k_{Gi} = \frac{N_i}{l_i} (\mathbf{e} - \alpha_i \alpha_i^T) \quad (i=1,2,3) \quad (4)$$

2.2 石鹸膜要素の要素端力ベクトル

石鹸膜要素のような実剛性を持たない要素を用いて形態解析を行う場合、要素ポテンシャル P を定義し、これを要素寸法で 1 階微分したものを要素式として用いるのが便利である。いま、三角形要素の面積を A 、単位幅膜張力を σt ($=$ 一定) として、要素ポテンシャルが面積 A に比例するものと定義すれば、

$$P = \sigma t A \quad (5)$$

のようになる。この要素ポテンシャルは、実剛性を持つ要素の場合におけるひずみエネルギーに相当するものであり、石鹸膜曲面の表面積が極小値をとることと、要素ポテンシャルの停留点が釣合位置を与えることは等価であると考えればよい。前述のように、要素端力を辺に沿う方向の力と定義すれば、幾何剛性の取り扱いが容易になるので、図-1に示したように、独立な要素寸法の組を三角形要素の三つの辺長とした場合、要素端力は、

$$N_1 = \frac{\partial P}{\partial l_1} = \sigma t \frac{l_1(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2)}{8A} \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{\partial P}{\partial l_2} = \sigma t \frac{l_2(l_3^2 + l_1^2 - l_2^2)}{8A} \quad (7)$$

$$N_3 = \frac{\partial P}{\partial l_3} = \sigma t \frac{l_3(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)}{8A} \quad (8)$$

のように要素ポテンシャルを各辺長で微分することによって得られ、要素端力ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{S} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]^T \quad (9)$$

以上により、接線剛性法による石鹼膜形態解析においては、一定空気圧や静水圧などの、与えられた荷重条件より計算された節点外力ベクトルを式(2)に代入し、以降、式(2)→式(6)～(8)→式(1)→式(2)のようなNewton Raphson法と等価な反復過程により、不平衡力が0に収束すれば、完全な釣合形状を得ることになる。

なお、本論文においても文献¹¹⁾における考察に倣い、石鹼膜要素の要素力剛性 $\mathbf{K}_0$ は接線幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ に比べて非常に小さいものと考え、式(2)に $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$ を代入して計算を行っている。また、同様に文献¹¹⁾に倣い、1節点1自由度系への低次元化処理を施しており、常に曲面の法線方向に節点が移動するように設定している。

3. サイマルコントロール法による増分制御

3.1 内圧平均化サイマルコントロール法

内圧平均化の考え方によるサイマルコントロール法については、文献¹²⁾あるいは文献¹³⁾で詳しく述べられているが、本論文で提案する「膜張力平均化サイマルコントロール法」との違いを明確にするため、以下にその概要について述べることにする。

力学的なアプローチによって石鹼膜曲面を求めようとするときには、境界条件のほか、

- ① 曲面全体に亘って一定となる単位幅膜張力 σt : 膜応力と膜厚を掛けたもの。
- ② 膜面に作用する内圧 p : 内部空気圧の場合は膜面全体に亘って一定となり、静水圧の場合は水頭位置から節点までの距離に依存する位置依存型荷重となる。

が入力パラメータとして必要になる。これらの条件を接線剛性法のアルゴリズムに投入して解析を行えば、非常に高い収束性のもと、曲面法線方向の不平衡力が収束し、釣合解としての石鹼膜曲面を得ることができる。しかし、石鹼膜で空気や水を覆うような曲面を想定した場合、単位幅膜張力に対してある程度以上大きな内圧を入力した場合には収束解が得られなくなってしまう。すなわち、圧力と内包体積の関係をプロットした P-V 曲線に極大値が存在することになり、これを超える解を求めるには、上記の条件のほか、何らかの幾何学的拘束条件が必要となる。もちろん、全自由節点に節点力が作用する石鹼膜曲面解析では通

常の変位制御法を適用することはできない。したがって、どのような幾何学的拘束条件を入力値として選択するかでここで問題となる。圧力と体積が仕事の対であることから、内包体積を入力パラメータとして解析した研究例²⁾もあるが、複雑な形状の曲面で覆われた部分の体積が入力パラメータとして適当であるとは言えない。

著者らは文献¹²⁾および文献¹³⁾において、この P-V 曲線の極大値を超える大容積石鹼膜曲面の求解を可能とする増分制御法として、内圧平均化の考え方に基づくサイマルコントロール法を提案し、内部空気圧下における膨張曲面の挙動を追跡してきた。本制御法では、曲面上の任意の一節点に対して強制変位を与え、その時に発生する不釣合形状より算出される「平均換算内圧」を逐次更新しながら載荷することにより、全自由節点の不平衡力が収束すれば、コントロールポイントの支点反力もゼロに収束し、同時に平均換算内圧も一定値に収束する。さらに、強制変位付与の方向を常に曲面の法線方向とすれば、任意の1節点をコントロールポイントに選定することが可能(極端な境界近傍を除く)になる。よって、ただ単に「曲面上の任意点の節点位置を定める」という直感的な入力が可能となる。なお、強制変位のピッチ(増分幅)については、コントロールポイント周辺の要素の寸法に対して、大きくなりすぎないように配慮して設定すればよい。また、通常の荷重増分制御法の場合と全く同じ対称の接線剛性マトリックスを使用できることになり、増分制御法の違いによらず共通のサブルーチンによってアルゴリズムを構成することができる。

3.2 平均換算内圧

いま、図-2に示すように節点 i に m 個の要素が繋がっているとす。要素 j の面積ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とした場合、節点 i が内圧荷重の $1/3$ を負担すると考えれば、これに対応する各要素の面積ベクトルは、次式となる。

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{a}_j / 3 \quad (10)$$

また、節点 i における曲面の法線方向余弦ベクトルは、

$$\mathbf{H}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} / \left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right| \quad (11)$$

と表せる。一方、要素 j の i 端における要素端力を $\mathbf{S}_{ij}$ とすれば、これの基準座標系への変換は、要素 j に関する平衡条件マトリックス $\mathbf{J}_{ij}$ により次式のように表せる。

$$\mathbf{U}_{sij} = \mathbf{J}_{ij} \mathbf{S}_{ij} \quad (12)$$

よって、 i 点における要素端力の合力は次式となる。

$$\mathbf{U}_{si} = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_{sij} \quad (13)$$

石鹼膜曲面は曲面の法線方向にしか剛性を持たないので、要素端力の合力の法線方向成分を取り出せば、

$$\bar{U}_{si} = \mathbf{H}_i^T \mathbf{U}_{si} \quad (14)$$

のようになる。ここで、内部から作用する等分布の圧力(内

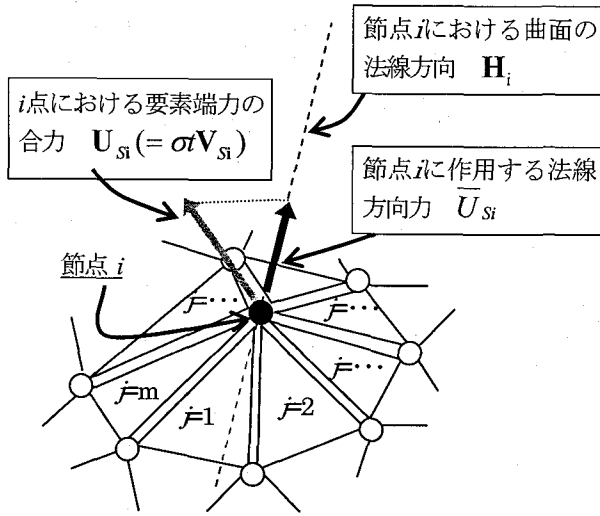


図-2 節点*i*に繋がる要素と法線方向力

圧)を p_{ini} とし、これ以外の外部から作用する圧力(水圧, 土圧, 風圧など, 位置依存型の圧力も設定可能)を $p_{Ex}(u_i)$ と表示することにすれば, 節点*i*において満たすべき, 曲面法線方向の釣合条件は,

$$\{p_{ini} - p_{Ex}(u_i)\} \left| \sum_{j=1}^m A_{ij} \right| - \bar{U}_{Si} = 0 \quad (15)$$

となる。ここで、この条件を満たす内圧を節点*i*における換算内圧 p_{Ci} ($i=1, 2, \dots, n$) とすれば、以下のように表示できる。

$$p_{Ci} \equiv p_{ini} = \bar{U}_{Si} / \left| \sum_{j=1}^m A_{ij} \right| + p_{Ex}(u_i) \quad (16)$$

内圧平均化サイマルコントロール法による石鹸膜形態解析の目的解は、全節点における換算内圧が等しくなることであるので、変位制御点および曲面上の全自由節点について次式のように平均値を計算し、

$$p_{AV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{Ci} \quad (17)$$

これを「平均換算内圧」として反復段階ごとに更新して全節点に再配分する。したがって、この平均換算内圧は通常の内圧载荷の場合に比べ、非常に厳しい条件の追従力荷重となるが、極端に大きな変位制御増分を与えた場合や、物理的に存在し得ないような外部圧力を設定した場合などを除けば、着実に収束し、結果として一定の内圧を受ける釣合曲面が得られることになる。

3.3 膜張力平均化サイマルコントロール法の考え方

内圧平均化サイマルコントロール法では、石鹸膜面に等分布する空気圧荷重の作用を前提としているため、各節点における換算内圧を平均化して逐次载荷する考え方をを用いている。しかしながら、石鹸膜本来の物理的性質である「表面張力一定」の条件を勘案すれば、各反復段階での不

釣合形状より、それぞれの節点における単位幅膜張力に相当する物理量(本論文では「換算膜張力」と呼称する)を算出し、これを平均化して逐次代入することでも石鹸膜曲面が得られると考えられる。この方法によれば、内圧荷重が等分布していることが必須条件とはならず、水圧荷重などの位置依存型荷重を前提とした場合でも計算が可能となり、たとえば、水を覆う石鹸膜曲面が大きな内包体積を持つような場合も、その形状を追跡することができることになる。また、荷重条件(位置依存荷重も可)と任意の一点の節点座標を入力し、曲面形状と同時に単位幅膜張力が出力されることになるので、設計計算に用いるための初期張力決定のプロセスが曲面形状決定のプロセスと同時に進行する解析流れとなる。本論文では、この考え方に基づく増分制御法を「膜張力平均化サイマルコントロール法」と呼ぶことにする。

3.4 平均換算膜張力

式(6)~式(8)によれば要素端力 S_{ij} は単位幅膜張力 σt と線形関係にあるので、式(14)は次のように書き換えることができる。

$$\bar{U}_{Si} = \sigma t H_i^T V_i \quad (18)$$

表これを式(15)の釣合条件式に代入すれば、

$$\sigma t_{Ci} = p_i(u_i) \frac{\left| \sum_{j=1}^m A_{ij} \right|}{H_i^T V_i} \quad (19)$$

のように、この節点に繋がる要素の幾何学的条件と、圧力の条件に対して釣り合うべき単位幅膜張力 σt_{Ci} が得られ、これを節点*i*における換算膜張力とする。また、ここでの圧力条件 $p_i(u_i)$ は内部からあるいは外部からといった作用方向を問わず、さらには位置依存荷重の条件も許容するため、水を覆う石鹸膜曲面の追跡なども可能となる。

ここで、単位幅膜張力が曲面全体に亘って一定であることを目的解として換算膜張力 σt_{Ci} を平均化することになるが、後述の計算例(図-5)からも明らかなように、増分毎に単位幅膜張力をモニタして行った場合、単位幅膜張力が無限大となる点が現れるため、換算膜張力の算術平均をそのまま用いることができない。よって、次式のように換算膜張力 σt_{Ci} の逆数の平均値を取ることによって、平均換算膜張力 σt_{AV} を求め、反復段階ごとに更新する。

$$\frac{1}{\sigma t_{AV}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma t_{Ci}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{H_i^T V_i}{p_i(u_i) \left| \sum_{j=1}^m A_{ij} \right|} \quad (20)$$

これによって、内圧平均化サイマルコントロール法を用いた場合と同様、全節点の不均衡力が収束すれば、コントロールポイントの支点反力もゼロに収束し、コントロールポイントを面内に含む石鹸膜曲面形状とそのときの単位幅膜張力が得られることになる。

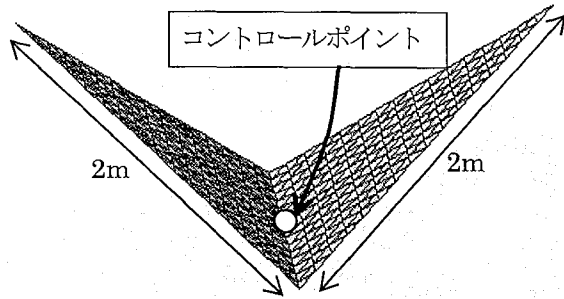


図-3 非平面四辺形境界と初期要素分割, コントロールポイント

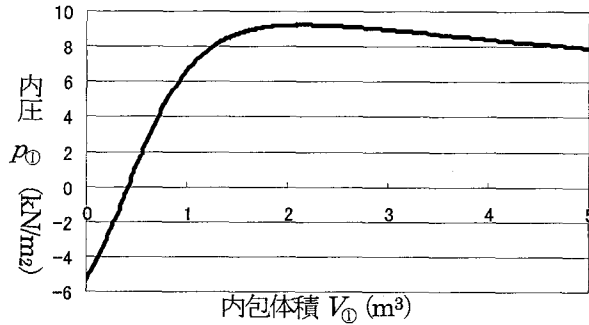


図-4 内圧平均化サイマルコントロール法によって得られた内圧-内包体積曲線

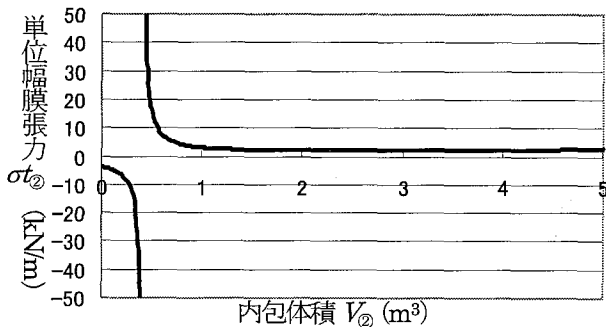


図-5 膜張力平均化サイマルコントロール法によって得られた単位幅膜張力-内包体積曲線

4. 数値計算例

4.1 空気圧が作用する非平面四辺形境界の石鹼膜曲面

図-3のような一辺2mの正三角形を空間内で直角に繋ぎ合わせた四辺形境界に図に示したような要素分割を施し, 中央点をコントロールポイントとして以下の二つの方法によって強制変位を付与することにより解析を行った。

- ① 単位幅膜張力 $\sigma_{t0} = 4.0 \text{ kN/m}$ (一定) として内圧平均化サイマルコントロール法によって, コントロールポイントを増分幅 0.01m で上方に引き上げる。
- ② 内圧 $p_0 = 5.0 \text{ kN/m}^2$ (一定) として膜張力平均化サイマルコントロール法によって, コントロールポイントを増分幅 0.01m で上方に引き上げる。

図-4は①のときの内圧 p_0 と内包体積 V_0 の関係, 図-5は②のときの単位幅膜張力 σ_{t2} と内包体積 V_2 の関係を示している。また, 図-6では p_0/σ_{t0} と p_2/σ_{t2} を縦軸にとり, 内包体積 V との関係プロットしているが, 両者はグラフ上では完全に重なり, 両手法による解析が全く等

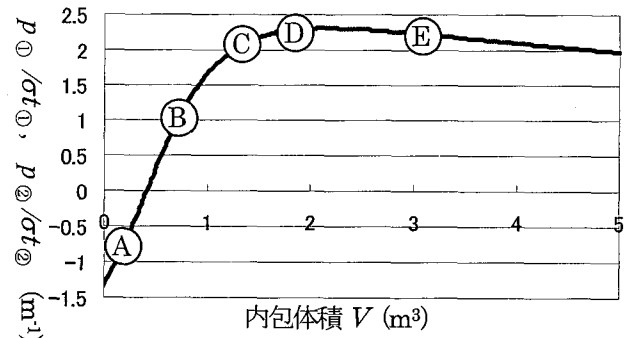


図-6 内圧/単位幅膜張力-内包体積曲線

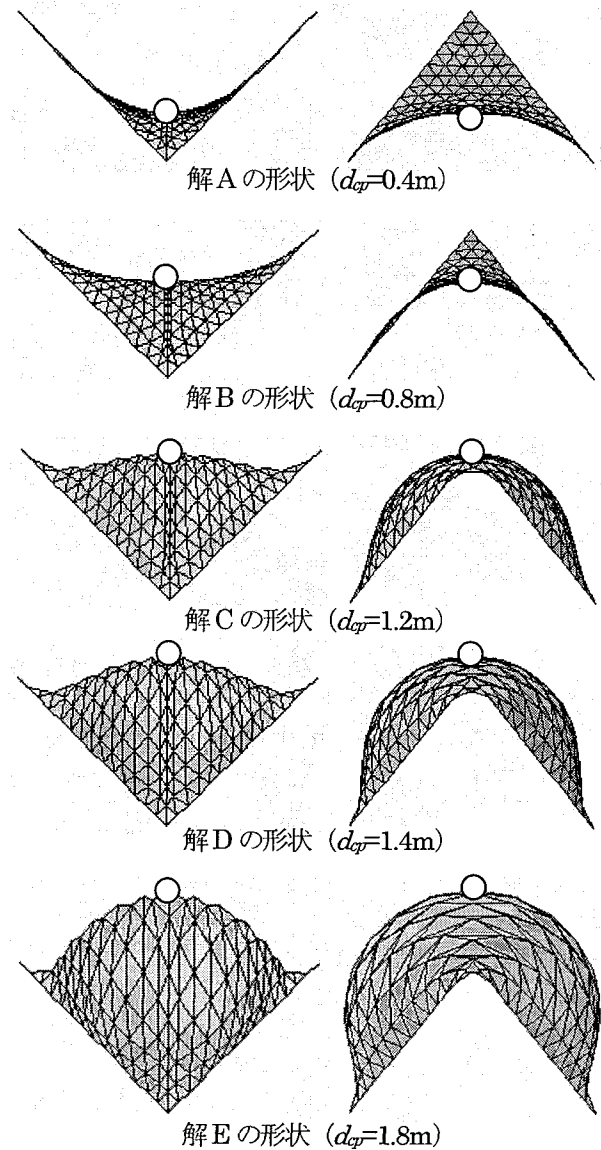


図-7 石鹼膜曲面形状

価な解を与えることが判る。このことは, 図-4における $p_0=0$ の解と図-5における $\sigma_{t2}=\pm\infty$ の解が対応していることから裏付けられる。よって, $\sigma_{t2}=\pm\infty$ の解の出現は「一定内圧を与えたにもかかわらず, 得られる曲面形状は内圧ゼロの解に相当する」ことによるものと云える。なお, 図-7は, 強制変位量 $d_q=0.4\text{m}, 0.8\text{m}, 1.2\text{m}, 1.4\text{m}, 1.8\text{m}$ のときの解の石鹼膜曲面形状 (解A~E) である。

表-1 両手法による解の比較

	d_p (m)	内圧平均化 サイマルコントロール法		膜張力平均化 サイマルコントロール法		$p_D \cdot \sigma_{t2}$ (kN^2/m^3)
		V_1 (m^3)	p_1 (kN/m^2)	V_2 (m^3)	σ_{t2} (kN/m)	
A	0.4	0.239809	-2.483633	0.239804	-8.052580	19.999651
B	0.8	0.742782	4.342704	0.742745	4.606066	20.002768
C	1.2	1.395218	8.469053	1.395260	2.361543	20.000029
D	1.4	1.842957	9.157829	1.843023	2.183971	20.000432
E	1.8	3.087734	8.915530	3.087132	2.243387	20.000981

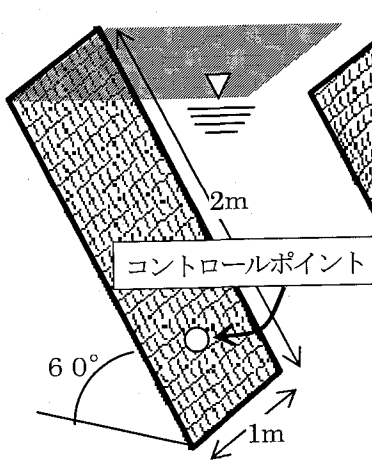


図-8 境界形状と初期要素分割
および静水圧の条件

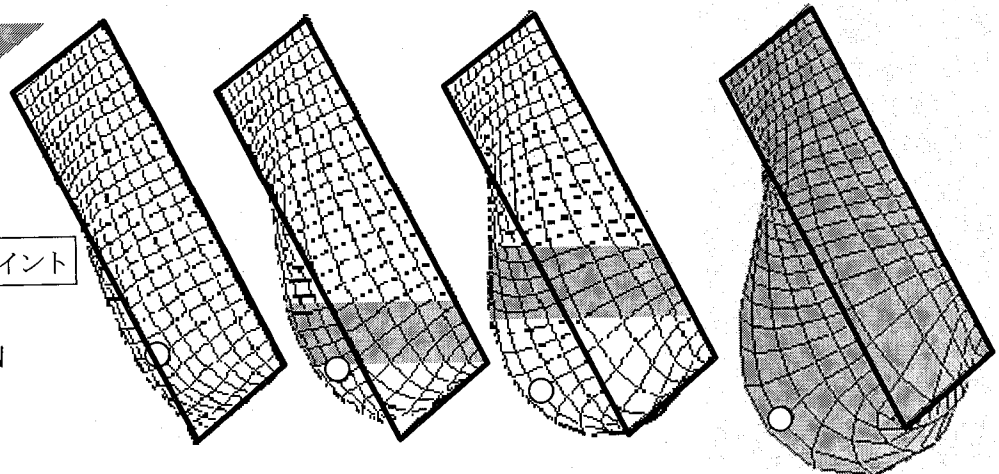


図-9 静水圧が作用する石鹸膜曲面の形状

さらに表-1 は解 A から解 E について、両手法によって得られた各物理量を比較したものである。これによれば、両手法で得られた曲面の内包体積には、小数点以下4桁目あるいは5桁目程度からの若干の差異があるが、これは石鹸膜要素が面内剛性を持たないために同一曲面内における節点配置が微妙に異なることによるものであり、要素分割数が密になればこの差異は小さくなると考えられる。また、 p_1 と σ_{t2} を掛け合わせると、ほぼ $20.0\text{kN}^2/\text{m}^3$ となり、

$$p_1 \cdot \sigma_{t2} = p_2 \cdot \sigma_{t1} \quad (21)$$

の相反性が確認できる。

4.2 静水圧が作用する石鹸膜曲面 —その1—

ここでは、静水圧が作用する場合の石鹸膜曲面の解析例を示す。図-8のような、水平面に対して 60° の傾きを持つ矩形境界に張られた石鹸膜曲面の境界上端を水面位置とする水圧荷重を設定し、膜張力平均化サイマルコントロール法によって計算を行った。ここでは、コントロールポイントに対して、曲面の法線方向に増分幅 0.01m で強制変位を与えている。なお、四角形石鹸膜要素は、4枚の三角形石鹸膜要素を張り合わせた四面体とし、単位幅膜張力と作用水圧を $1/2$ としたものを使用している。また、水圧は反復段階ごとに節点座標値より算出している。

図-10はそのときの単位幅膜張力とその仕事の相手である石鹸膜曲面の表面積との関係をプロットしたもの

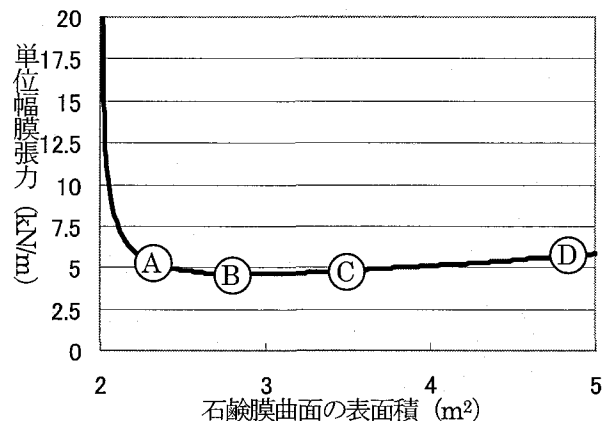


図-10 単位幅膜張力-表面積曲線

であり、図-9ではパス上の4つの解を抽出してその形状を示している。膜張力サイマルコントロール法を用いることによって、文献¹³⁾の手法では不可能であった、静水圧条件下で単位幅膜張力の極小値(解B付近)を超える解にいたるまでの追跡が可能となった。

本解析では、表面積が 5m^2 を超えた付近で、コントロールポイント周辺の要素面積が大きくなりすぎることによって、不平衡力が発散し解が得られなくなるが、さらに密な要素分割を施せば、この矩形の枠から零れ落ちる寸前の水滴の様な形状の解が得られるものと考えられる。

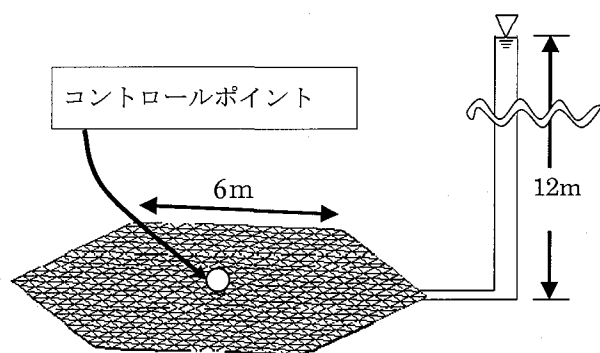


図-1 1 正六角形境界と石鹼膜に作用する水圧の水頭

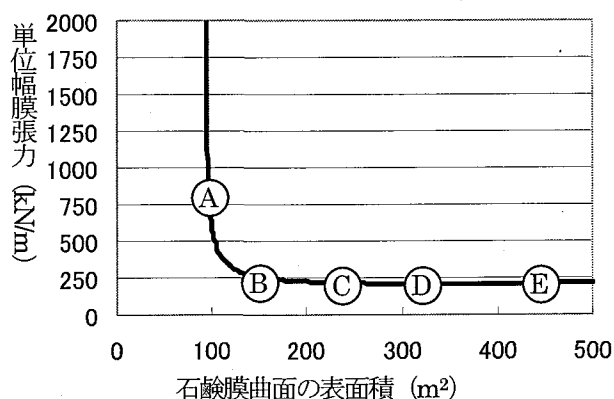
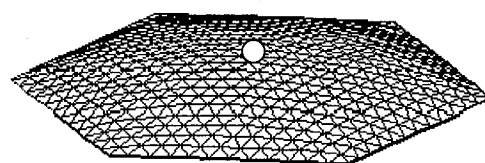


図-1 2 単位幅膜張力-表面積曲線

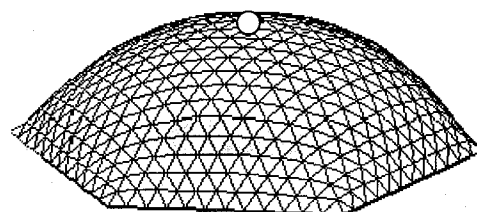
4.3 静水圧が作用する石鹼膜曲面 —その2—

図-1 1 に示すような正六角形の固定境界に石鹼膜要素を敷き詰め、水頭 12m に相当する水圧を内部から（初期段階では下側から）作用させ、膜張力平均化サイマルコントロール法によって正六角形中央のコントロールポイントを増分幅 0.1m で上方に引き上げて解析を行った。図-1 2 はそのときの単位幅膜張力-表面積曲線であり、図-1 3 はパス上の 5 つの解を抽出してその形状を示したものである。

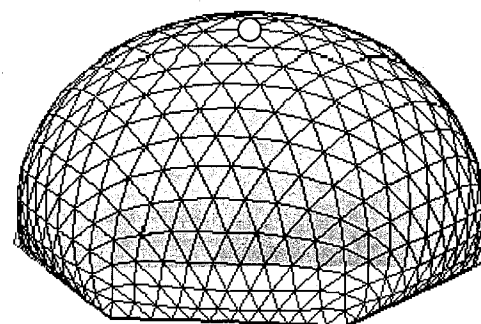
4.2 の解析例と同様に、単位幅膜張力の極小値（解 D 付近）を超える解を追跡することが可能となっており、表面積が大きくなったときの形状は、六角形の枠の中に液体を零（こぼ）したときにできあがる液滴のような形となっていることがわかる。ただし、本解析ではクラウン部節点の水圧をゼロとすることはできない（多面体近似された構造系では、外力ゼロとなる節点周辺の要素は全て同一平面内になければならない）ので、自然界に存在する液滴の形状を再現することはできない。しかしながら、本解析手法を用いることにより、「水を覆う」という特殊な条件の下でも、均一な表面張力を持つ釣合曲面が存在しうることが明らかとなった。



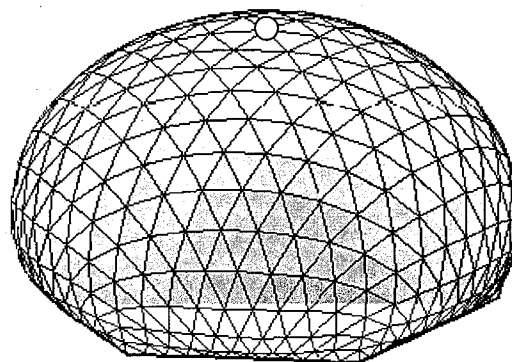
解 A の形状



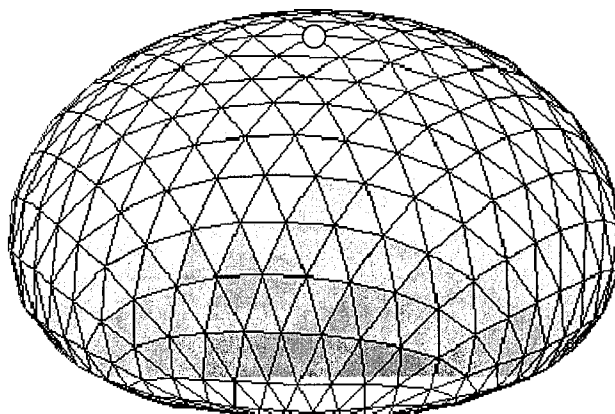
解 B の形状



解 C の形状



解 D の形状



解 E の形状

図-1 3 内部から静水圧が作用する石鹼膜曲面形状

5. まとめ

本論文では、膜張力平均化の考え方に基づくサイマルコントロール法（以下、膜張力平均化手法）による増分制御手法を提案した。

膜張力平均化手法は、著者らがこれまで提案してきた内圧平均化サイマルコントロール法（以下、内圧平均化手法）に改良を加えたものであり、反復ごとに全節点について計算される換算膜張力の平均値（平均換算膜張力）を逐次更新し収束させる手法である。膜張力平均化手法の特徴、改良された点を以下にまとめる。

- 1) 等分布内圧荷重の条件下では内圧平均化手法と膜張力平均化手法は、収束性、精度ともに全く等価な求解性能を持つ。
- 2) 膜張力平均化手法は、コントロールポイントの節点座標と荷重条件を入力条件とし、解として石鹸膜曲面形状とそのときの釣合条件を満足する単位幅膜張力（曲面全体に亘って一定）を得ることになる。
- 3) 曲面に対して等分布する荷重系を前提とした内圧平均化手法では対応できなかった水圧などの位置依存荷重条件下においても、膜張力平均化手法を用いることにより、大容積・大表面積の石鹸膜曲面形状の解析が可能となった。

よって、膜張力平均化手法では、与えられた荷重条件に対する解として得られた単位幅膜張力を、そのまま原型曲面の初期張力として用いることができるので、設計計算に用いることを前提とすれば、節点外力を未知数として計算する内圧平均化手法に比べて、より合理的な解析流れとなる。また、膜張力平均化手法では、位置依存型荷重への適応性が格段に向上したため、たとえば、海中に淡水を備蓄するための膜構造タンクや、地球外天体上で気体を覆う巨大宇宙膜構造としての利用など、膜構造物の新たな用途、新たな形態の創造と展開が期待できる。

参考文献

- 1) Ishii, K., : Analytical shape determination for membrane structures, Proc. of IASS Congress of Sept., II, pp.67-74, 1976.
- 2) 大森博司, 萩原伸幸, 松井徹哉, 松岡理: 有限要素法による極小曲面の数値解析, 膜構造研究論文集 '88, P.1-10, 1988.
- 3) 石井一夫: 膜構造の形状解析 (形状決定の問題) 概説, 膜構造論文集, No.3, pp.83-108, 1989.
- 4) 鈴木俊夫, 半外裕彦: 極小曲面の変数低減による有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No.425, pp.111-120, 1991.
- 5) 半谷裕彦: 構造物の形態解析, 土木学会論文集, No.501/I-29, pp.11 - 20, 1994.
- 6) 小林健太: J.Douglas の汎関数を用いた極小曲面の数値計算法, 日本応用数理学会論文誌, 10 巻(1), pp.21-35, 2000.
- 7) Fujimori, S.: Minimal surfaces in euclidean 3-space and their mean curvature 1 cousins in hyperbolic 3-space. An. Acad. Bras. Ciênc., vol.75, no.3, pp.271-278, 2003.
- 8) Masatoshi Kokubu, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada: Minimal surfaces that attain equality in the Chern-Offserman inequality, Contemporary Mathematics 208, American Mathematical Society, pp. 223-228, 2002.
- 9) Ishii, K.: The form of an Oil-filled Axisymmetric Membrane Tank Floating on Sea, Bulletin of the Faculty of Engineering Yokohama National University, Vol.34, pp.63-73, 1985.
- 10) 萩原国宏, 立石昂, 古屋久和: ラバーダム形状に関する研究, 土木学会論文報告集, No.179, pp.37-47, 1970.
- 11) 帯屋洋之, 劉磊, 井嶋克志, 後藤茂夫, 等張力曲面解析における接線幾何剛性, 膜構造研究論文集 '94, pp.77-85, 1994.
- 12) 帯屋洋之, 井嶋克志, 後藤茂夫, 荒牧軍治, 川崎徳明: サイマルコントロール法による膨張曲面の形態解析, 日本計算工学会論文集, Vol.4, pp.37-44, 2002.
- 13) 帯屋洋之, 井嶋克志, 井口真一: 形状依存追従力を受ける膜構造物のための等張力曲面形状に関する研究, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.79-86, 2005.

(2006年4月13日 受付)