

極めて柔軟かつ厚いコアを有するパイプインパイプ断面の静水圧による 局部座屈特性

Local Buckling Characteristics of Structural Pipe-in-Pipe Cross-Sections with Very Soft and Thick Cores under External Fluid Pressure

佐藤 太裕*, Minoo H. Patel**, Florent Trarieux***

Motohiro Sato, Minoo H. Patel, Florent Trarieux

*博士 (工学), 北海道大学大学院助手, 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

**Ph.D, Professor, Head of School of Engineering, Cranfield University (Cranfield, Bedfordshire, MK43 0AL, UK)

*** Ph.D, Research Officer, School of Engineering, Cranfield University (Cranfield, Bedfordshire, MK43 0AL, UK)

This paper presents an analysis of local collapse mechanisms of a structural pipe-in-pipe cross-section with very soft and thick core when subjected to external hydrostatic pressure. It formulates and solves the elastic collapse problem using the variational principle of minimum potential energy. Effects of the relative stiffness between the outer / inner pipes and the core, and the core thickness on the critical external pressures and the collapse modes are investigated. The paper also proposes a simplified formulation of the local buckling problem where the outer pipe and its contact with the filler material is considered as a 'ring on an elastic foundation'.

Key Words: Pipe-in-pipe, Elastic buckling, Local buckling

1. はじめに

海洋でのエネルギー輸送を目的としたパイプラインは、特に大水深域において極めて大きな静水圧作用に対する耐崩壊性、石油やガスといった高温流動体に対する耐熱性や、水中で浮力を受ける状態でのパイプラインの自重による構造安定性といった性能が、非常に高い次元で要求される構造物である。

本研究で対象とする、内側と外側の薄いパイプの間に比較的厚いコアを有するパイプインパイプ断面のパイプラインは、合成断面として崩壊強度の増加、中間のコアによる断熱効果を期待できる点から、上述の要求性能に応える優れた構造形式であるといえる。このことから、近年の海洋開発の大水深化に伴うエネルギー資源輸送技術として、パイプインパイプ断面を採用したパイプラインの有効性が今日大きく注目されている。構造設計の面では極大静水圧作用時の力学特性、特に座屈特性が極めて重要なファクターであり、近年様々な角度から研究が進められている。それらの例として Kyriakides^{1),2)}によるパイプインパイプの動的座屈現象の実験、解析両面からの検討や、Han et al.³⁾, Kardmateas and Simitses⁴⁾, Ohga et al.⁵⁾らに代表される、いわゆるサンドイッチ断面を有する円筒シェルの外圧による座屈解析などが挙げられる。また古くから北海油田の開発など海洋開発技術の発達した英国では "Deep Water Pipe-in-pipe Joint Industry

Project"⁶⁾として企業、大学共同の研究がこれまで進められてきている。

しかしこのような構造形式では、特に外側表面のパイプ厚に比べコア厚が大きな場合に外側パイプだけが崩壊に至る局部座屈のような、普通のパイプとは異なるパターンの崩壊挙動の存在が経験的に知られており、問題となっている⁶⁾。これは合成断面ゆえに起こることであり、構造力学的にも非常に興味深い現象である。崩壊パターンは合成断面におけるパイプとコアの剛性や諸元の変化に対し、大きく変化することが予想される。しかしながら上述の過去の研究はいずれも比較的薄い断面で、外側、内側パイプとコアが一体となった全体座屈を検討したものであり、外側パイプだけの局部座屈現象は解析的には明確にされていない。

上記の点から本研究では、極めて柔軟かつ厚いコアを有するパイプインパイプ断面の、静水圧作用により外側パイプのみが崩壊に至る局部座屈と、断面が一体となっておこる全体座屈について、それぞれの起こりうる条件や実際の座屈挙動に関する検討を行うことを目的とする。コア厚が非常に厚いパイプインパイプ断面の弾性座屈荷重を正確に把握するために、コア部分を2次元弾性論に基づき、円周方向の周期性を仮定した応力関数を用いて、座屈現象の定式化を行うこととする。また局部座屈では外側パイプがコアに内側から支えられた、いわゆる弾性床パイプのような挙動を示す⁶⁾。このことに着目し本研究では、厳密な解析に加え、局部座屈荷重を実

際の構造設計で有用な単純な形で導出し、その精度を厳密な解析との比較により検討する。

2. 解析モデル

図 - 1 は本研究で解析対象とするパイプインパイプ断面を、図 - 2 は極座標を用いた外側、内側パイプがコアから受ける応力を示したものである。厚肉のコアは等方性を有する弾性体（ヤング係数 E_C 、ポアソン比 ν_C ）、外側、内側のパイプ（厚さ h_1 、 h_2 ）はコアに比べて非常に薄い弾性体（ヤング係数 E_P 、ポアソン比 ν_P ）とし、非常に長いパイプラインとして、2次元平面ひずみ状態を仮定する。また外径、内径をそれぞれ a_1 、 a_2 、外側パイプの半径方向および円周方向変位を u_1 、 v_1 、内側パイプのそれらを u_2 、 v_2 とする。外側および内側パイプに対するコアの相対的剛性 E_C/E_P は、コアとしてポリマー素材のような極めて柔軟なものの適用を考える⁹⁾ことから、 10^{-3} から 10^{-7} という非常に小さいものを想定し、外側のパイプに静水圧 q が作用する場合の弾性座屈解析を行う。なお内部流体などによる内圧の影響は、本研究での検討対象としない。

ここで断面の中心部分のコアは柔軟かつ厚肉であることから、座屈挙動におけるせん断変形の影響が非常に大きいため、薄肉近似は適切ではない。このことからコアのモデル化は2次元弾性論に基づく定式化を行う。

3. 定式化

図 - 2 に示すように、外側、内側パイプの変形によりコアに生じる応力と、外側、内側パイプに生じる断面力、それぞれの境界面でつり合う。以下では座屈変形によりコアに生じる応力を2次元弾性論に基づき厳密に表現し、それらを含めた形で外側、内側パイプの座屈方程式を導出する。

3.1 コア剛性の評価

コア断面の支配方程式は極座標を用いた次式で表される⁸⁾。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \phi(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

ここで $\phi(r, \theta)$ はコア断面における応力関数であり、半径方向応力 σ_r 、円周方向応力 σ_θ 、せん断応力 $\tau_{r\theta}$ とそれぞれ次式で関係づけられる。

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} \quad (2a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r^2} \quad (2b)$$

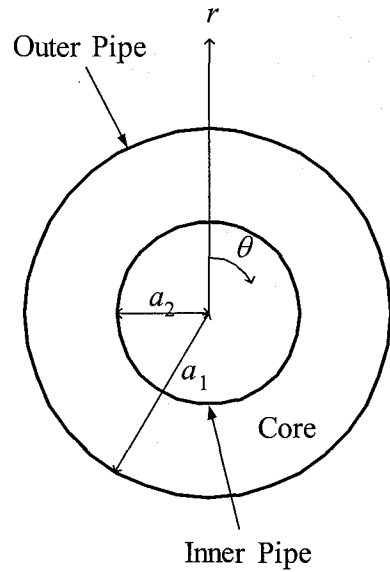


図 - 1 解析対象となるパイプインパイプ断面

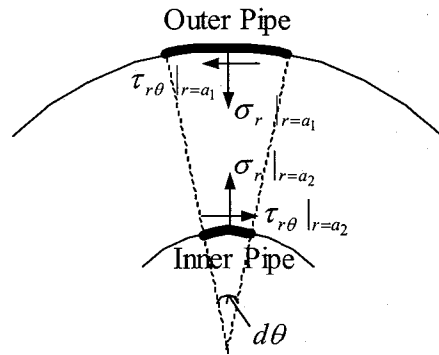


図 - 2 パイプがコアから受ける応力

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (2c)$$

本研究では静水圧によるパイプ断面の座屈を考えるため、コア断面の任意点における半径方向変位 $u(r, \theta)$ と円周方向変位 $v(r, \theta)$ は円周方向に周期性を有すると仮定し、そのうち n 次の周期性を有するものを次式で表す。

$$u(r, \theta) = u_n(r) \cos n\theta \quad (3a)$$

$$v(r, \theta) = v_n(r) \sin n\theta \quad (3b)$$

また式(1)の一般解として次式を仮定する⁸⁾。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(r) \sin n\theta \quad (4)$$

これを式(1)に代入すると、座屈モードに対応する $n \geq 2$ について次式が得られる。

$$f_n(r) = A_n r^{-n} + B_n r^{2-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^n \quad (5b)$$

ここで A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n は任意定数である。 $\tilde{f}_n(r)$ についてもほぼ同様のものが得られるが、ここでは式(3)に対応する $\cos$ 成分について考えればよい。これより各

応力成分は式(2), (4), (5b)より次式の形で得られる.

$$\sigma_r = -\{A_n n(n+1)r^{-n-2} + B_n(n-1)(n+2)r^{-n} + C_n(n+1)(n-2)r^n + D_n n(n-1)r^{n-2}\} \cos n\theta \quad (6a)$$

$$\sigma_\theta = \{A_n n(n+1)r^{-n-2} + B_n(n-1)(n-2)r^{-n} + C_n(n+1)(n+2)r^n + D_n n(n-1)r^{n-2}\} \cos n\theta \quad (6b)$$

$$\tau_{r\theta} = \{-A_n n(n+1)r^{-n-2} - B_n(n^2 + n - 2)r^{-n} + C_n n(n+1)r^n + D_n n(n-1)r^{n-2}\} \sin n\theta \quad (6c)$$

また, 平面ひずみ状態におけるひずみ (半径方向ひずみ ε_r , 円周方向ひずみ ε_θ , せん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$) と応力の関係は次式で表される.

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} 1-\nu_c^2 & -\nu_c(1+\nu_c) & 0 \\ -\nu_c(1+\nu_c) & 1-\nu_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_c) \end{bmatrix} \{\sigma\} \quad (7)$$

ここで

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}\}$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\}$$

である. 式(7)より, 式(6)の応力に対応するひずみが求められる. またこれよりコアの任意点 (r, θ) における変位が次式により得られる.

$$u(r, \theta) = \int \varepsilon_r dr = \frac{1+\nu_c}{E_c} \{A_n n r^{-n-1} + B_n(n-4\nu_c+2)r^{1-n} - C_n(n+4\nu_c-2)r^{n+1} - D_n n r^{n-1}\} \cos n\theta + P \quad (8a)$$

$$v(r, \theta) = \int (r\varepsilon_\theta - u) d\theta = \frac{1+\nu_c}{E_c} \{A_n n r^{-n-1} + B_n(n+4\nu_c-4)r^{1-n} + C_n(n-4\nu_c+4)r^{n+1} + D_n n r^{n-1}\} \sin n\theta + Q \quad (8b)$$

ここで P, Q は積分定数である. 外側パイプの半径, 円周方向変位振幅を U_1, V_1 , 内側パイプのそれらを U_2, V_2 とし, $h_1, h_2 \ll h_c$ より, パイプとコアの境界条件として次式を与える.

$$u(a_1, \theta) = u_1 = U_1 \cos n\theta \quad (9a)$$

$$v(a_1, \theta) = v_1 = V_1 \sin n\theta \quad (9b)$$

$$u(a_2, \theta) = u_2 = U_2 \cos n\theta \quad (9c)$$

$$v(a_2, \theta) = v_2 = V_2 \sin n\theta \quad (9d)$$

式(8)と(9)より, 次式が得られる.

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}_c]^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで

$$[\mathbf{M}_c] = \frac{1+\nu_c}{E_c} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_{21} = n a_1^{-n-1}, \quad m_{12} = (n-4\nu_c+2)a_1^{1-n},$$

$$m_{13} = -(n+4\nu_c-2)a_1^{n+1}, \quad m_{14} = -m_{24} = -n a_1^{n-1},$$

$$m_{22} = (n+4\nu_c-4)a_1^{1-n}, \quad m_{23} = (n-4\nu_c+4)a_1^{1-n},$$

$$m_{31} = m_{41} = n a_2^{-n-1}, \quad m_{32} = (n-4\nu_c+2)a_2^{1-n},$$

$$m_{33} = -(n+4\nu_c-2)a_2^{n+1}, \quad m_{34} = -m_{44} = -n a_2^{n-1}$$

$$m_{42} = (n+4\nu_c-4)a_2^{1-n}, \quad m_{43} = (n-4\nu_c+4)a_2^{1-n}$$

である. 式(11)により, コア断面の応力状態が外側および内側パイプの変位により表されることとなる. これよりコアの剛性係数 (剛性マトリックス) に相当するものを導出する. そのために, 式(11)において, 以下の4つの変位の状態を考える.

$$U_1 = 1, \quad U_2 = V_1 = V_2 = 0 \quad (12a)$$

$$V_1 = 1, \quad U_1 = U_2 = V_2 = 0 \quad (12b)$$

$$U_2 = 1, \quad U_1 = V_1 = V_2 = 0 \quad (12c)$$

$$V_2 = 1, \quad U_1 = V_1 = U_2 = 0 \quad (12d)$$

これらをそれぞれ式(11)に代入し求められる A_n, B_n, C_n, D_n を用いて, 式(5a)および(5c)により得られる応力を次式で表す,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r|_{r=a_1} \\ \tau_{r\theta}|_{r=a_1} \\ \sigma_r|_{r=a_2} \\ \tau_{r\theta}|_{r=a_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_{11}}{a_1} & \frac{d_{12}}{a_1} & \frac{d_{13}}{a_1} & \frac{d_{14}}{a_1} \\ \frac{d_{21}}{a_1} & \frac{d_{22}}{a_1} & \frac{d_{23}}{a_1} & \frac{d_{24}}{a_1} \\ -\frac{d_{31}}{a_2} & -\frac{d_{32}}{a_2} & -\frac{d_{33}}{a_2} & -\frac{d_{34}}{a_2} \\ -\frac{d_{41}}{a_2} & -\frac{d_{42}}{a_2} & -\frac{d_{43}}{a_2} & -\frac{d_{44}}{a_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \cos n\theta \\ V_1 \sin n\theta \\ U_2 \cos n\theta \\ V_2 \sin n\theta \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_c] \{\mathbf{U}\} \quad (13)$$

ここで

$$[\mathbf{D}_c] = \begin{bmatrix} \sigma_r|_{r=a_1}^{(a)} & \sigma_r|_{r=a_1}^{(b)} & \sigma_r|_{r=a_1}^{(c)} & \sigma_r|_{r=a_1}^{(d)} \\ \tau_{r\theta}|_{r=a_1}^{(a)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_1}^{(b)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_1}^{(c)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_1}^{(d)} \\ \sigma_r|_{r=a_2}^{(a)} & \sigma_r|_{r=a_2}^{(b)} & \sigma_r|_{r=a_2}^{(c)} & \sigma_r|_{r=a_2}^{(d)} \\ \tau_{r\theta}|_{r=a_2}^{(a)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_2}^{(b)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_2}^{(c)} & \tau_{r\theta}|_{r=a_2}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式(14)において, 上添字の(a)~(d)はそれぞれ式(12a)~(12d)により得られる応力を表す. このことから, 対応する d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) は, 外側および内側パイプとの境界面でのコアによる剛性係数を表すものである. 詳細は付録にて記述する.

3.2 パイプの弾性座屈

奥行方向に対して単位長さあたりの全ポテンシャルエネルギーは次式で表される.

$$U = U_c + U_{P,1} + U_{P,2} + \Omega = \int_0^{2\pi} F d\theta \quad (15)$$

ここで U_c は奥行方向に対して単位長さあたりのコアのひずみエネルギーであり, 次式で表される.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{a_2}^{a_1} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) r dr d\theta \quad (16a)$$

また $U_{P,1}, U_{P,2}$ は外側および内側パイプのひずみエネル

ギ一、 Ω は作用する静水圧によるポテンシャルエネルギー（いずれも奥行方向に対して単位長さあたり）であり、文献7)よりそれぞれ次式で表される。

$$U_{P,1} = a_1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_p h_1}{2(1-\nu_p^2)} \left\{ \frac{v_1' + u_1'}{a_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 - u_1'}{a_1} \right)^2 \right\}^2 + \frac{E_p h_1^3}{24(1-\nu_p^2)} \left(\frac{v_1' - u_1''}{a_1^2} \right)^2 \right] d\theta \quad (16b)$$

$$U_{P,2} = a_2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_p h_2}{2(1-\nu_p^2)} \left\{ \frac{v_2' + u_2'}{a_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - u_2'}{a_2} \right)^2 \right\}^2 + \frac{E_p h_2^3}{24(1-\nu_p^2)} \left(\frac{v_2' - u_2''}{a_2^2} \right)^2 \right] d\theta \quad (16c)$$

$$\Omega = q \int_0^{2\pi} \left\{ u_1 + \frac{1}{2} (v_1' - u_1' v_1 + u_1 v_1' + u_1^2) \right\} d\theta \quad (16d)$$

$$X' \equiv \frac{dX}{d\theta} \quad (X = u_1, v_1, u_2, v_2)$$

外側、内側パイプとコアが弾性座屈の状態でつり合うことは、式(15)における F が Euler-Lagrange 方程式を満足することと等価である。このことからパイプの座屈に関する支配方程式は、前節式(13)において導出されたコアの剛性が含まれた形として、次式のように得られる。

$$\frac{E_p h_1}{(1-\nu_p^2) a_1} (u_1 + v_1')' + \frac{E_p h_1^3}{12(1-\nu_p^2) a_1^3} (v_1 - u_1')'' + a_1 \tau_{r\theta} \Big|_{r=a_1} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{E_p h_1}{(1-\nu_p^2) a_1} (u_1 + v_1') - \frac{E_p h_1^3}{12(1-\nu_p^2) a_1^3} (v_1 - u_1')'' + q a_1 (u_1'' + u_1) + a_1 \sigma_r \Big|_{r=a_1} = 0 \quad (17b)$$

$$\frac{E_p h_2}{(1-\nu_p^2) a_2} (u_2 + v_2')' + \frac{E_p h_2^3}{12(1-\nu_p^2) a_2^3} (v_2 - u_2')'' - a_2 \tau_{r\theta} \Big|_{r=a_2} = 0 \quad (17c)$$

$$\frac{E_p h_2}{(1-\nu_p^2) a_2} (u_1 + v_1') - \frac{E_p h_2^3}{12(1-\nu_p^2) a_2^3} (v_1 - u_1')'' - a_2 \sigma_r \Big|_{r=a_2} = 0 \quad (17d)$$

式(9a)-(9d)を式(17a)-(17d)に代入し、整理すると、次式が得られる。

$$[M][U] = 0 \quad (18)$$

ここで、

$$[M] = \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} + \bar{q} & c_{12} + d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ c_{21} + d_{21} & c_{22} + d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & c_{33} + d_{33} & c_{34} + d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & c_{43} + d_{43} & c_{44} + d_{44} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式(19)において、 c_{ij} ($i, j = 1, 2$ または $i, j = 3, 4$) はパイプ剛性に関する係数、 $\bar{q}$ は静水圧荷重に関する係数であり、それぞれ次式で表される。

$$c_{11} = \frac{2E_p h_1}{a_1(1-\nu_p^2)} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2 n^4 \right\} \quad (20a)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{2E_p h_1}{a_1(1-\nu_p^2)} \left[n \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2 n^2 \right) \right] \quad (20b)$$

$$c_{22} = \frac{2E_p h_1}{a_1(1-\nu_p^2)} \left[n^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2 \right\} \right] \quad (20c)$$

$$c_{33} = \frac{2E_p h_2}{a_2(1-\nu_p^2)} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_2}{a_2} \right)^2 n^4 \right\} \quad (20d)$$

$$c_{34} = c_{43} = \frac{2E_p h_2}{a_2(1-\nu_p^2)} \left[n \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_2}{a_2} \right)^2 n^2 \right) \right] \quad (20e)$$

$$c_{44} = \frac{2E_p h_2}{a_2(1-\nu_p^2)} \left[n^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_2}{a_2} \right)^2 \right\} \right] \quad (20f)$$

$$\bar{q} = -\frac{2E_p h_1}{a_1(1-\nu_p^2)} q(n^2 - 1) \quad (20g)$$

また d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) は前に導出したコア剛性に関するパラメータである。これよりパイプインパイプ断面の座屈荷重 q_{cr} は式(18)において非自明な解を有する固有値として、次式を満足する。

$$\det[M] = 0 \quad (21)$$

座屈荷重 q_{cr} は式(21)の固有値解析により $n \geq 2$ の各モードで得られる荷重のうち、最小のものとなる。

4. 結果と考察

ここでは導出された座屈方程式より得られる座屈荷重および座屈モードに関する考察を行う。支配的なパラメータとしてコアとパイプの剛性比 E_c/E_p 、内径/外径比 a_2/a_1 、コアのポアソン比 ν_c 、外側、内側パイプ厚と外径の比 h_1/a_1 、 h_2/a_1 を取り上げ、これらと座屈荷重、座屈モードの関係について以下で検討する。

4.1 座屈荷重に関する考察

図-3(a)~(c)は E_c/E_p 、 a_2/a_1 の変化に伴う座屈荷重 q_{cr} 、座屈モード次数 n の変化を示したものである。図-3の横軸 a_2/a_1 は相対的なコア厚に対応する量であり、これが大きいほど薄いコアであることを意味している。また縦軸はパイプインパイプ断面の座屈荷重 q_{cr} を外側パイプのみ（コアがない状態）の座屈荷重 q^* で無次元化したものである。この q^* は次式で表される荷重である。

$$q^* = \frac{E_p}{4(1-\nu_p^2)} \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^3 \quad (22)$$

また図-3中の点線は弾性床土パイプとして、次式で簡略化される座屈荷重である⁷⁾。

$$q_{cr} = \frac{1}{12} \frac{n^2 - 1}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2} \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)^3 + \frac{1}{n^2 - 1} d_{11} a_1 \quad (23)$$

上式は外側パイプがコアの半径方向剛性のみを考慮

した Winkler foundation により内側から支えられたモデルの座屈荷重式に対応するものであり、式(22)にコア剛性による項（右辺第2項）が単純に加わった形で表される。ここでは地盤剛性係数(Foundation Modulus)に相当するパラメータとして、前節にて導出した外側パイプにおけるコアの半径方向剛性係数 d_{11} を用いることとした。

(1) 相対的なコア剛性、コア厚の変化による座屈荷重、座屈モードの変化

図 - 3(a)に着目すると、相対的なコア剛性の増加に伴い、座屈荷重は増加し、高次の座屈モードが発生しやすくなる。この高次のモードは局部座屈に対応するものである。また $E_c/E_p \geq 10^{-5}$ ではコア厚の減少に伴い、座屈モードが高次から $n=2$ に切り替わる点が存在する。高次のモードに対してこの $n=2$ のモードは、全体座屈に対応するものである。高次のモードでは座屈荷重はコア厚に関わらずほぼ一定値となり、弾性床パイプを仮定した式(23)によく一致している。しかし $n=2$ の座屈モードが発生するコア厚の領域では、コア厚の減少と共に座屈荷重も減少する傾向を示し、局部座屈を仮定した式(23)とは当然かけ離れたものとなる。また $10^{-3} \leq E_c/E_p \leq 10^{-5}$ では、コア剛性が増すほどコア厚が薄い場合でも局部座屈が生じている。つまりコア剛性が大きな場合、局部座屈が発生しやすくなるといえる。

一方比較的コア剛性が非常に柔軟な $E_c/E_p \leq 10^{-6}$ では、コア厚に関わらず $n=2$ の座屈が生じ、 $E_c/E_p > 10^{-5}$ の場合と若干異なる傾向を示している。 $E_c/E_p = 10^{-6}$ の場合では、コア厚の減少と共に座屈荷重は a_2/a_1 が 0.6 付近までは増加し、それより大きい、すなわち薄い領域で減少する傾向を示す。また式(21)の厳密な座屈荷重は簡易式(23)と若干の差異が生じている。

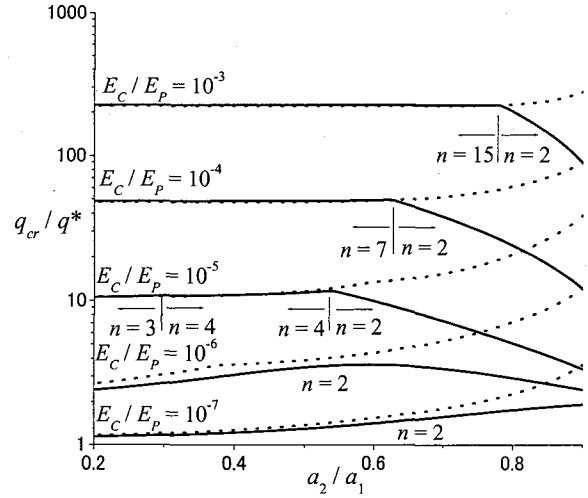
これに対し $E_c/E_p = 10^{-7}$ の場合では、コア厚が大きい場合は $q_{cr}/q^* \approx 1$ である。これはコアが極めて柔軟なため、内側パイプやコアが十分機能せず、ほとんど外側パイプが座屈荷重を負担している状態となっているためである。内側パイプが座屈と関係しないため、結果的に式(23)で近似が可能となる。コア厚の減少に伴い、内側パイプやコアもある程度座屈荷重を負担するため、座屈荷重が増加する。

(2) 外側、内側パイプ厚の変化による座屈荷重、座屈モードの変化

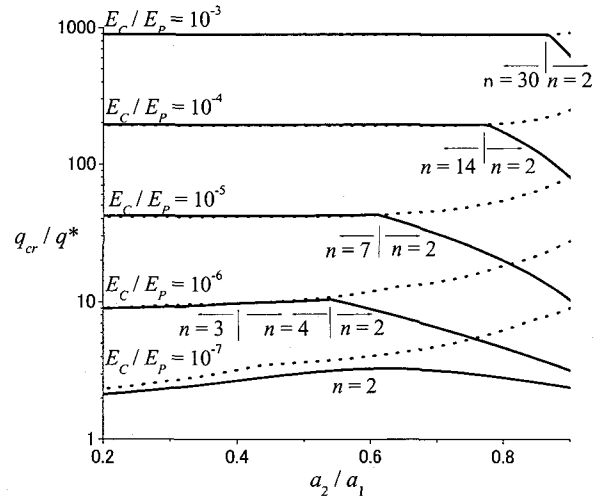
図 - 3(b)は図 - 3(a)に対し外側、内側パイプ厚をそれぞれ 1/2 倍とした場合の座屈荷重の変化を示したものである。両者の比較により、表面パイプの厚さが薄くなることで局部座屈が発生しやすく、かつ高次の座屈モードとなることがわかる。また q_{cr}/q^* は全体的に増加している。

(3) ポアソン比の変化による座屈荷重、座屈モードの変化

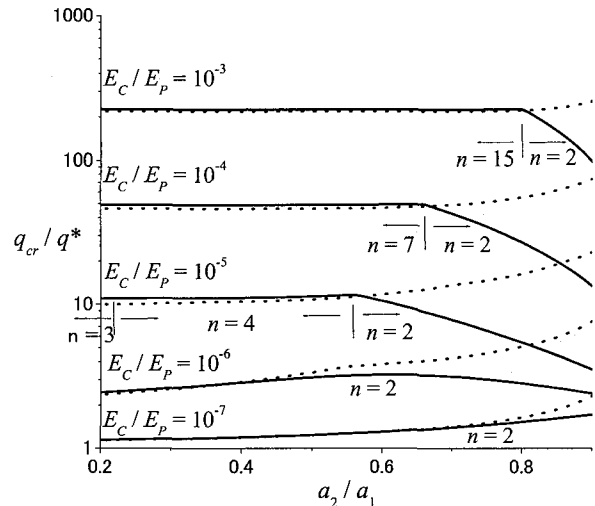
図 - 3(c)は図 - 3(a)に対しコアのポアソン比を変化させた結果を示している。ポアソン比の減少によりせん断剛性が増加し、結果として座屈荷重は若干増加している。しかしその差異は非常に小さく、座屈モード次数の



(a) $h_1/a_1 = h_2/a_2 = 0.01$, $\nu_c = 0.4$



(b) $h_1/a_1 = h_2/a_2 = 0.005$, $\nu_c = 0.4$



(c) $h_1/a_1 = h_2/a_2 = 0.01$, $\nu_c = 0.2$

図 - 3 座屈荷重 ($\nu_p = 0.3$)

(実線：式(21)より得られる厳密な座屈荷重、
点線：簡易式(23)より得られる座屈荷重)

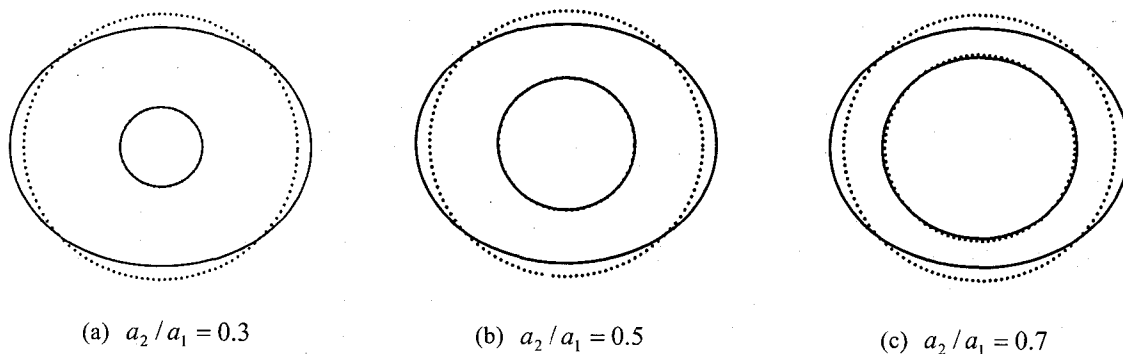


図 - 4 座屈モード ($E_C/E_P = 10^{-7}$)

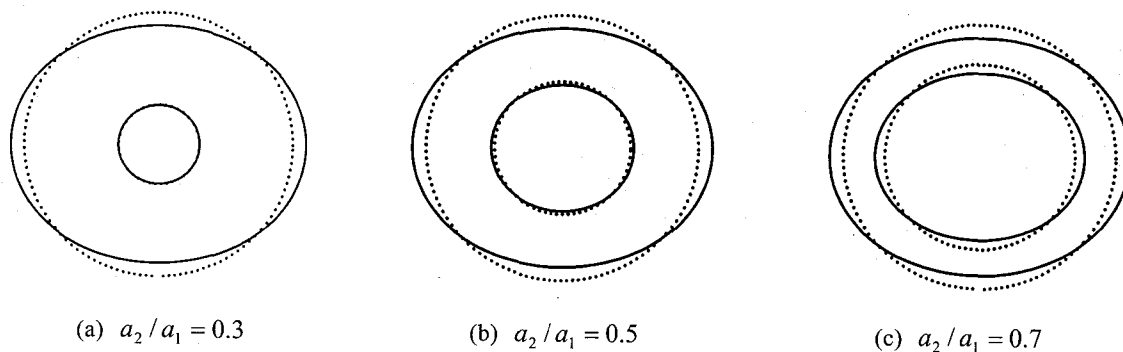


図 - 5 座屈モード ($E_C/E_P = 10^{-6}$)

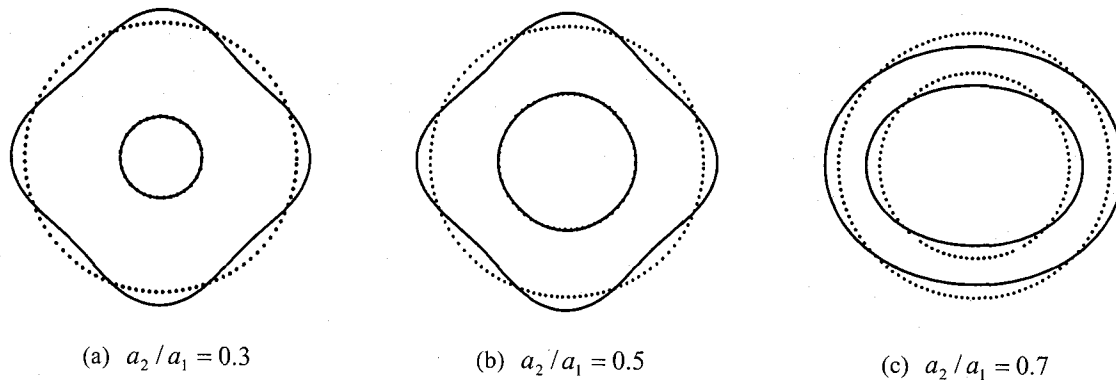


図 - 6 座屈モード ($E_C/E_P = 10^{-5}$)

変化の傾向も両者はほとんど等しいといえる。ポアソン比を変化させた解析は、本論文にて掲載した図以外のケースについても行い検討したが、それらからも座屈荷重に与える影響は非常に小さいことが確認されている。

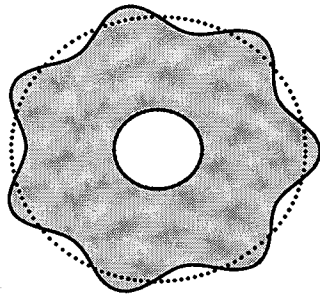
4.2 座屈モードに関する考察

図 - 4 から図 - 8 は $h_1/a_1 = h_2/a_1 = 0.01$, $\nu_C = 0.4$, $\nu_P = 0.3$ における座屈モードを、コア厚、コア剛性を変化させた場合について示したものである。これらの座屈モードはそれぞれ図 - 3 (a) の座屈荷重に対応するものである。

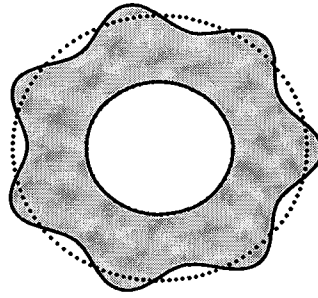
まず $E_C/E_P = 10^{-7}$ (図 - 4) では、コアの厚さに関わらず $n=2$ の座屈モードとなっている。しかしコア剛

性が外側、内側パイプ剛性に比べ相対的に非常に小さいため、内側パイプは大きく変形しない。特にコア厚が大きなものではほとんど変形がみられない。このようにコアが極めて柔軟な場合は、 $n=2$ の座屈モードであっても外側、内側パイプとコアが一体となって機能しないことがわかる。一方 $E_C/E_P = 10^{-6}$ (図 - 5) の場合も同様に座屈モードはコア厚によらずいずれも $n=2$ ではあるが、 $E_C/E_P = 10^{-7}$ の場合に比べある程度内側パイプの変形がみられる。このことは図 - 3 (a) で示した座屈荷重の $E_C/E_P = 10^{-6}$ の場合において、内側パイプを剛と仮定した弾性床パイプの座屈荷重である式(23)よりも実際の座屈荷重が小さいという結果に対応する。

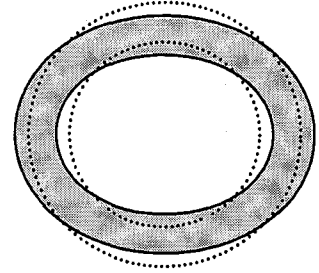
図 - 6 はさらにコア剛性が大きな $E_C/E_P = 10^{-5}$ の結



(a) $a_2/a_1 = 0.3$

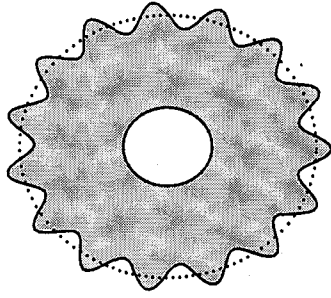


(b) $a_2/a_1 = 0.5$

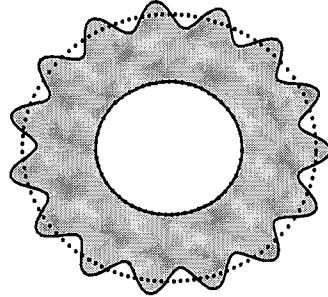


(c) $a_2/a_1 = 0.7$

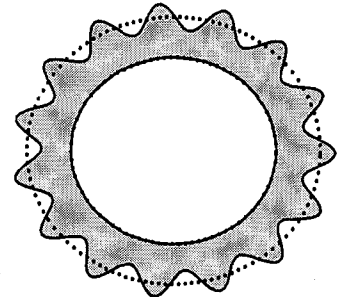
図 - 7 座屈モード ($E_c/E_p = 10^{-4}$)



(a) $a_2/a_1 = 0.3$



(b) $a_2/a_1 = 0.5$



(c) $a_2/a_1 = 0.7$

図 - 8 座屈モード ($E_c/E_p = 10^{-3}$)

果であるが、コアが比較的厚い $a_2/a_1 = 0.3, 0.5$ において、外側パイプのみに $n=4$ の座屈モードが発生している一方で、内側パイプはほとんど変形せず、弾性床上パイプのような状態となっている。図 - 3(a)では、式(21)より得られるパイプの座屈荷重と弾性床上パイプに簡略化された式(23)が、このコア厚ではほぼ一致している。座屈モードはこれに対応するものといえる。また $a_2/a_1 = 0.7$ では $n=2$ の座屈モードが発生するが、 $E_c/E_p < 10^{-6}$ の場合と異なり、内側パイプもコア、外側パイプと一体となった変形を示している。

この $n > 2$ の局部座屈が発生する傾向は、相対的なコア剛性がさらに大きい $E_c/E_p = 10^{-4}$ (図 - 7) や $E_c/E_p = 10^{-3}$ (図 - 8) において顕著となる。コア剛性の増加に伴い、局部座屈における座屈モード次数が増加し、より高次の波形モードが外側パイプのみにみられるようになる。

5. まとめ

本研究は内側と外側の薄いパイプの間に比較的厚いコアを有するパイプインパイプ断面を有するパイプラインにおいて起こり得る、静水圧作用による外側パイプのみに崩壊に至る局部座屈と、断面が一体となっておこる全体座屈について、それぞれの発生条件や特性について検討を行ったものである。得られた知見をまとめると以下

のとおりである。

- (1) コア部分を2次元弾性論に基づき、円周方向の周期性を仮定した応力関数を用いて、座屈現象の定式化を行った。これによりコア厚が非常に厚いパイプインパイプ断面の弾性座屈荷重を正確に把握することが可能となった。
- (2) コア剛性の増加により座屈荷重も増加するが、同時に外側パイプのみの局部座屈が起こりやすくなる。
- (3) 外側パイプ厚の減少により、局部座屈が発生しやすくなり、その座屈モードはより高次となる。
- (4) 外側パイプのみの局部座屈荷重を簡単に表す式として、弾性床上パイプのモデルに、本研究にて導出した剛性係数を用いるものを提案した。さらにより厳密な解析との比較により、この式から得られた座屈荷重は、局部座屈荷重をよい精度で近似できることを示した。

付録

定数 d_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$) は次式で定義される。

$$d_{ij} = \frac{\tilde{d}_{ij}}{d} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} d = & (1 + \nu_c) [(3 - 4\nu_c)^2 a_1^{4n+2} a_2^2 \\ & - \{8(2\nu_c^2 - 3\nu_c + 1) + n^2\} a_1^{2n+4} a_2^{2n} + 2(n^2 - 1) a_1^{2n+2} a_2^{2n+2} \\ & - \{8(2\nu_c^2 - 3\nu_c + 1) + n^2\} a_1^{2n} a_2^{2n+4} + (3 - 4\nu_c)^2 a_1^2 a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{11} = & E_C \{ [1 - 2\nu_C + 2n(\nu_C - 1)](4\nu_C - 3)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & - \{8(1 - \nu_C) + n^2(4\nu_C - 5)\}a_1^{2n+4}a_2^{2n} \\ & + 2(n^2 - 1)(2\nu_C - 3)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} \\ & + \{8(2\nu_C^2 - 3\nu_C + 1) + n^2\}a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & - \{2\nu_C - 1 + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{12} (= \tilde{d}_{21}) = & -E_C \{ \{2(1 - \nu_C) + n(2\nu_C - 1)\}(-3 + 4\nu_C)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & - n\{4(\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n+4}a_2^{2n} \\ & + 2n(n^2 - 1)(2\nu_C - 3)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} \\ & - n\{8(2\nu_C^2 - 3\nu_C + 1) + n^2\}a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & + \{2(\nu_C - 1) + n(2\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{13} (= \tilde{d}_{31}) = & -2E_C(\nu_C - 1)a_1^{n+1}a_2^{n+1} \times \\ & [(n-1)\{4(\nu_C - 1) - n\}(a_1^{2n+2} - a_2^{2n+2}) \\ & + (n+1)\{4(\nu_C - 1) + n\}a_1^2a_2^2(a_1^{2n-2} - a_2^{2n-2})] \\ \tilde{d}_{14} (= \tilde{d}_{41}) = & 2E_C(\nu_C - 1)a_1^{n+1}a_2^{n+1} \times \\ & [(n-1)\{4(\nu_C - 1) - n\}a_1^{2n+2} + (n+1)\{2(1 - 2\nu_C) + n\}a_1^{2n}a_2^2 \\ & + (n+1)\{4(\nu_C - 1) + n\}a_1^2a_2^{2n} \\ & + (n-1)\{2(1 - 2\nu_C) - n\}a_2^{2n+2}] \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{22} = & E_C \{ [1 - 2\nu_C + 2n(\nu_C - 1)](4\nu_C - 3)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & + n^2(4\nu_C - 3)a_1^{2n+4}a_2^{2n} - 2(n^2 - 1)(2\nu_C - 1)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} \\ & + \{8(\nu_C - 1)(2\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & - \{2\nu_C - 1 + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{23} (= \tilde{d}_{32}) = & 2E_C(\nu_C - 1)a_1^{n+1}a_2^{n+1} \times \\ & [(n-1)\{2(2\nu_C - 1) + n\}a_1^{2n+2} \\ & - (n+1)\{4(\nu_C - 1) + n\}a_1^{2n}a_2^2 \\ & + (n+1)\{2(2\nu_C - 1) - n\}a_1^2a_2^{2n} \\ & + (n-1)\{4(1 - \nu_C) + n\}a_2^{2n+2}] \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{24} (= \tilde{d}_{42}) = & -2E_C(\nu_C - 1)a_1^{n+1}a_2^{n+1} \times \\ & [(n-1)\{2(2\nu_C - 1) + n\}(a_1^{2n+2} - a_2^{2n+2}) \\ & + (n+1)\{2(2\nu_C - 1) - n\}a_1^2a_2^2(a_1^{2n-2} - a_2^{2n-2})] \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{33} = & E_C \{ \{2\nu_C - 1 + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & - \{8(\nu_C - 1)(2\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n+4}a_2^{2n} \\ & - 2(n^2 - 1)(2\nu_C - 3)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} \\ & + \{8(1 - \nu_C) + n^2(4\nu_C - 5)\}a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & - \{1 - 2\nu_C + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{34} (= \tilde{d}_{43}) = & E_C \{ \{2(\nu_C - 1) + n(2\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & - n\{8(\nu_C - 1)(2\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n+4}a_2^{2n} \\ & + 2n(n^2 - 1)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} - n\{4(\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & + \{2(1 - \nu_C) + n(2\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{44} = & E_C \{ \{2\nu_C - 1 + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^{4n+2}a_2^2 \\ & - \{8(\nu_C - 1)(2\nu_C - 1) + n^2\}a_1^{2n+4}a_2^{2n} \\ & - 2(n^2 - 1)(2\nu_C - 1)a_1^{2n+2}a_2^{2n+2} - n^2(4\nu_C - 3)a_1^{2n}a_2^{2n+4} \\ & - \{1 - 2\nu_C + 2n(\nu_C - 1)\}(4\nu_C - 3)a_1^2a_2^{4n+2}] \end{aligned} \quad (A.11)$$

謝辞

本研究は第一著者（佐藤太裕）が 2004 年度財団法人 鹿島学術振興財団海外派遣援助（長期）を受け、在外研究として英国クランフィールド大学にて実施されたものであります。ここに鹿島学術振興財団をはじめとする関係各位に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Kyriakides, S.: Buckle propagation in pipe-in-pipe systems: Part I. Experiments, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol.39(2), pp.351-366, 2002.
- 2) Kyriakides, S.: Buckle propagation in pipe-in-pipe systems: Part II. Analysis. *Int. J. Solids. Struct.*, Vol.39(2), pp.367-392, 2002.
- 3) Han, J.H., Kardmateas, G.A. and Simites, G.J.: Elasticity, shell theory and finite element results for the buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure, *Composites Part B*, Vol.35, pp.591-598, 2004.
- 4) Kardmateas, G.A. and Simites, G.J.: Buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure. *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.72, pp.493-499, 2005.
- 5) Ohga, M., Wijenayaka, A.S. and Croll, J.G.A.: Reduced stiffness buckling of sandwich cylindrical shells under uniform external pressure, *Thin-Walled Structures*, Vol.43(8), pp.1188-1201, 2005.
- 6) BPP Technical Services LTD.: Deep Water Pipe-in-pipe Joint Industry Project, 2001.
- 7) Brush, D.O. and Almroth, B.O.: Buckling of bars, plates and shells, McGraw-Hill, New York, 1975.
- 8) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.: Theory of elasticity, third edition, McGraw-Hill, New York, 1970.
- 9) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of elastic stability second edition, McGraw-Hill, New York, 1961.

(2006 年 4 月 13 日 受付)