

全体剛性行列を用いた粒状要素解析

Application of Global Stiffness Matrix to Granular Element Analysis

土倉 泰*

Toru Tsuchikura

*工博, 前橋工科大学助教授, 工学部建設工学科 (〒371-0816 群馬県前橋市上佐鳥町 460-1)

In usual analysis using the granular element method, global stiffness matrix is rarely applied. The main reason is that inverse matrix calculation for a large matrix was considered to be inefficient. However, from the author's experience there is an efficiently calculated case in which the global stiffness matrix is applied in comparison with a calculation performed without applying the global stiffness matrix for the same problem. Therefore, formularization of the granular element analysis in which the global stiffness matrix is applied is presented. Irregularly shaped elements composed of circles or spheres are used in the formularization. Analytical results of reproducing shear tests on stacks of aluminum rods are also presented.

Key Words: Granular Element Method, stiffness matrix, shear test, Force-Line Graph

1. まえがき

粒状要素法¹⁾³⁾は, 粒子の集合体の準静的挙動を解析するために開発されたシミュレーション手法である. 同法を適用した計算においては, 各粒子の接触による剛性関係が把握される. この剛性関係と, 各粒子に作用する不釣合い力に基づいて, 各粒子の移動・回転量が算定され, ある一定の境界条件のもとで各粒子が所定の力の釣合い精度を満たすまで, 繰り返し粒子を動かす計算が行われる. なお, 粒子を一度動かすだけで釣合いの精度が満たされない原因は, 新たな接触点の生成の影響等である.

各粒子で把握される剛性関係は剛性行列に表される. これらを重ね合わせれば, 全体剛性行列を求めることができる. ところが, 従来の粒状要素法の計算では, 全体剛性行列は用いられない場合が多い. この場合には, 着目した粒子以外を固定して考えた剛性のみが用いられ, 算定された粒子の動きに割引係数をかけた値で粒子が動かされる. このとき, 前もって評価されていない隣接粒子の動きがあるために, 粒子が動かされたときに解消する不釣合い力は, 全体剛性行列を用いた場合と比べて小さい. このような計算法がとられるのは, 全体剛性行列が大行列となり, その逆行列演算が効率的ではないと考えられたためである.

しかし, 著者が 849 個のアルミ丸棒を積み上げた粒状体に対するせん断試験を粒状要素法で再現することを試みた際, 全体剛性行列を用いる場合と全体剛性行列を用いない場合とを比較したところ, 全体剛性行列を用いない場合に著しく計算効率が悪かった. 得られた結果に大きな差はみられなかったものの, 全体剛性行列を用いない場合には, 各粒子の力の釣合い精度が満たされるまでに, 非常に多く

の繰り返し計算が必要となった. 粒子数, 粒子径, 粒子間に設定する剛性の大きさ, 割引係数の値といった条件によって計算効率に関する結果は変わることが予想され, 端的に示すことはできないが, 少なくとも全体剛性行列を用いることが常に非効率とはいえないようである.

従来の粒状要素法の適用において, 全体剛性行列は無視されることが多かったため, これまで具体的な定式化が十分に明示されていなかった. そこで, 本文では, 円や球の接触を扱うことを基本としながらも要素の不規則形状をも表現可能な要素を使用する場合を想定して, 全体剛性行列を用いた粒状要素解析の定式化を示す. また, 全体剛性行列を用いた解析では, 個々の粒子は一度に大きく動くため, 計算を安定に進めるための工夫が必要となる点に言及する. さらに, 全体剛性行列を用いて円要素による粒状要素解析を行い, アルミ丸棒積層体の二軸圧縮試験と一面せん断試験を, ほぼ定量的にシミュレートできた例を示す.

2. 剛性行列の考え方

2.1 粒子の接触と接触点の剛性

粒子集合体の個々の粒子をモデル化した要素は, 独立に移動・回転ができる. 移動・回転する中で隣接要素と接触したり離れたりする場合もあり得る. 接触する要素間には非常に小さな重なりを設け, その重なり具合から接触力の法線方向成分を算定する. なお, 接触力の接線方向成分は, 接触点における隣接要素の相対変位・回転によって算定する. 接触力の算定に Hertz の理論を用いれば, 材料の弾性係数を反映させた計算が可能である.

要素間の接触を容易に判定するために、2次元であれば円、3次元であれば球を用いて要素形状を表現することが多い。以下に後述の計算例において用いた円（円柱）の接触に関する Hertz 式を示す。各式は文献^{4,5)}を参照して著者なりに整理したものである。なお、式中の δ は円の重なり量、 p_n は接触力の法線方向成分、 k_n は接触剛性の法線方向成分を表す。 k_n は p_n を δ で微分して求めた。

まず、弾性係数が E_1 、 ν_1 の直線（平板）と弾性係数が E_2 、 ν_2 で直径 D の円（円柱）とが接触する場合の接触力の法線方向成分 p_n は以下の式によって算定できる。

$$p_n = \frac{\pi}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} + \ln \left(\frac{2D}{b} \right) \right\}} \delta \quad (1)$$

ここに、

$$b = \sqrt{\frac{8}{\pi} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) K_D p_n} \quad (2)$$

であり、この場合の K_D は次式で与えられる。

$$K_D = D \quad (3)$$

また、この場合の剛性は、次のようになる。

$$k_n = \frac{1}{\left\{ \frac{\delta}{p_n} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right\}} \quad (4)$$

次に、弾性係数が E 、 ν で直径が D_1 の円（円柱）と直径が D_2 の円（円柱）が接触する場合の接触力の法線方向成分 p_n は以下の式によって算定できる。

$$p_n = \frac{\pi}{2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \left\{ \frac{2}{3} + \ln \left(\frac{2D_1}{b} \right) + \ln \left(\frac{2D_2}{b} \right) \right\}} \delta \quad (5)$$

ここに、

$$b = \sqrt{\frac{16}{\pi} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) K_D p_n} \quad (6)$$

であり、この場合の K_D は次式で与えられる。

$$K_D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \quad (7)$$

また、この場合の剛性は、次のようになる。

$$k_n = \frac{1}{\left\{ \frac{\delta}{p_n} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \right\}} \quad (8)$$

一方、接触平面内の接触力成分 p_t は接触剛性 k_t に接触点の接線方向の相対変位をかけて算定する。接触剛性の接線方向成分 k_t は、Mindlin の導いた次式で算定できる⁵⁾。

$$k_t = \frac{1}{\alpha} k_n \times \left(1 - \frac{p_t}{p_n \tan \phi_\mu} \right)^{1/3} \quad (9)$$

ここに、 ϕ_μ は摩擦角である。また、 α は1から1.5程度の値である。

2.2 円の接触を基本とした2次元要素の剛性行列

ここでは、要素表面に配置した円の集まりで要素の不規則形状を表す要素を用いることを想定し、剛性行列の定式化を示す。このような要素を扱うのは、より一般性のある定式化が明確になるからである。図-1 は、ある要素が他の要素と点 C で接している状況を示している。G は要素の重心を表し、O は要素表面に配置されて他の要素（図では破線で示す円）と点 C で接触する円の中心を表す。

他の要素と接触している要素においては、それ自身が移動・回転することにより、その要素に作用している不釣り合い力・不釣り合いモーメントが解消され得る。不釣り合い力・不釣り合いモーメントに対応した移動・回転量を算定するためには要素剛性を用いなければならない。要素剛性は、各要素に存在する全接触点の剛性を重ね合わせて求められる。剛性の重ね合わせの際は、図-1 に示す接触点 C に設けた n, t 座標で定義された接触点の剛性を、要素重心 G に設けた x, y 座標をもとにした要素剛性に変換する。

いま、着目する要素を要素 N と呼ぶことにする。まず、要素 N の移動・回転を次式のように表す。

$$\Delta U_N = (\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta \omega)^t \quad (10)$$

ここで、 t は行列の転置を表す。 Δu_x 、 Δu_y は x, y 軸で表す座標でとらえた変位、 $\Delta \omega$ は x, y 軸で表す座標の原点まわりの回転である。なお、変位は各軸の正の向きを正とし、回転は反時計回りを正とする。

次に、接触する相手側（図-1 では破線の円）の要素を固定したときに、要素 N の移動・回転によって解消される要素 N の不釣り合い力・不釣り合いモーメントの行列を次のように定義する。

$$\Delta f_{NN} = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta m)_{NN}^t \quad (11)$$

ここに、 Δf_x 、 Δf_y はそれぞれ x, y 軸で表す座標でとらえた力、 Δm はモーメントである。力は各軸の正の向きを正とし、モーメントは反時計回りを正とする。

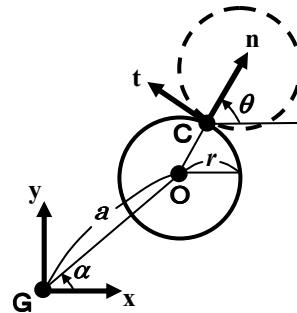


図-1 要素重心 G における座標と接触点 C における座標

すると、上記2行列の間に次の関係が成り立つ。

$$\Delta f_{NN} = S_{NN} \Delta U_N \quad (12)$$

ここで、

$$S_{NN} = \sum_C T_{NC}^{-1} S_C T_{NC} \quad (13)$$

は着目要素 N 以外を固定して考えた場合の要素剛性である。この式の中の、

$$S_C = \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{pmatrix}_C \quad (14)$$

は n,t 座標での接触点の剛性を表し、 k_n は法線方向の接触剛性、 k_t は接線方向の接触剛性である。また、

$$T_{NC} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & a\sin(\theta-\alpha) \\ -\sin\theta & \cos\theta & a\cos(\theta-\alpha)+r \end{pmatrix}_{NC} \quad (15)$$

は要素 N の重心における x,y 座標で表した移動・回転量を接触点 C における n,t 座標の変位に変換する行列である。式中の記号は図-1 に示す通りである。なお、式(13)の \sum_C は着目する要素に関するすべての接触点の和を表す。また、式(13)に示すように T_{NC}^{-1} をかけると、n,t 座標で定義された接触点の剛性が、要素重心 G に設けた x,y 座標をもとにした要素剛性へ変換される。

ところで、N の不釣り合い力・不釣り合いモーメントは接触する相手側 (図-1 では破線の円) の要素の動きによっても解消される。いま、接触する相手側要素を M とする。要素 M の移動・回転によって解消される要素 N の不釣り合い力・不釣り合いモーメントを次の行列で定義する。ただし、このとき要素 N は固定して考える。

$$\Delta f_{NM} = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta m)_{NM}^t \quad (16)$$

ここに、行列の各成分は式(11)と同一である。この行列については、式(12)と同様の形で以下の関係を導くことができる。

$$\Delta f_{NM} = S_{NM} \Delta U_M \quad (17)$$

$$S_{NM} = \sum_C T_{NC}^{-1} S_C' T_{MC} \quad (18)$$

なお、2次元では S_C' は S_C に等しい。

ここで、すべての要素を固定せず動かしたときに解消される N の不釣り合い力・不釣り合いモーメントを表す行列を、

$$\Delta F_N = (\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta M_N)^t \quad (19)$$

とする。ここに、 ΔF_N の成分は Δf_{NM} に準じる。そして、仮に N と接する要素が M, M', M'' の3つだとすると、

$$\Delta F_N = \Delta f_{NN} + \Delta f_{NM} + \Delta f_{NM'} + \Delta f_{NM''} \quad (20)$$

となることがわかる。

いま、すべての要素の ΔU_N および ΔF_N に相当する行列をつなげてそれぞれ1列に並べた行列をつくると、両者の関係は、式(12), (17), (20)より次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta F_N \\ \Delta F_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{NN} & S_{NM} & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{MN} & S_{MM} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta U_N \\ \Delta U_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (21)$$

上式の S_{NN} や S_{NM} 等から構成される行列が全体剛性行列である。なお、この行列は対称行列である。また、接触していない要素間の S_{NM} (あるいは S_{MN}) に相当する部分はすべてゼロとなる。

2.3 球の接触を基本とした3次元要素の剛性行列

図-2 は球の接触を基本とした3次元の要素について、図-1と同様に、要素重心 G における座標と接触点 C における座標との幾何学的な関係を示したものである。

この場合は、前節の式(10), (11)に対応する行列がそれぞれ式(22), (23)のようになる。

$$\Delta U_N = (\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z, \Delta \omega_x, \Delta \omega_y, \Delta \omega_z)_{NN}^t \quad (22)$$

ここに、 $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ は x,y,z 軸で表す座標でとらえた変位、 $\Delta \omega_x, \Delta \omega_y, \Delta \omega_z$ はそれぞれ x,y,z 軸で表す座標でとらえた回転である。なお、変位は各軸の正の向きを正とし、回転量は各軸の正の向きにみて右回りを正とする。

$$\Delta f_{NN} = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta f_z, \Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z)_{NN}^t \quad (23)$$

ここに、 $\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta f_z$ はそれぞれ x,y,z 軸で表す座標でとらえた力、 $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$ はそれぞれ x,y,z 軸で表す座標でとらえたモーメントである。なお、力は各軸の正の向きを正とし、モーメントは各軸の正の向きにみて右回りを正とする。

式(14)に対応する式は次のようになる。

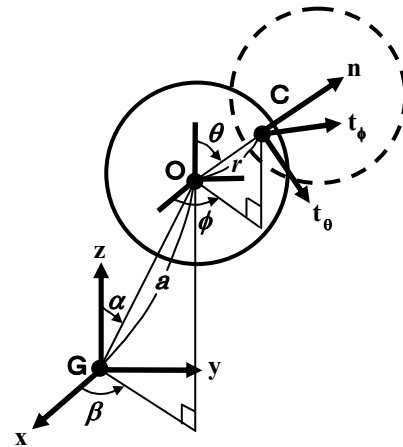


図-2 要素重心 G における座標と接触点 C における座標

$$\mathbf{S}_C = \begin{pmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{pmatrix}_C \quad (24)$$

また、 x, y, z 軸の座標で表した移動・回転量を n, t_θ, t_ϕ 軸の座標の変位で表すための座標変換を表す 3×6 の行列は以下のようになる。

$$\mathbf{T}_{NC} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} a(\cos\theta \sin\alpha \sin\beta - \sin\theta \sin\phi \cos\alpha) \\ -a(\cos\theta \sin\phi \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \sin\beta) - r\sin\phi \\ -a\cos\phi \cos\alpha - r\cos\theta \cos\phi \\ a(\sin\theta \cos\phi \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha \cos\beta) \\ a(\sin\theta \sin\alpha \cos\beta + \cos\theta \cos\phi \cos\alpha) + r\cos\phi \\ -a\sin\phi \cos\alpha - r\cos\theta \sin\phi \\ a(\sin\theta \sin\phi \sin\alpha \cos\beta - \sin\theta \cos\phi \sin\alpha \sin\beta) \\ a(\cos\theta \sin\phi \sin\alpha \cos\beta - \cos\theta \cos\phi \sin\alpha \sin\beta) \\ a(\cos\phi \sin\alpha \cos\beta + \sin\phi \sin\alpha \sin\beta) + r\sin\theta \end{pmatrix}_{NC}$$

ここに、記号の定義は図-2の通りである。

式(18)に相当する式中の \mathbf{S}_C' は3次元の場合に次のような行列となる。

$$\mathbf{S}_C' = \begin{pmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & -k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{pmatrix}_C \quad (26)$$

上の行列の成分において k_t に負の符号が付くのは、接触する2球（図-2の実線の球と破線の球）において、 t_θ の軸の向きが同一となるためである。

2.4 全体剛性行列を適用する際の留意点

式(21)の関係式に示される全体剛性行列の逆行列を求めれば、不釣合い力を解消するべく各要素に与える移動・回転量を計算することができる。ところが、接触状況から算定される全体剛性行列のままでは、逆行列が求まらない場合がある。これは、粒子が孤立したり、粒子がすべて接触点の接線方向の剛性がゼロとなったりする場合が存在するからである。

解析において、全体剛性行列の逆行列計算を安定させるためには、対角成分に接触剛性と比較して十分小さな値を加えておけばよい。この小さな剛性成分は、各要素の移動・回転を固定する作用を担う。

また、全体剛性行列を用いた計算では、各要素の計算の1ステップにおける移動量が大きくなる。解析中には新たな接触が生じることがあるので、1ステップ中の移動量が大きいと、前段階では離れていた要素間に突然大きな重なり

りが生じるおそれがある。このとき、急激に大きな接触力が算定されることになるので不自然である。

新たな接触点の発生は、剛性からはあらかじめ把握できないので、次のような操作を計算に加えた。すなわち、新しい接触点ができただけの場合、その点における重なり量（接触力）が十分小さな値になるまで、その計算ステップで求めた全要素の移動・回転量を同率で線形に引き戻すのである。この操作により、不自然に大きな接触力が作用することを避けられるようになった。

3. アルミ丸棒積層体のせん断試験の再現

3.1 二軸圧縮試験

松岡ら^{6,7)}の行ったアルミ丸棒積層体に対する二軸圧縮試験を、粒子の配置をできるだけ忠実に再現した上で、全体剛性行列を用いた粒状要素法で再現することを試みた。積層体は直径5mmと9mmのアルミ丸棒を重量比3:2で混合したもので、アルミ丸棒は849個である。粒子配置は実験の写真をトレースした上で設定した。なお、設定した粒子配置において、初期に存在した円の重なりは無視して計算を進めた。

用いたパラメータは、アルミ丸棒のヤング率 $7.1 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ 、ポアソン比0.34、摩擦角 16° 、境界の板のヤング率 $2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 、ポアソン比0.28、摩擦角 10° である。アルミ丸棒の密度は 2700kg/m^3 とした。また、式(9)の α は1とした。実験と同じ条件である等方圧 $4.9 \times 10^4 \text{N/m}^2$ を作用させて所定の精度で力の釣合い状態を求めた後、拘束圧を一定に保ったまま、上板を圧縮させる応力制御の載荷を行った。なお、力の釣合いの精度は粒子1個の重さ程度とした。

図-3が実験結果とシミュレーション結果を比べたものである。△印のプロットは実験結果で、■印のプロットがシミュレーションの結果である。両者は比較的良好に一致しているといえよう。図-4と図-5は、それぞれ初期の等方圧載荷状態と変形の最終状態の力線グラフ⁸⁾を描いたものである。黒い線の長さは接触する2粒子の半径の和、方

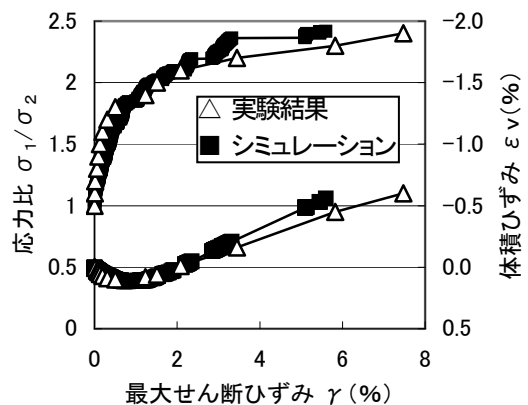


図-3 実験とシミュレーションの比較（二軸圧縮試験）

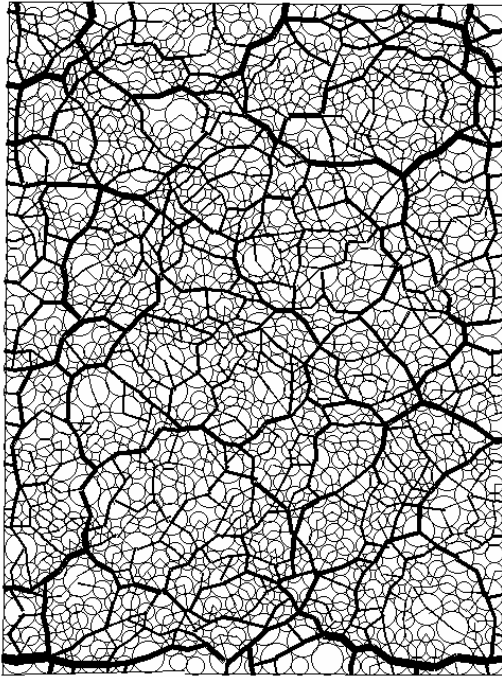


図-4 初期状態の力線グラフ

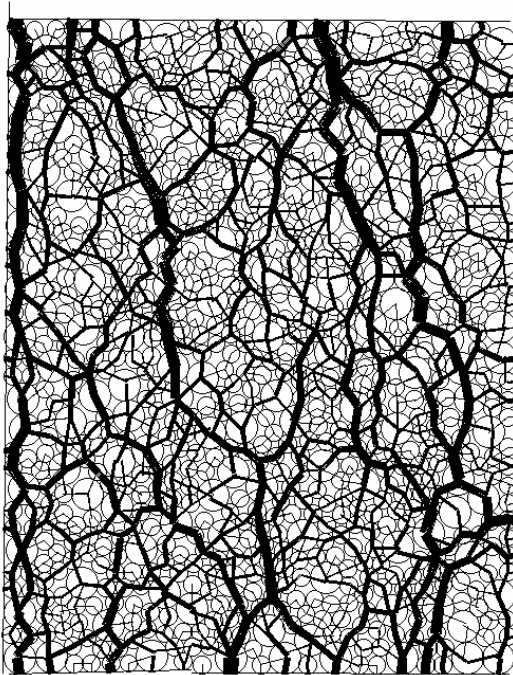


図-5 変形最終状態の力線グラフ

向は接触力の作用方向を示し、線の太さは接触力の大きさに比例させて描いている。両図より、鉛直方向の圧縮にもなって力線も鉛直方向に集中することがよくわかる。

3.2 一面せん断試験

アルミ丸棒積層体に対する一面せん断試験の再現を試みた。実験は松岡ら^{6,7)}の行ったものである。上載圧 $4.9 \times$

10^4N/m^2 を作用させて力の釣合い状態を求めた後、上載圧一定の条件下で下箱を水平方向に動かしてせん断した。

上載圧 σ は上板に作用する鉛直方向力の和を下箱底面の長さで割った値とし、せん断応力 τ は上板に作用する水平方向力の和を下箱底面の長さで割った値とした。用いたパラメータは、境界の板の摩擦角を 16° とした以外は、二軸圧縮試験のときと同じである。ここで、境界の板の摩擦角を 16° としたのは、参考文献⁹⁾で用いられた値と同じ値としたものである。なお、ここでは2種類の積層体に対する試験をシミュレートした。2つを配列1・配列2と称する。どちらもアルミ丸棒の数は約450個で、混合の仕方は二軸圧縮試験のときと同じである。ただし両者の粒子配置の詳細は異なっている。二軸圧縮試験のときと同様に粒子配置のデータを入力した。

せん断応力の増分を設定し、計算ステップごとに一定の精度のもとで力の釣合い状態を求める解析を進めたところ、途中まで実験をよく再現できることを応力比～変位関係で確認した。しかし、ピーク強度前に応力比が上昇する段階を上手く再現することができなかった。この原因は、次節で説明する通り、実験が変位制御で行われており、せん断箱は常に動いているのに対して、解析は動的効果を取り入れていないためと考えられる。

粒状要素解析では通常、力の釣り合い状態が求まるまで繰り返し計算を行う。しかしながら、せん断箱を動かしている実験を再現する場合に、力の釣合いが求まるまで計算を繰り返す必要はないと考えた。

そこで、解析においては、境界条件として下箱のせん断応力を与える応力制御法を採用した。ここで下箱のせん断応力は下箱に作用する水平方向力の和を下箱底面の長さで割った値である。そして、同一の境界条件のもとでの下箱の水平移動距離に限界値を設け、この限界値に達した場合は力が釣合っていないとしてもその境界条件下の繰り返し計算を打ち切って結果を出力し、次段階の応力境界条件下の繰り返し計算に移行するものとした。

力の釣合い状態が得られないうちに繰り返し計算を打ち切った場合に、次段階の下箱に与える応力境界条件は、上下の箱で算定されるせん断応力の小さい方の値と前段階の境界条件であるせん断応力の値との大小関係によって区別した。力が釣合っていないと一般に両者の値は異なる。前者が大きい場合は、前者の応力に所定の応力増分を与え、後者が大きい場合は、前段階と同じ応力を与えた。また、下箱の水平移動距離の限界値は、実験（解析も同じ）の応力比～変位関係の初期勾配の $1/10$ に相当する値とした。

図-6～図-9が得られた結果である。図-6と図-8に示す応力比～変位関係では、△印のプロットが実験の結果であり、◆印のプロットがシミュレーションの結果である。粒子配列の異なる2種の粒状体のそれぞれに対するせん断特性をよく再現できている。

図-7と図-9に示した力線グラフでは、下箱の水平移動によって、右下から左上につながるように力線グラフが集中する様子がとらえられている。なお、上板が回転して

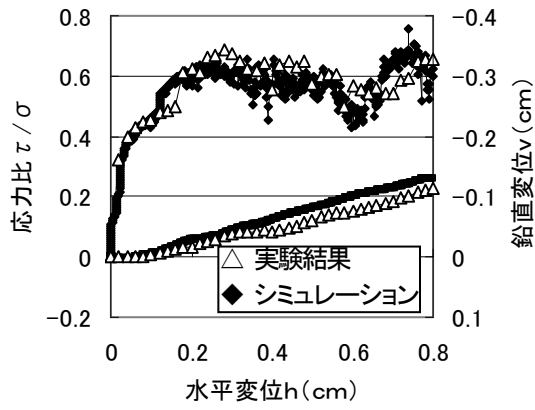


図-6 実験とシミュレーションの比較 (配列1)

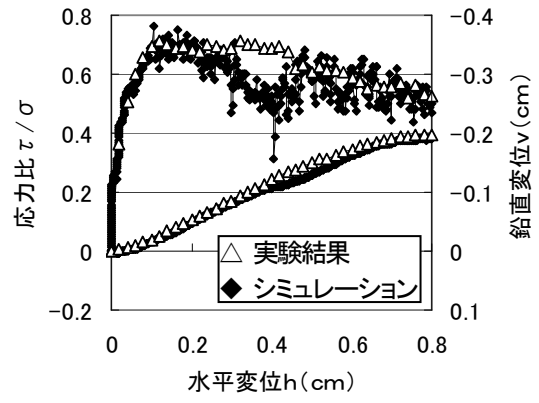
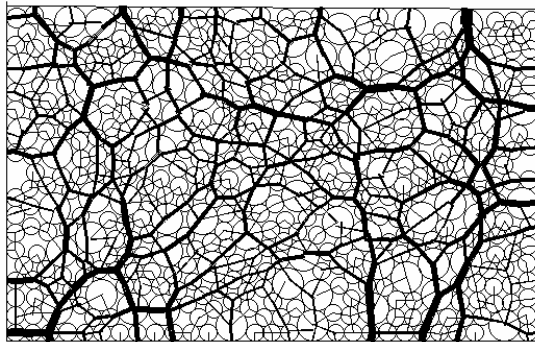
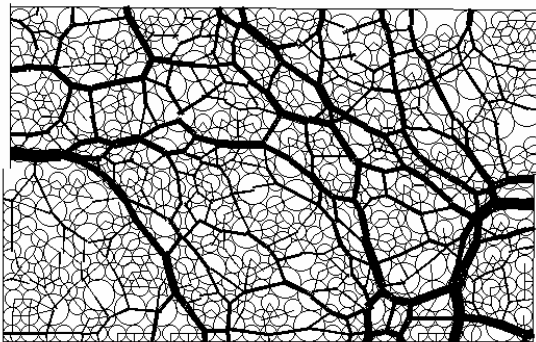


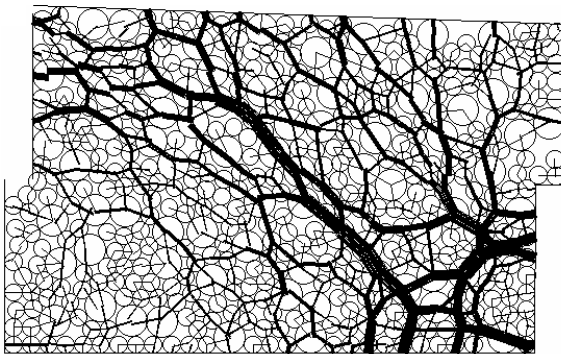
図-8 実験とシミュレーションの比較 (配列2)



(a)水平変位 h=0cm

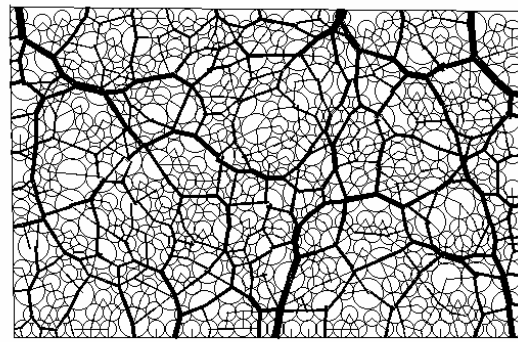


(b)水平変位 h=0.2cm

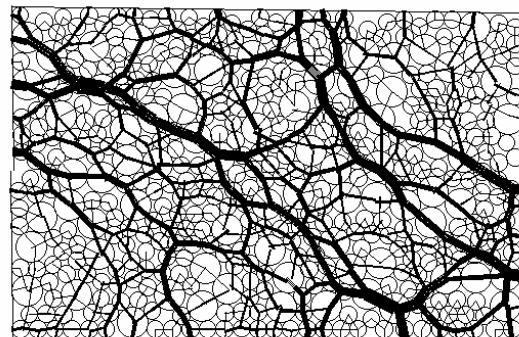


(c)水平変位 h=0.8cm

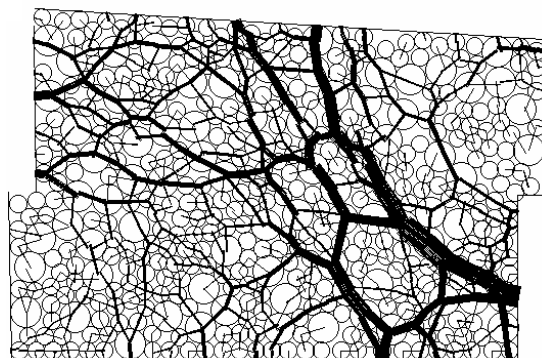
図-7 変形にともなう力線グラフの変化 (配列1)



(a)水平変位 h=0cm



(b)水平変位 h=0.1cm



(c)水平変位 h=0.8cm

図-9 変形にともなう力線グラフの変化 (配列2)

いるのは、上板にモーメントが作用したためである。上板も要素の1つとみなしており、モーメントが作用したときには、中心点周りの回転を与えている。

3.3 力線グラフの不均質な集中に関する考察

一面せん断試験を行った粒状体の粒子数は 450 個程度であり、狭い箱の中に比較的少ない粒子が詰まっている状態である。応力比～変位関係のピークに向かう、 $h=0.2\text{cm}$ (配列 1) あるいは $h=0.1\text{cm}$ (配列 2) の時点以降での力線グラフを、図-7 や図-9 でみると、太い線が境界と境界の間に突っ張り棒のように形成されているのがわかる。

本来、応力比～変位関係のピークに向かう時点では、力線グラフが激しく変化して、次々と新しい接触構造ができていくものと考えられる。ところが、粒子数が少なく、一面せん断という不均質なせん断変形が加わっていることもあって、太い力線が境界の間に突っ張り棒のように形成されたものと考えられる。

この突っ張り棒は、下箱が動き続けている間は力を伝達しているが、下箱の動きが小さいと消滅すると考えられる。前節で述べたとおり、当初の計算ではせん断途中から実験を再現できなくなった。これは、力の釣合いを求める解析条件下において、力の釣合い状態を求めて繰り返し計算を行っている間に、突っ張り棒が崩れてしまうような構造変化があるために、ピーク強度前に応力比が上昇する段階を上手く再現することができなかつたものと考えられる。動的に押し続ける力が必要なのであろう。

そこで、この点を確認するために、同一の応力境界条件のもとで下箱に設定する水平移動距離の限界値を大きくすることによって、緩速载荷に対応する解析を行った結果を図-10 に示す。この場合の限界値は、図-6 の結果を得たシミュレーションで用いた限界値の 10 倍とした。□印のプロットは緩速载荷に対応する解析の結果であり、◆印のプロットは図-6 の結果を同じ図に示したものである。緩速载荷時には途中から応力比が上がりきらないことがわかる。

ガラスビーズを用いて、载荷速度を変えた標準型の一面せん断試験も行ってみた。せん断箱は直径 6cm、高さ 2cm の円筒形であり、使用したガラスビーズの直径は 4mm である。载荷は 1.0mm/min と 0.1mm/min の 2 種類で 3 回ずつ行った。载荷速度以外の条件はできる限り一致させた。図-11 がその結果を示す。□印のプロットは载荷速度 0.1mm/min の比較的ゆっくりとしたせん断の結果であり、■印のプロットは载荷速度 1.0mm/min で速めのせん断の結果である。図-10 のシミュレーション結果と同じ傾向となった。

さらに、速めの载荷のできる突っ張り棒のような構造が緩速载荷ではできにくいことを、接触力の大きさ分布から検討した。図-12 は、図-10 に示した 2 種のシミュレーションで得られた接触力の大きさに関する変動係数の推移を示す。□印のプロットは緩速载荷に対応する解析の結果であるが、比較的速めの载荷に対応する■印のプロット

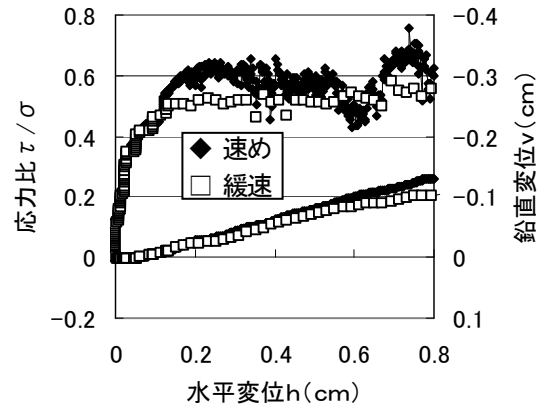


図-10 速度を変えたシミュレーションの比較

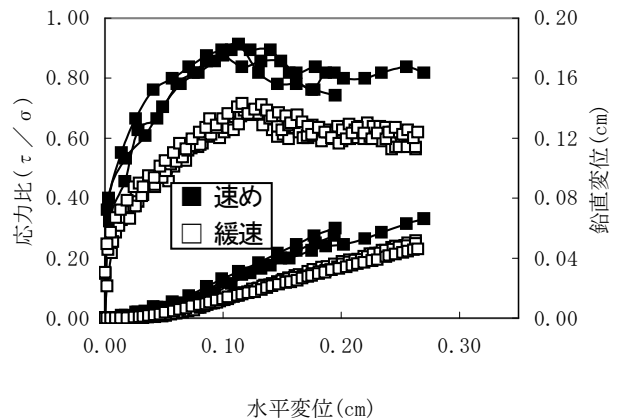


図-11 速度を変えたガラスビーズの実験の比較

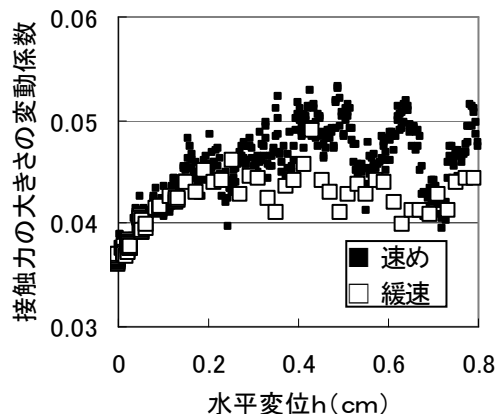


図-12 接触力の大きさの変動係数に関する比較

の変動係数よりも小さくなっている。すなわち、緩速载荷では接触力の大きさのばらつきが小さくなっており、突っ張り棒のような力の集中する構造ができにくかったことを示していると考えられる。

4. あとがき

本文では、全体剛性行列を用いた粒状要素法の具体的な定式化を明示した。また、円の接触に関する Hertz 理論を粒状要素法への適用を念頭において整理し、アルミ丸棒積層体のせん断試験のシミュレーションに適用した。アルミ丸棒積層体の二軸圧縮試験を再現する際に用いているパラメータは、弾性係数と摩擦角のみである。パラメータの設定に頭を悩ませることなく、定量的にも実験をほぼ再現できることを示した。

ただし、力の釣合い状態を繰り返し計算で求める粒状要素法では、本文で解析対象としたアルミ丸棒積層体の一面せん断で応力比～変位関係のピーク前の挙動を再現できなかった。それでも、境界の動かし方を工夫するだけで、実験をよく再現できるようになることがわかった。

また、アルミ丸棒積層体のせん断試験を再現した結果を力線グラフで示し、力の伝達経路の変遷を追えることを示した。一面せん断試験のシミュレーションにおいては、粒子数が少ないことの影響と考えられるが、応力比～変位関係のピークの前に、突っ張り棒のような力線グラフが形成されること、そして、これは下箱をある程度速く動かし続けないと崩壊する傾向があることがわかった。

貴重な実験データをご提供くださった名古屋工業大学の松岡元教授、大林組の山本修一博士に感謝いたします。また、卒業研究で実験に尽力してくれた前橋工科大学卒業

生の小坂橋武君、板橋和登君に感謝いたします。

参考文献

- 1) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，第 406 号，III-11，pp.97-106，1989.
- 2) 岸野佑次：土の構造とメカニクス—マイクロからマクロへ—4. 数値粒子法による土の微視的挙動の追跡（その 1），土と基礎，Vol.50, No.8, pp.35-40, 2002.
- 3) 土倉泰：任意形状の要素を用いた粒状要素法とその応用例，構造工学論文集，Vol.39A, pp.399-406, 1993.
- 4) Warren C. Young : *Roark's formulas for stress and strain*, McGraw-Hill Book Company, pp.650-651, 1989.
- 5) Mindlin R. D. : Compliance of elastic bodies in contact, *J. Appl. Mech.*, Vol.71, pp.259-268, 1949.
- 6) 松岡元，山本修一：個別要素法による粒状体のせん断機構の微視的考察，土木学会論文集，第 487 号，III-26，pp.167-175，1994.
- 7) 松岡元：アルミ丸棒積層体の要素試験結果と支持力試験結果—DEM のためのブラインドテストの結果—，地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp.17-24，1994.
- 8) 佐武正雄：粒状体の誘導異方性について，応用力学論文集，Vol.7, pp.725-736，2004.

(2005 年 4 月 15 日 受付)