

安定化有限要素法を用いた Eulerian 解法による固体の大変形解析

Large Deformation Solid Analysis by Eulerian Solution
Based on Stabilized Finite Element Method

金子恭久*・岡澤重信**・榎山和男***

Yasuhisa Kaneko, Shigenobu Okazawa and Kazuo Kashiya

*正会員 修士(工学) さいたま市役所(〒330-9588 埼玉県さいたま市浦和区常盤 6-4-4)

**正会員 博(工) 広島大学助教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻(〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部 土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents an Eulerian solution for large deformation solid analysis. The present approach is based on the SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) finite element method, which is employed to solve the advection equations in Eulerian solution. The present method is applied to the impact-bar and necking problems. The computational results are compared with the results obtained by the Lagrangian solution with finite element method and MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) method based on finite difference method.

Key Words : Eulerian method, Advection equation, Stabilized finite element method, Large deformation, Solid Analysis

1. はじめに

固体の大変形解析においては、移動境界問題を効率的に取り扱う解析手法が必要となる。固体解析における定式化では、通常、物質点に追従する観測点において変形を表す Lagrangian 解法が用いられるが、大変形問題を Lagrangian 解法で解析した場合、解析格子が潰れてその健全性が失われ、解析が破綻することが度々生じる。Lagrangian 解法で解析不能になるような大変形を取り扱う場合には、解析格子を任意に制御できる Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 解法が用いられることが多い¹⁾²⁾³⁾。ALE 解法では、固体の境界面はその変形に解析格子を追従させるいわば Lagrangian 解法で解析して、物体内部の解析格子形状の歪みが極端に大きくならないように適当に修正するものである。この ALE 解法によって解析格子の健全性の問題は解決されるものの、物体内部の解析格子を制御するための手法は複数存在し一意ではない。また破断などの物体のトポロジーの変化にも ALE 解法では対応できない。

そこで筆者らは、空間に固定された観測点において変形を表す Eulerian 解法による固体の大変形解析手法に関する研究を精力的に行ってきた⁴⁾⁵⁾。Eulerian 解法では、固体の物体形状を流体解析における自由表面問題と同様に移流方程式を解くことによって取り扱う。そうすることによって解析格子の極端な歪みによる解析の破綻を回避することが可能となる。しかしながら、Eulerian 解法では Lagrangian 解法や ALE 解法に比べて解析格子を細かくする必要があり、さらには応力や相当塑性ひずみなどの構成方程式に関連する物質内部諸量に関しても、移流方程式を解くことにより空間に固定された解析格子上に投影させなければならない。図-1 は、1 次元問題における Lagrangian 解法と Eulerian 解法の比較として、節点と物質内部諸量の時刻 t に沿っ

た移動を示している。図-1 から分かるように、固体解析における Eulerian 解法は質量や速度だけでなくすべての物質内部諸量を移流させる必要があり、この移流方程式をいかに高精度かつ安定に解くかが解析上重要となる。

Eulerian 解法における固体の大変形解析は、当初はハイドロコードと呼ばれる扱いでなされてきた⁶⁾⁷⁾。このハイドロコードでは、もともと差分法が用いられていたため解析格子を固定した Eulerian 解法との相性がいいのは当然である⁸⁾。これまでの Eulerian 解法でのハイドロコードにおける移流方程式の解法には、当初は一次風上差分法、そして最近では高精度で安定な MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) 法⁹⁾へとその主流が移っている¹⁰⁾。しかしながら、これらの差分法による移流方程式の解法は規則的な構造格子を前提としているため、非構造格子や複雑形状を有する解析領域を取り扱う場合には不向きである。この差分法による移流方程式の解法に対して、非構造格子や複雑形状を有する解析領域を取り扱う場合には、移流方程式の解法に有限要素法を適用することが有効であると言える。移流方程式を有限要素法で解く手法に関しては、最近では安定化有限要素法が大きな発展を遂げており一般的によく用いられているが¹¹⁾、この安定化有限要素法を固体の大変形解析に適用した例は少ない。

以上のような背景において、本論文では、Eulerian 解法による固体の大変形解析での移流方程式の解法に、SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法を適用する。そして本手法の妥当性及び有効性を検討するため、例題計算を通して本手法による解析結果と有限要素法に基づく Lagrangian 解法および MUSCL 法を用いた差分法に基づく Eulerian 解法との比較を行う。

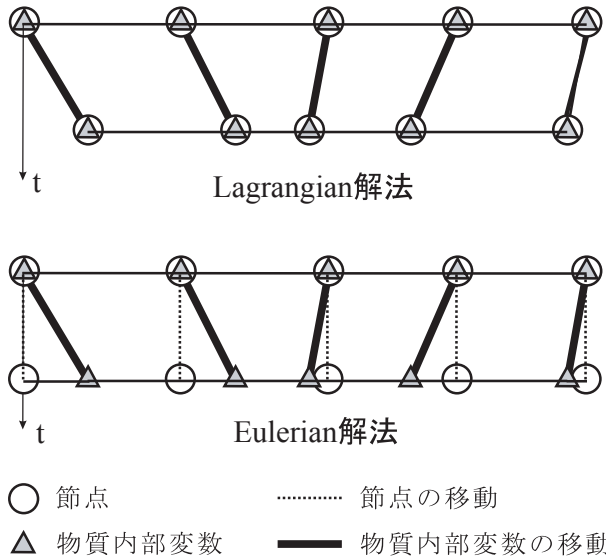


図-1 1次元問題における Lagrangian 解法と Eulerian 解法

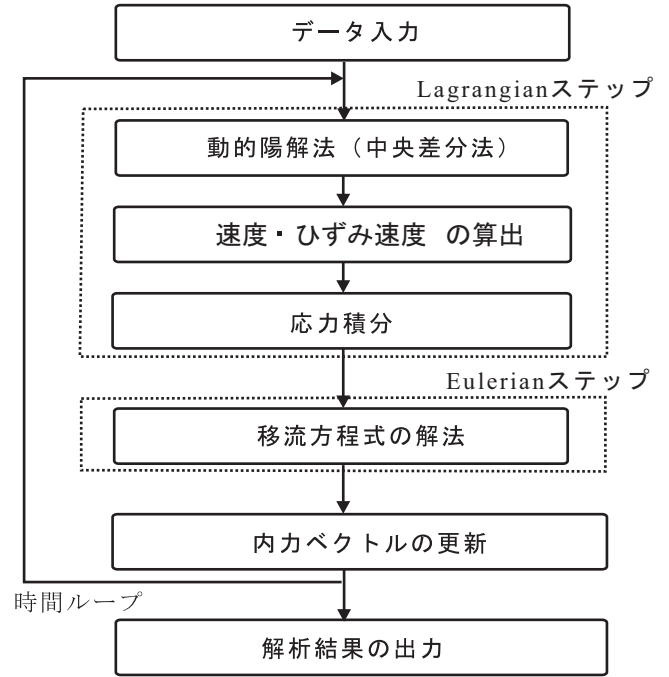


図-2 解析フローチャート

2. Eulerian 解法での支配方程式

2.1 operator split 法

Lagrangian 解法による支配方程式は、物質時間導関数により次式のように示される．

$$\dot{\phi} = f \quad (1)$$

ここで、上付き・は物質導関数を表わし、 ϕ は任意の関数、 f は外力項である．また、物質時間導関数と空間時間導関数の関係は、以下の関係で定義される．

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{x}$ はそれぞれ速度ベクトル、位置ベクトルであり、右辺第 2 項は移流項を表わす．式 (1)、(2) より Eulerian 解法による支配方程式は、次式で表わせる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = f \quad (3)$$

ここで、式 (3) に対して、次式のように operator split 法を用いて 2 つに分割する¹⁰⁾．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (5)$$

式 (4) は外力項を含んだ Lagrangian ステップ、式 (5) は移流項を含んだ Eulerian ステップにおける方程式である．式 (4) と Lagrangian 記述での支配方程式 (1) との違いは、時間導関数の種類であり、Eulerian 記述では計算要素が固定されていると考えれば、この時間導関数の種類の差異は無視できる⁵⁾．よってこれらの式は見かけ上は近似的に同一となる．このとき式 (5) に

おける上付きの * 印は、Lagrangian ステップ後の諸量を意味し、式 (5) において、Lagrangian ステップ後の解を固定された計算要素に投影させる．以上、operator split 法による Eulerian 解法の解析フローチャートをまとめると図-2 のようになる．

2.2 Lagrangian ステップ

(1) 動的陽解法

式 (4) を離散化して得られる動的な平衡方程式は、次式で示される．

$$\overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{F}_{int}^n = \mathbf{F}_{ext}^n \quad (6)$$

ここで $\overline{\mathbf{M}}$ は、対角化された集中質量行列、 $\mathbf{F}_{int}$ は内力ベクトル、 $\mathbf{F}_{ext}$ は外力ベクトルを表わす．また上添字 n は、現時刻ステップであることを意味する．式 (6) に対して、中央差分法を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル $\mathbf{x}^{n+1}$ 及び、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ は、次式のように求めることができる．

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{u}}^n \Delta t \quad (8)$$

このとき加速度ベクトル $\dot{\mathbf{u}}^n$ は、式 (6) において、 $\overline{\mathbf{M}}$ が集中質量行列であるため連立 1 次方程式を解く必要がない．

(2) 材料構成方程式

材料構成方程式として von Mises の降伏関数による関連流れ則を用いる．この構成方程式は本論文で取り扱

う金属材料で一般的に用いられるものである．Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ とひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}$ を関連付ける 4 階の弾塑性構成テンソル C^{ep} を用いた式 (9) を適用する．

$$\dot{\sigma} = C^{ep} : \dot{\epsilon} \quad (9)$$

ここで， C^{ep} をインデックス表示すると以下のようになる．

$$C_{ijkl}^{ep} = 2G[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \alpha \frac{9G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}^2(H' + 3G)}] \quad (10)$$

$\alpha = 0$ (弾性) $\alpha = 1$ (降伏)

ここで， δ_{ij} はクロネッカーのデルタ， G はせん断弾性係数， ν はポアソン比を表わす．そして H' は塑性係数で σ' は偏差応力である．また $\bar{\sigma}$ は次式で定義される相当応力である．

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma' : \sigma'} \quad (11)$$

式 (9) で示される構成方程式において，ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}$ は客観性のあるストレッチングテンソル D に，Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ は客観応力速度の一つである Jaumann 速度 $\dot{\sigma}^J$ に置き換えて新たに以下のように定義する．

$$\dot{\sigma}^J = C^{ep} : D \quad (12)$$

式 (12) は，固体が大変形したとしても応力速度，ひずみ速度を両方とも客観性のあるものに置き換えることによって，微小変形状態における弾塑性理論が成立すると考えていることになる．

(3) 応力積分法

式 (9) と式 (12) における Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ と Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\sigma}^J$ は，スピンテンソル W によって次式のように関係付けられる．

$$\dot{\sigma}^J = \dot{\sigma} - W \cdot \sigma + \sigma \cdot W \quad (13)$$

式 (13) の関係を用いて half-step rotation と呼ばれる応力積分法を行う⁵⁾．

2.3 Eulerian ステップ

(1) 移流スキーム

式 (5) に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹²⁾ を適用すると，以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{\phi} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega = 0 \quad (14)$$

ここで， ϕ は界面関数および移流されるその他すべての諸量であり，左辺第 1 項が Galerkin 項であり，第 2 項が

安定化に寄与する SUPG 項である．また， w は重み関数， n_{el} は要素総数である．なお，ここでは Lagrangian ステップ後の諸量を意味する上付きの * 印は省いている．そして，安定化パラメータ τ_{ϕ} は式 (15) のように定義される¹³⁾．

$$\tau_{\phi} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

ここで， Δt は微小時間増分量， h_e は次式で定義される要素サイズである．

$$h_e = 2\|\mathbf{u}\| \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} \|\mathbf{u} \cdot \nabla N_a\| \right)^{-1} \quad (16)$$

ここで， n_{en} は要素の節点数であり， N_a は形状関数である．

式 (14) に対して，2 次元 4 節点アイソパラメトリック要素を用いて，空間方向に離散化を行うと次式のような有限要素方程式が導ける．

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{u})) \Phi = \mathbf{0} \quad (17)$$

ここで $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ は係数行列であり，下添字 δ は SUPG 項に起因する行列を意味する．そして Φ は全節点での ϕ である．また時間方向の離散化には，Crank-Nicolson 法を適用し，連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を用いた．なお自由境界面を表現するために，流体の自由表面流れの Eulerian 解法として一般的に用いられている，界面関数を用いた VOF (Volume of Fluid) 法¹⁴⁾ を適用する．

また式 (17) を解くと，SUPG 法でよく知られた界面関数のオーバーシュート・アンダーシュートが発生する．その対策として，本研究ではカットオフすなわち界面関数が 1 以上になった場合には 1 へ，0 以下になった場合は 0 へと変更する操作を時間ステップごとに施した．

(2) 応力・相当塑性ひずみの更新

式 (17) において解かれる諸量 Φ は節点上のものである．よってその値を節点で持つ界面関数では式 (17) を解くことができるのに対して，応力や相当塑性ひずみなどの有限要素の積分点で定義される諸量である場合には，式 (17) をそのまま解くことはできない (図-3)．

そこで，積分点上の諸量を移流させる場合には，図-4 のようにそれぞれの要素の積分点を節点へと変更する新たな有限要素を規定する．この新たな有限要素を用いることによって，積分点上の諸量を節点上の諸量として更新することができる．また，応力に関してはスカラーでなく 2 階のテンソルであるが，すべての成分に移流スキームを施すことで，応力の移流が可能となる．なお新たに規定した節点での速度は，線形補間で求めることができる．

3. 解析結果

3.1 棒の衝突解析

これまで述べた本手法の妥当性を検討する．ここでは固体の大変形解析において，Lagrangian 解法，MUSCL

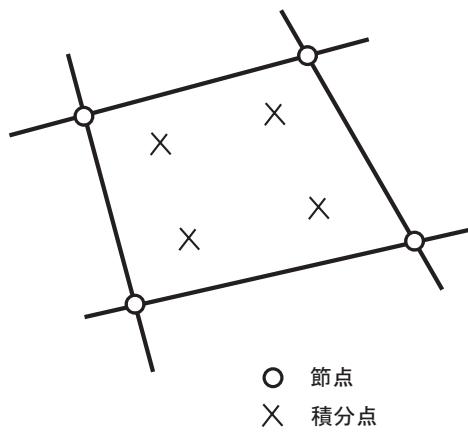


図-3 有限要素の節点と積分点

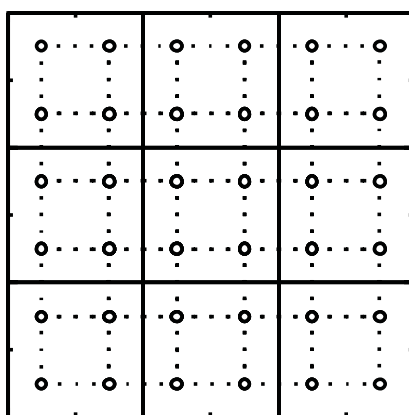


図-4 新たに規定した有限要素と節点

法を用いた差分法による Eulerian 解法，そして本手法を比較する．用いる構成方程式は，すべての解析において先に述べた von Mises の降伏関数による関連流れ則である．

最初は弾塑性材料棒の衝突解析である¹⁵⁾．解析モデルは図-5 のようであり，鉛直下向きに初期速度 300m/sec を与える．Eulerian 解法においては解析領域を縦 25 分割 × 横 15 分割の総要素数 375，総節点数 416 に分割した．また応力-ひずみ関係はバイリニア硬化型であり，弾性係数は 21.8GPa，ポアソン比は 0.28，塑性係数は 0.1GPa，降伏応力は 0.02GPa で密度は 1710kg/m³ を仮定する．また解析領域端部の境界条件に関しては，下端部法線方向および左端部法線方向の速度はゼロで拘束して，その他においては速度は自由とした．

図-6 は Lagrangian 解法による解析結果である．Lagrangian 解法であるので物体の変形に解析格子が追従しているのが確認できる．図-7 は差分法の一つである MUSCL 法を用いた Eulerian 解法，そして図-8 は，

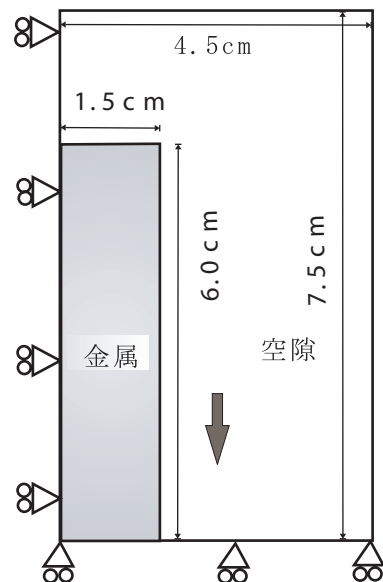


図-5 衝突解析モデル

SUPG 法による本手法での変形形状である．ここでは MUSCL 法と本手法の解析結果に明らかに違いがあり，本手法の方が MUSCL 法に比べて Lagrangian 解法に似た変形形状を示している．これは，SUPG 法では流線方向のみに安定化の効果が導入されるため，移流現象をより正確に捉えることができたためと考えられる．図-14 は，下端部での自由境界面の先端変位を時刻歴で表示した結果である．この結果からも本手法は極めて精度の高い変形解析が行われていることが分かる．

そして，3つの手法による相当塑性ひずみ分布を示したのが図-15，図-16，図-17である．ここでも MUSCL 法の分布が Lagrangian 解法の結果と多少の相違が見られるのに対して，本手法の相当塑性ひずみ分布は Lagrangian 解法とほぼ同一である．さらに，80 μ秒後の解析領域の左下隅要素における相当塑性ひずみの値を比較したのが表-1 である．この表-1 から見ても本手法の相当塑性ひずみの値が MUSCL 法に比べて Lagrangian 解法に近いことが分かる．

表-1 棒の衝突解析における 80 μ秒後の左下隅における相当塑性ひずみ

	Lagrangian 解法	MUSCL 法	本手法
$\bar{\epsilon}^p$	1.565	1.607	1.559

3.2 引張延性解析

次の例題は金属材料の引張延性解析である．全体の金属材料モデルは図-9 のようであり，形状および変形の対称性を考慮して 1/4 領域のみで解析を行った．この 1/4 領域の Eulerian 解法での要素分割形状は，図-10 に示す通り縦 30 分割 × 横 14 分割の有限要素分割とし，材料定数については，ヤング率 $E = 200\text{GPa}$ ，ポアソン比 $\nu = 1/3$ を用いた．そして塑性域では，文献¹⁶⁾と同様に以下のような硬化型の相当応力 σ ，相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ の関係を仮定した．

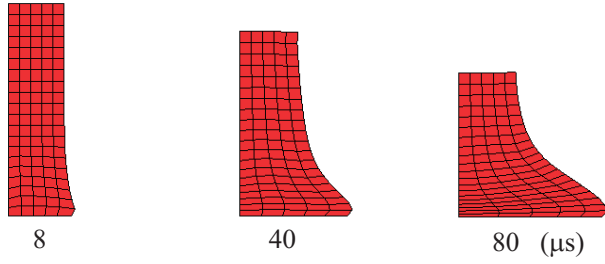


図-6 Lagrangian 解法による変形

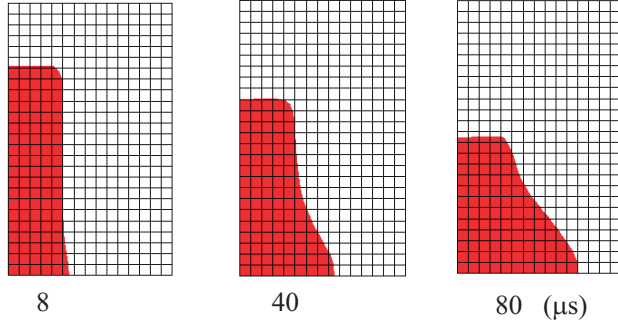


図-7 MUSCL 法による変形

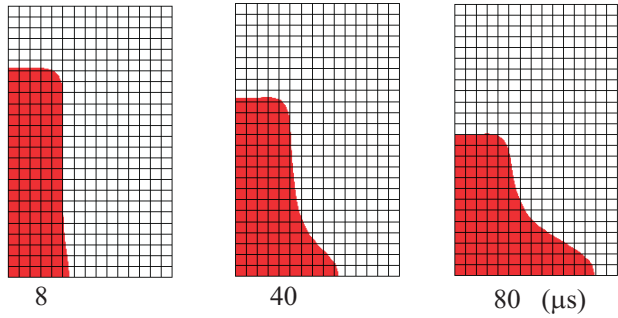


図-8 本手法による変形

$$\bar{\sigma} = \sigma_Y \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_Y} \right)^{0.0625} \quad (18)$$

$$\varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{1}{500} \quad (19)$$

解析領域の境界条件は、図-5 のものと同一であり、上端部の接線方向を固着として鉛直方向に速度 50m/sec で引張った。

ここでも Lagrangian 解法，MUSCL 法，本手法との比較を行った．図-11, 12, 13 に変形状態を，図-19, 20, 21 に相当塑性ひずみ分布図を示す．この解析においては MUSCL 法と本手法で大差は確認できないが，図-18 のくびれ量 v/W の時刻歴から見ても，これら 2 つの手法共に Lagrangian 解法に近い結果を示していることが確認できる．よって本手法はこのような引張延性解析においても有効である．

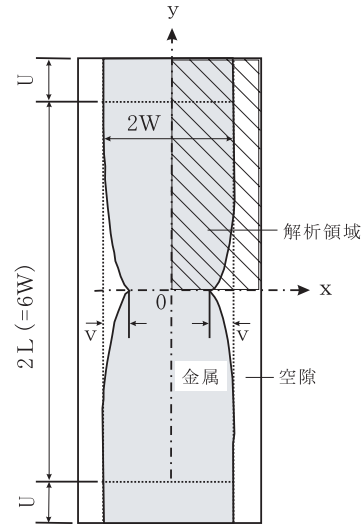


図-9 引張延性解析モデル

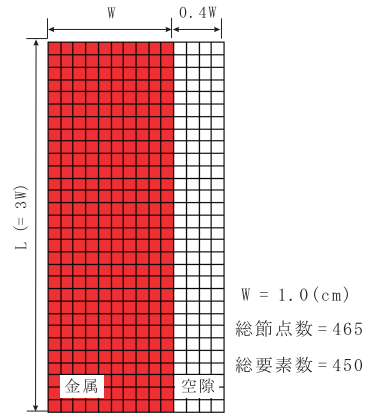


図-10 要素分割

4. おわりに

本論文では，安定化有限要素法を用いた Eulerian 解法による固体の大変形解析手法について述べ，本手法の有効性を例題計算を通して確認した．得られた知見を以下に示す．

1. これまでの Eulerian 解法による固体解析の移流スキームの主流が差分法であったのに対して，任意形状への適用に優れた SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用した．
2. 新たな解析格子を規定して積分点上の諸量を的確に移流計算するための方法を示した．
3. 弾塑性棒の衝突解析と引張延性解析に本手法を適用して，どちらの解析においても良好な解析結果を得ることができた．特に弾塑性棒の衝突解析では，本手法が既存の MUSCL 法による差分法に基づく方法より明らかに高精度な解を与えることを確認した．

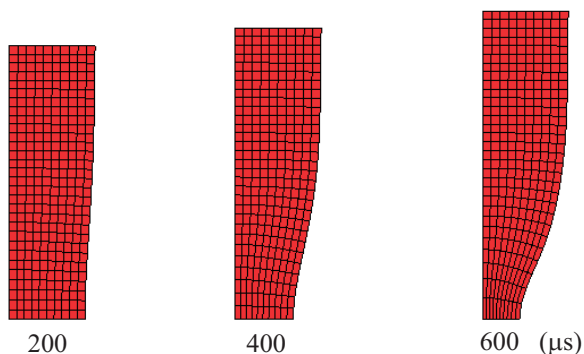


図-11 Lagrangian 解法による変形

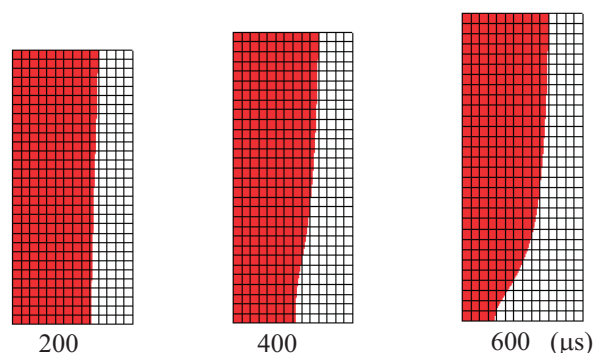


図-12 MUSCL 法による変形

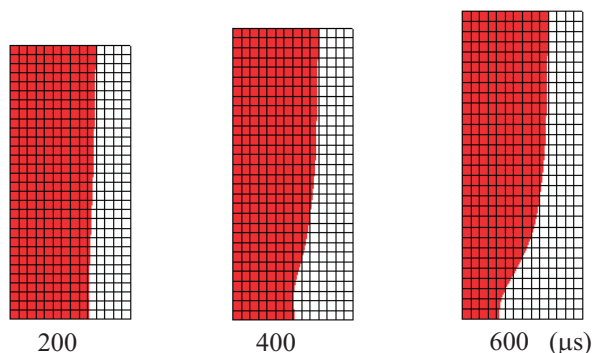


図-13 本手法による変形

以上のことから Eulerian 解法での大変形固体解析においても，その移流方程式の解法において有限要素法の有効性を示せたと言える．今後の課題としては，本手法を任意形状の解析領域を有する問題への適用や，固体—流体連成解析へと拡張することなどが挙げられる．

謝辞：本研究は文部科学省科学研究費補助金（基盤研究（C）(2)：15560409）の援助を受けた．

参考文献

- 1) Huerta, A. and Casadei, F.: New ALE applications in non-linear fast-transient solid dynamics, *Engrg. Comput.*, 11, pp.317-345, 1994.
- 2) Rodriguez-Ferran, A., Casadei, F. and Huerta, A.: ALE stress update for transient and quasistatic process, *Int. J. Numer. Methods in Engrg.*, 43, pp.241-262, 1998.
- 3) Rodriguez-Ferran, A., Perez-Foguet, A. and Huerta, A.: Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelasticity, *Int. J. Numer. Methods in Engrg.*, 53, pp.1831-1851, 2002.
- 4) Benson, D.J. and Okazawa, S.: Contact in a multi-material Eulerian finite element formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.193, pp.4277-4295, 2004.
- 5) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, Vol.6, pp.151-158, 2003.
- 6) Johnson, W.E.: History and application of hydrocodes in hypervelocity impact, *Int. J. Impact Engrg.*, 5, pp.423-439, 1987.
- 7) Anderson, C.E. Jr.: An overview of the theory of hydrocodes, *Int. J. Impact Engrg.*, 5, pp.33-59, 1987.
- 8) 岡澤重信, David J. Benson: Eulerian ハイドロコードによる破壊解析, 応用力学論文集, Vol.6, pp.209-214, 2003.
- 9) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme IV, *J. Comput. Phys.*, Vol.23, pp.276-299, 1977.
- 10) Benson, D.J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.99, pp.235-394, 1992.
- 11) 日本数値流体力学有限要素法研究委員会: 有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998.
- 12) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199-259, 1982.
- 13) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics.*, Vol.28, pp.1-44, 1991.
- 14) Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *J. Comp. Phys.*, Vol.39, pp.201-225, 1981.
- 15) Wilkins, M.L. and Guinan, M.W.: Impact of cylinders on a rigid boundary, *J. Appl. Phys.*, 44, No.3, 1973.
- 16) 川井謙一: 軸対称および平面ひずみ引張りに関するベンチマークテスト, 塑性と加工, 32, pp.553-559, 1991.

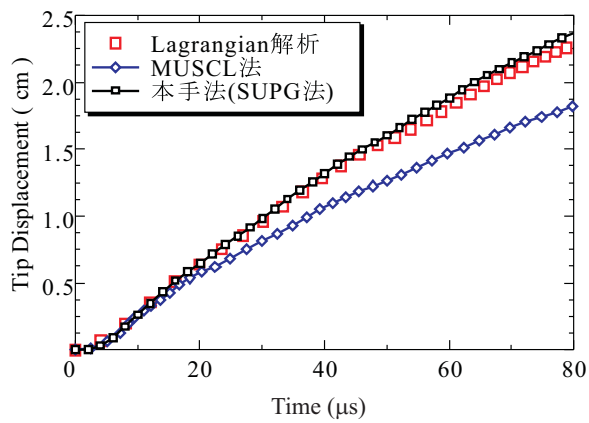


図-14 下端部の先端変位時刻歴

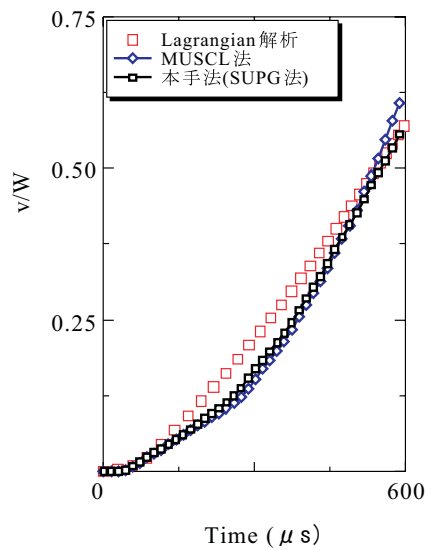


図-18 くびれ量の時刻歴

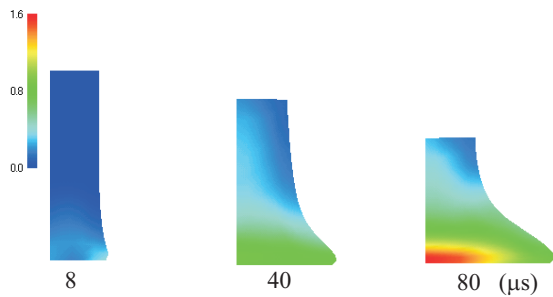


図-15 Lagrangian 解法による相当塑性ひずみ

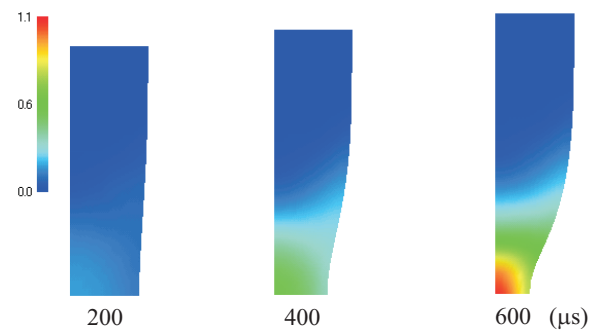


図-19 Lagrangian 解法による相当塑性ひずみ

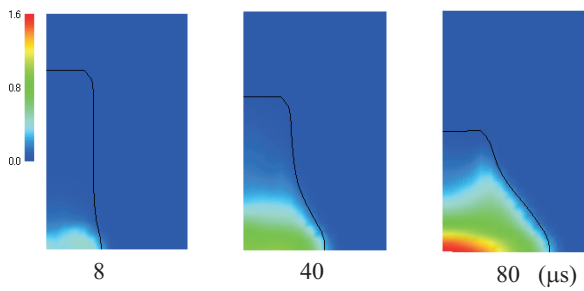


図-16 MUSCL 法による相当塑性ひずみ

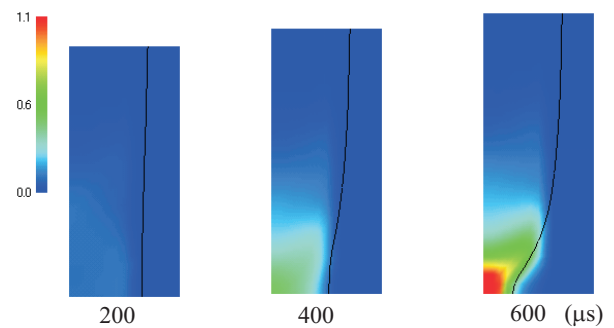


図-20 MUSCL 法による相当塑性ひずみ

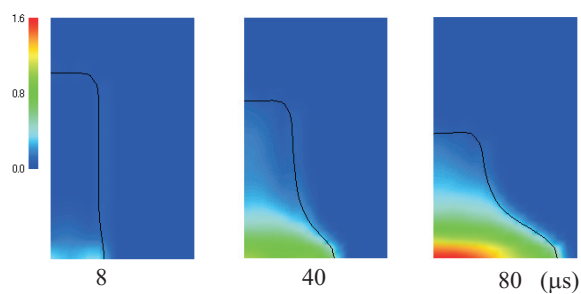


図-17 本手法による相当塑性ひずみ

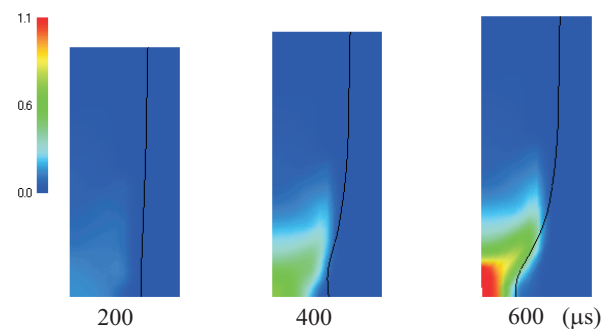


図-21 本手法による相当塑性ひずみ

(2005 年 4 月 15 日受付)