

一般座標を用いた流れの計算における IBM 法の適用

Application of IBM method in Flow Calculation in General Coordinates

千秋 雅信*・中山昭彦**

Masanobu SENSUU and Akihiko NAKAYAMA

*学生員 大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

**正会員 Ph.D. 神戸大学教授 大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

An Immersed Boundary Method (IBM) has been incorporated in a finite-difference code to solve the three-dimensional incompressible fluid flow using the boundary-fitted general curvilinear coordinate system. IBM has been developed for solving flows over complex boundary shapes on rectangular grids. In the present work it has been extended to be used in the boundary fitted coordinate system in order to represent complex objects on curving boundaries, such as undulating terrain with buildings and other objects. Basic verification study has been conducted by computing laminar flows over a model terrain and model rectangular objects to verify merits and efficiency of such a procedure compared with conventional methods. It is found that the IBM technique incorporated in a sigma-coordinate system in which the first coordinate follows the boundary representing the terrain and the second coordinate axis is taken in the straight vertical direction is most appropriate in both accuracy and efficiency, and is suited for calculating flow over topography with objects of various shapes.

Key Words : flow over terrain, IBM method, sigma coordinates, computational efficiency

1. はじめに

建物などの構造物や、物体の存在が無視できない自然地形上の気流解析を行う場合、複雑な形状を如何に扱うかが大きな問題となる。境界適合座標では小さい物体に沿う格子は到底作成できない。非構造格子を用い、形状の詳細な解像が必要な部分に多くの格子をとる方法や、複数の格子を重合させる方法もあるが、計算法の煩雑さや計算の効率にも問題が残っている。簡単かつ精度のある方法が開発されれば実問題への応用で有意義である。

Immersed Boundary Method (IBM) は境界条件を境界位置の格子点で直接設定する代わりに、運動方程式に体積力を導入することにより境界条件を間接的に満足させる方法である¹⁾。計算格子の位置は必ずしも境界と一致する必要がないためコーディングの簡単な直交格子を用いて曲線や複雑な境界

形状の流れを解くのに応用されている²⁾。しかしその精度は境界位置近傍での格子密度に依存する。直線直交座標では格子密度が座標方向に一樣であるので、格子密度を自由に変化させることは不可能である。複雑な境界形状が不規則に存在する場合、直線直交座標ではIBM法を用いても解像度に問題が残る。比較的緩やかに起伏する地形上の複雑な物体を解像する場合、地表面に沿う格子を用いれば、地表面近傍に密な格子を作成することは容易である。この境界適合曲線座標にIBM法を導入すれば、地表上物体の詳細を効率良く解像することが可能になる。そこで本研究では境界適合曲線座標にIBM法を組み込みその精度や効率について調べる。

IBM法にはFeedback forcing法とDirect forcing法があるが、繰り返し計算や安定性などの面で有利なDirect forcing法を用いる。建物や構造物が存在する地形上気流解析への応用を念頭にその利点、効率な

どを調べる. 応用は乱れのある気流計算であるが検証としてまず層流の計算で検証する.

2. IBM 法の概要

IBM 法の原理は, 位置と時間の関数である体積力 f を時刻 t で境界位置に作用させる事により境界位置で境界条件を満足させることである. 体積力 f を導入した N-S 運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

である. この式は f が既知であれば通常の N-S 運動方程式に準じた方向で解く事ができる. まず内挿を必要としない f の与え方について述べ, その後内挿法について述べる.

2.1 Direct forcing 法

IBM 法は Peskin³⁾ などにより feedback forcing 法で円筒周りの流れ解析などに応用されている. この方法では体積力に自由定数が存在し, その与え方は計算の安定性に影響するなどの問題があった.

最近になり, 体積力の与え方を改良する事により計算の安定性に影響しない方法が Mohd-Yusof により開発されている⁴⁾⁵⁾. 自由定数を与えない方法で, 効率が良く三次元複雑流れへの適応性もある. これまでにも, 曲線形のノズルから出る渦環構造や球周辺の三次元線対称流れ, モーターを備えた IC ピストン内の三次元乱流などに応用されている.

Mohd-Yusof による direct forcing 法は以下のようである. 式(1)を陽的に時間差分すると式(2)が得られる.

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{RHS}^n + \mathbf{f}^n \quad (2)$$

右辺第一項は式(1)の対流項, 粘性項および圧力勾配項の和である. $\mathbf{u}^{n+1}$ が境界条件 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1}$ を境界で満たすような $\mathbf{f}^n$ は式(2)から単純に

$$\mathbf{f}^n = \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{RHS}^n \quad (3)$$

と与えられる. この場合の f は力学的なプロセスを要せずに境界で直接的に境界条件を強いるという意味で direct forcing といえ, 各タイムステップにおいて境界条件が保たれる. feedback forcing との大きな違いは, f の算定の際に自由定数が不要で, 計算の安定性にも影響しない点である.

本研究では移動境界を扱わないなどの特徴を考慮し, この direct forcing 法を用いる.

2.2 体積力の内挿方法

グリッド位置と境界が一致していれば上述の f は境界での速度をそのまま用いることが可能だが, 一般にグリッド位置と境界が一致していることは稀であり, 周りの点での速度から内挿してきた速度を用いなくてはならない⁶⁾. ここではよく用いられている線形内挿法を示す.

(1) 双一次内挿

図-1 のように境界条件を与えたい点を P_1 とし, u_1, u_2, u_3, u_4 は P_1 の周りの 4 点での x 成分速度とする. ここで, P_1 は u_3 を定義する点を通る境界の接線と垂直に交わる直線と境界の交点である. 今, u_3 を除く他の 3 つの速度が既知の場合, u_3 は式(4)で与えられる.

$$u_3 = -[\alpha(1-\beta)u_1 + (1-\alpha)(1-\beta)u_2 + (1-\alpha)\beta u_4] / \alpha\beta \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{(x_2 - x_{p1})}{(x_2 - x_1)}, \quad \beta = \frac{(y_2 - y_{p1})}{(y_2 - y_1)} \quad (5)$$

y 方向成分の内挿も同様の手順で行うことができる.

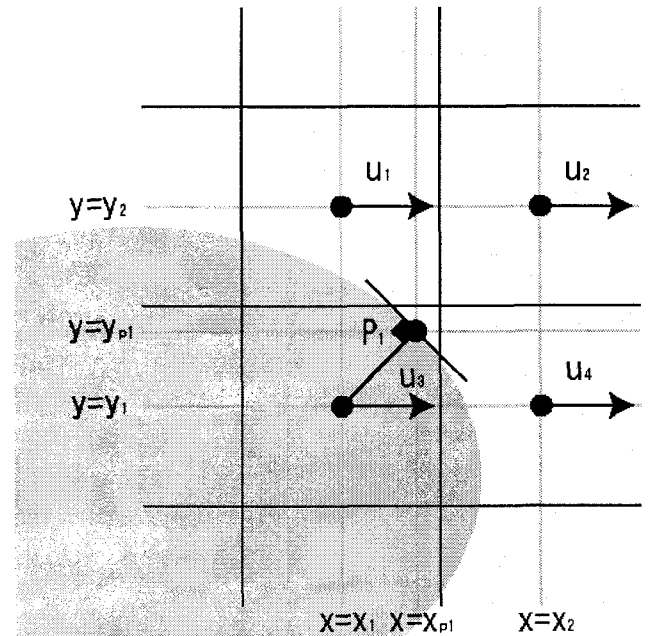


図-1 双一次内挿の概略図

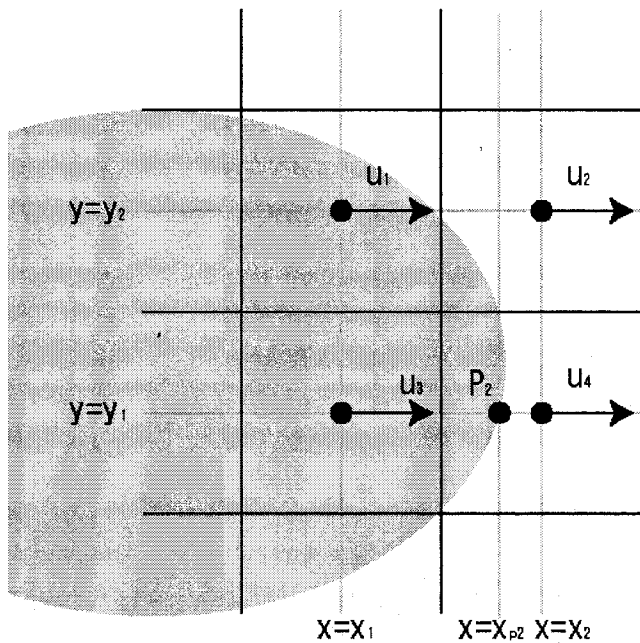


図-2 線形内挿の概略図

(2) 線形内挿

図-2のように u_3 が他の未知である u_1 と結びつく場合双一次内挿は適切ではなくなり、線形内挿が用いられる。今、 P_2 は境界条件を与えたい点である。この場合 u_3 は式(6)により与えられる。

$$u_3 = -\frac{x_{p2} - x_1}{x_2 - x_{p2}} u_4 \quad (6)$$

境界と格子点がずれている場合は上述のような内挿をおこなった速度を式(3)の境界速度として用いる事により任意位置の境界を扱う事が可能となる。

本研究ではIBMを複雑地形上気流解析に適応させる第一歩の段階として、内挿を必要としない場合についての解析を行うこととする。

3. 一般座標系でのIBM

ここでは一般座標系での運動方程式に前節で述べたdirect forcingに基きIBMを考慮した一般座標系での運動方程式を導く。

ξ_i を一般座標系、 x_i を直交座標系、 u_i を速度ベクトルの直交座標成分、 U^i を反変成分とすると、連続式は

$$\frac{1}{J} \frac{\partial (JU^k)}{\partial \xi_k} = 0 \quad (7)$$

である。ここで、

$$J^{-1} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right), \quad (8)$$

$$U^m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} u_j \quad (9)$$

体積力を考慮した運動方程式は

$$J^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left\{ U^m u_i + A_i^m p - \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} - \nu J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \right\} = \frac{J^{-1}}{\rho} f_i \quad (10)$$

である。ここで、

$$A_i^m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}, \quad (11)$$

$$G^{mn} = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}, \quad (12)$$

である。

4. 計算方法

ここでは上述の運動方程式と連続式をコロケート格子上でFractional Step Method(FS法)を用いて解く方法を説明する。

4.1 計算格子

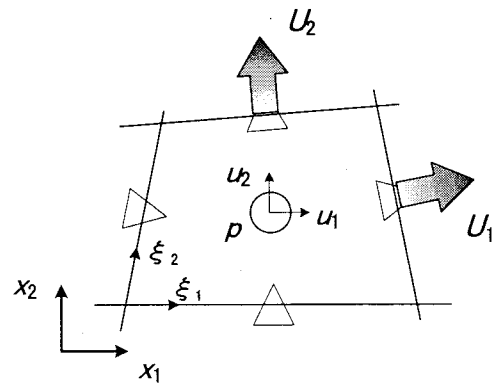


図-3 コロケート格子における変数配置

全ての変数を同一点に配置するレギュラー格子は圧力が市松模様状に振動する不安定を引き起こすため一般座標系にも不向きである。しかし、速度と圧力を別々に配置するスタガード格子ではプログラムが煩雑になるなど一般座標系への拡張が困

難である。一般座標系での連続式には反変成分が用いられることも考慮して、本計算にはコロケート格子を用いる⁷⁾⁸⁾。この格子では、基本変数である速度のデカルト成分 u_i 、圧力 p は格子の中央に配置される。連続式と移流項の差分には反変成分に変換しなければならないが、保存則を離散的に満足させるためにはこの方法が有利である。

4.2 FS 法における IBM 法の導入

FS 法では運動方程式を以下のように 2 段階に分けて時間進行させる。

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t (\mathbf{g}(0, \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}^*/\rho) \quad (13)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta t (\mathbf{g}(\mathbf{p}^{n+1}, 0) + \mathbf{f}/\rho) \quad (14)$$

ここで $\mathbf{g}$ は空間項で $\mathbf{u}^*$ は $\mathbf{u}^{n+1/2}$ の性格を持った中間値である。

式(10)を変形すると

$$\begin{aligned} & (I - \frac{\Delta t}{2J^{-1}})(u_i^* - u_i^n) \\ &= \frac{\Delta t}{J^{-1}} \left[\frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n) + G_E(u_j^n)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (C_i^n + D_E(u_i^{n-1}) + G_E(u_j^{n-1})) \right. \\ & \quad \left. + D_I(u_i^n) + \frac{J^{-1}}{\rho} f_i^{n*} \right] \\ & J^{-1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -R_i(\phi^{n+1}) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで C_i は対流項、 R_i は差分における勾配演算子、 D_I 、 D_E 、 G_E はそれぞれ粘性項(対角成分)、粘性項(非対角成分)、渦動粘性係数による項である。式(16)の ϕ は次の式により圧力 p と関係している。

$$R_i(p) = \left(J^{-1} - \frac{\Delta t}{2} D_I \right) \left(\frac{R_i(\phi)}{J^{-1}} \right) \quad (17)$$

u^{n+1} についての式(16)に ϕ があるため、 p の代わりに ϕ について解く事となる。デカルト成分 u_i についての訂正ステップの式(16)は U_m が定義されるセル表面でも成り立つ。式(16)を変形すると式(18)が得られる。

$$U_m^{n+1} = U_m^* + \Delta t \left(G^{mn} \frac{\delta \phi^{n+1}}{\delta \xi_n} \right) \quad (18)$$

$$U_m^* = J^{-1} \frac{\delta \xi_m}{\delta x_i} u_j^*. \quad (19)$$

ϕ についてのポアソン方程式は式(18)の発散をとり次のようになる。

$$\frac{\delta}{\delta \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta \phi^{n+1}}{\delta \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta U_m^*}{\delta \xi_m} \quad (20)$$

u^* は Hirsch による近似因数分解⁹⁾により反復無しで求まる。

境界での速度を V とすると境界条件を満足させる体積力 f は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_i^n &= \frac{V_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \rho - \frac{3}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (C_i^n + D_E(u_i^n) + G_E(u_j^n)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1}) + G_E(u_j^{n-1})) \\ & \quad - \frac{\rho}{J^{-1}} R_i(p^{n+1}) - \frac{1}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (D_I(u_i^{n+1}) + D_I(u_i^n)) \end{aligned} \quad (21)$$

次に、 u^* を求める式(15)中の f_i^{n*} は次のように求められる。

$$\begin{aligned} f_i^{n*} &= \frac{V_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \rho - \frac{3}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (C_i^n + D_E(u_i^n) + G_E(u_j^n)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1}) + G_E(u_j^{n-1})) \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{\rho}{J^{-1}} (D_I(u_i^{n+1}) + D_I(u_i^n)) \end{aligned} \quad (22)$$

つまり、 u^* は圧力項無しで運動方程式を満たすもので、 f も圧力項を除いた関係式で与えられる。この f, f^* を境界位置で作用させる事により境界条件を満たすことになる。

4.3 計算方法の検証

上述の IBM 法を、地表に物体のある地形上気流解析を行う前にモデル地形上の層流を計算することにより計算法の検証を行う。地形に沿う一般曲線座標、地形に沿うシグマ座標と地形には沿わない直交座標を用い計算し、結果を比較することにより計算コードの検証を行う。検証に用いるモデル地形は

$$y = \frac{H}{1 + \left(\frac{x-10}{1.1} \right)^4} \quad (23)$$

で定義され図-4 に示されるような 2 次元孤立峰である。 x は流れ方向の座標, y は高さ方向の座標, H は山の高さである。三次元孤立峰の場合のように山の左右からの回りこみは発生しないが傾斜を 45° にすることで, 丘後方に比較的大きな剥離領域が生じるので, 剥離流計算の精度を考察できる。計算領域は流れ方向, 高さ方向, 奥行き順に $20H \times 5H \times 5H$ である。計算に用いた格子は図-5, 6, 7 に示されている。一般曲線座標およびシグマ座標ではこの地形に沿うものであるが, 直線直交座標系では丘地形の表現自体に IBM を用いている。傾面の最大傾斜は 45° であるのでシグマ座標では座標軸の交差角は最大 45° になり非直交効果が表れる可能性がある。図-7 に示す一般座標の計算格子は地表近くで座標軸がほぼ直交するようにとられており, (図-7 の拡大図) 非直交性による精度低下は抑えられる。いずれの格子も格子数は流れ方向, 高さ方向, 奥行き順 $90 \times 50 \times 25$ であり, 一般座標系では丘付近で高さ方向の軸が曲線に, シグマでは高さ方向の軸は常に鉛直方向となっている。

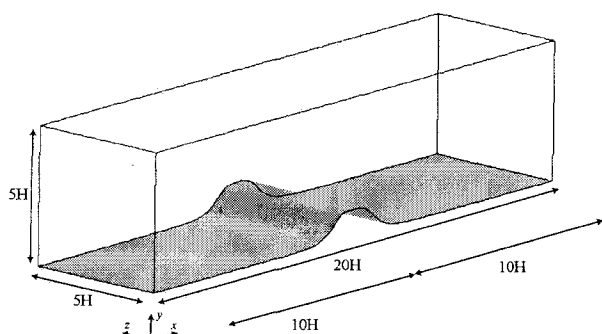


図-4 計算領域

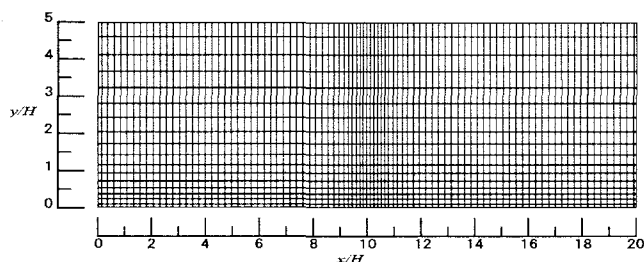


図-5 直交格子

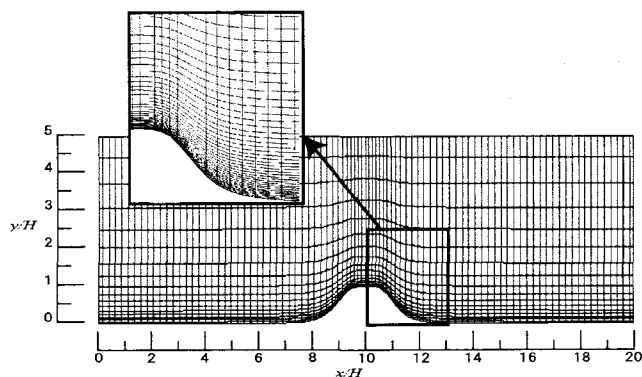


図-6 シグマ格子

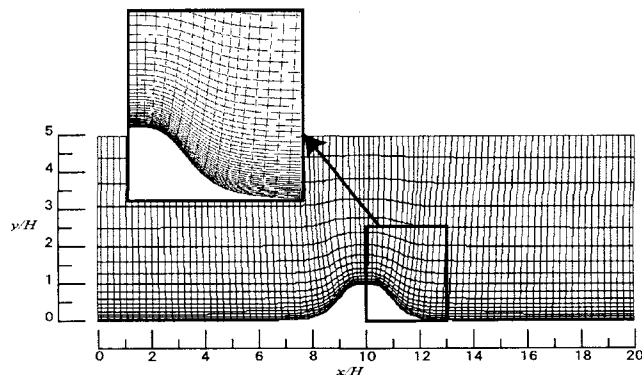


図-7 一般格子

乱流の計算を行う場合, 境界条件として, 流入流出条件, 壁面境界条件の扱いが重要となる。検証計算では上流端で図-8 のように流入条件は $u=1.0$, $v=0.0$, $w=0.0$ の一様流が流入するとしている。ここで u は主流方向の速度成分 v は鉛直方向の速度成分 w は奥行き方向の速度成分である。また, 流出面では自由流出条件を, 側面には周期条件を, 下面と上面にはそれぞれすべりなし, すべり条件を与えている。一様流の初期状態から時間刻み $dt=0.001$ で, 時間発展計算を行い定常状態に達した結果を考察する。

なお, 本計算は計算法の検証を目的としているので, 流入速度と山の高さを基にしたレイノルズ数は 200 と非常に低い値である。

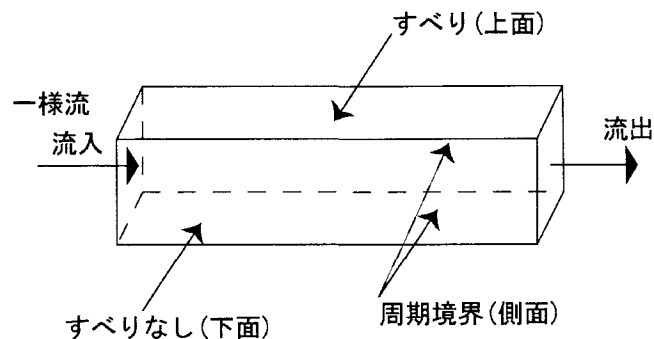


図-8 境界条件

図-9 は山の位置から見て $2H$ 風上側の地点での鉛直分布, 図-10 はちょうど山頂での鉛直分布, 図-11 は山頂から $1.5H$ 下流の剥離域を通る鉛直断面での流速分布の結果を示す。

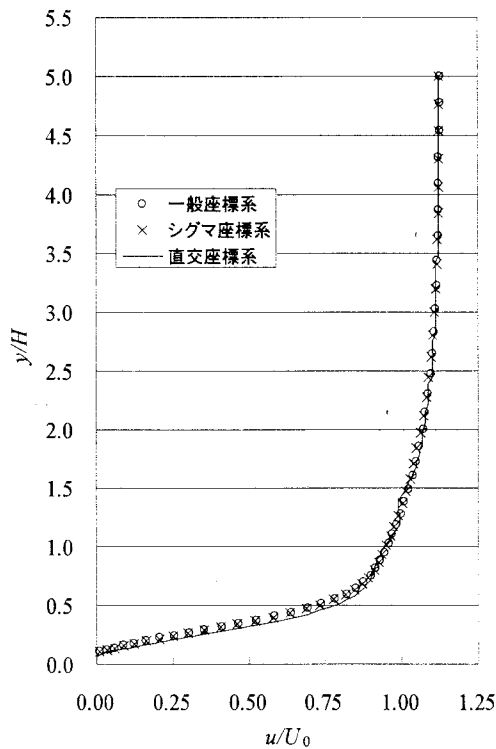


図-9 $x/H=8$ における速度分布図

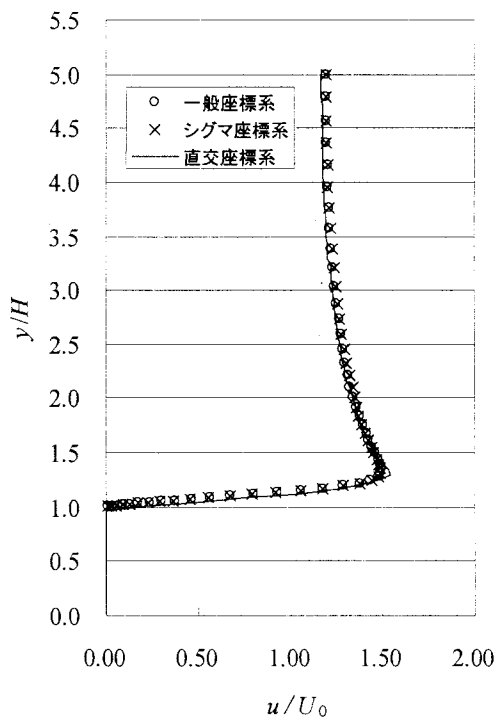


図-10 $x/H=10$ における速度分布図

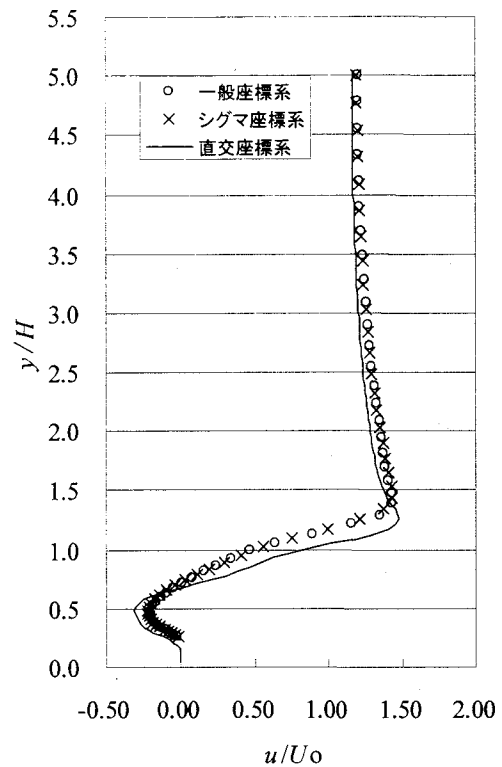


図-11 $x/H=11.5$ における速度分布図

実線は直交座標を用いた結果で, ×印はシグマ座標を用いて計算した結果であるが, ○印は一般曲線座標を用いた計算結果を $x/H=8, 10, 11.5$ の鉛直面に内挿したものである。

$x/H=8$ は山の風上で減速している位置で図-9 から見られるように全ての結果は良好に一致している。 $x/H=10$ は丘の頂上で加速しているところである, ここでも全て計算結果はよく一致している。 山の風下の逆流領域である $x/H=11.5$ においては直交座標系での結果がややずれているがほぼ一致しているといえる, また, 剥離を伴う領域であるため負の速度が存在している。 この比較により異なる座標を用いた計算結果はほぼ一致しており計算法の妥当性が確認されたといえる。

5. 構造物のあるモデル地形上気流の計算

次に自然地形上に建物や構造物などの障害物が存在する場合の気流計算の精度と効率について調べる。 このために前節で検証計算に用いたモデル地形上に構造物がある場合について, 同じく前節で検証した3つの座標系で気流の計算を行う。 構造物のモデルとして単純化された辺長比の異なる直方体構造物を選んだ。

5.1 計算対象

前節の検証計算に用いられた二次元丘周辺に図-12に示す3種の構造物モデルを設置した場合についての計算をした。構造物モデルは、一般的建物のモデルである標準的構造物(a)，高層建物やタワーをイメージした縦長の構造物(b)，それに構造物(c)のような比較的低いものとの3種を設定した。

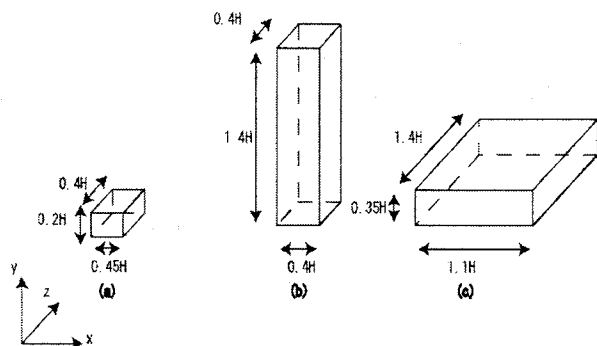


図-12 構造物モデル

構造物を設置する位置は山の頂上、傾面上および風下の逆傾域を選んだ。これら構造物を設置した場合の計算も前節の検証計算と同一の格子を用いているが、構造物表面での境界条件は3節で説明したIBM法で設定している。

6. 計算結果

平均流速と丘の高さを基にしたレイノルズ数を比較的小さな200で行った。四角で表示した部分が構造物の位置である。ここでは座標軸の直交性を重視した一般曲線座標、計算効率を重視した直線直交座標、それに計算効率と格子密度の分布を重視したシグマ座標で、構造物を表現するためにIBM法を導入した時の精度と効率を検討するため、標準構造物(a)を山の頂上と風下に設置した場合についての計算結果を示し、その意味するところを考察する。

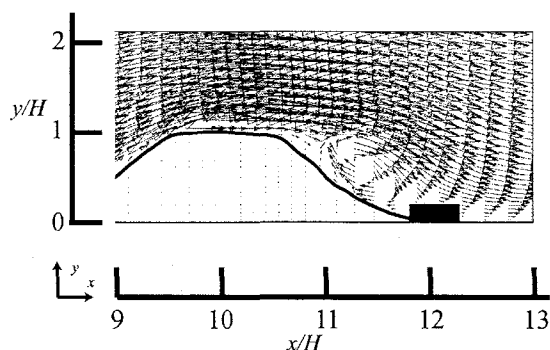


図-13 直交座標系を用いた流速ベクトルの計算結果

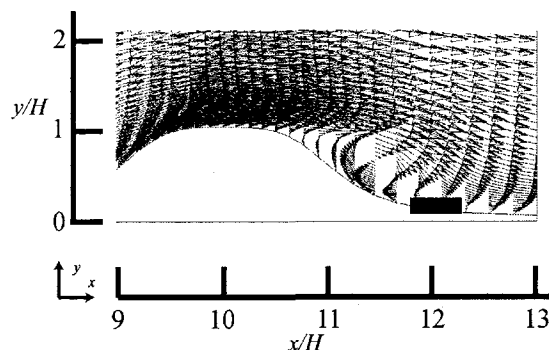


図-14 シグマ座標系を用いた流速ベクトルの計算結果

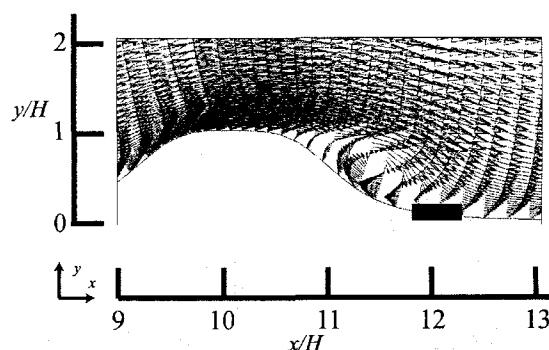


図-15 一般座標系を用いた流速ベクトルの計算結果

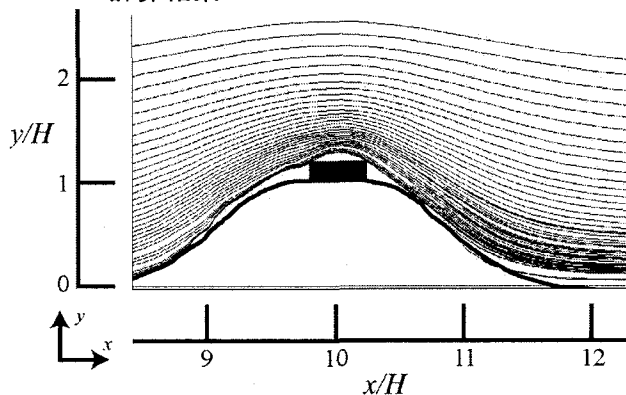


図-16 直交座標系を用いた流線の計算結果

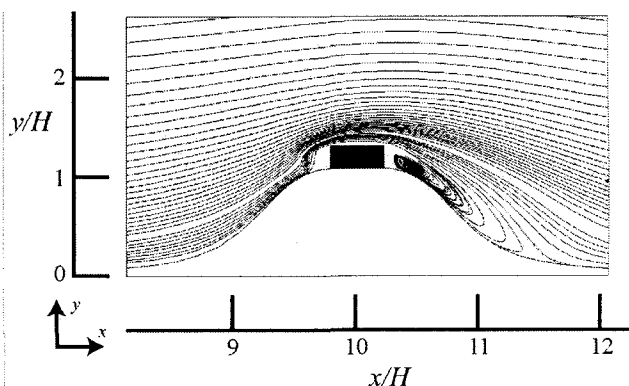


図-17 シグマ座標系を用いた流線の計算結果

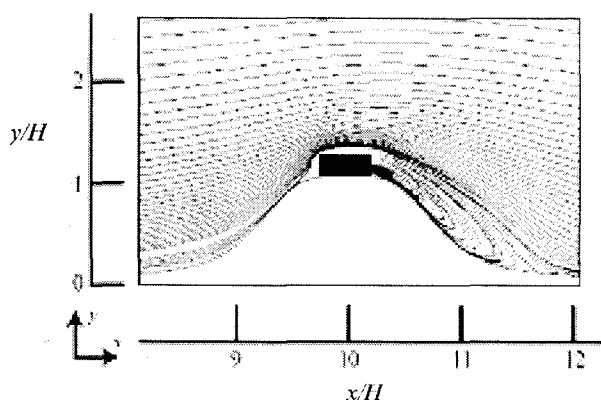


図-18 一般座標系を用いた流線の計算結果

図-13, 14, 15 に構造物(a)を山の風下の逆領域に設置した場合の構造物中心を通る鉛直断面での速度ベクトルの計算結果を示す. この構造物の位置では一般座標, シグマ座標, 直線直交座標とも構造物を十分解像できる格子密度がある. したがって三つの計算結果はほぼ一致しておりどの座標系を用いても良い結果になっている.

次に図-16, 17, 18 に構造物(a)を山の頂上に設置した場合の構造物中心を通る鉛直断面での流線の計算結果を示す. 山の頂上部では, 一般座標, シグマ座標とも山の下と同様, あるいはそれ以上に密な格子がとれるが, 直線直交座標の場合山の高さに相当する範囲全体で格子密度を上げないと解像度が確保できない. 本計算での直交格子では構造物高さ方向の格子数は3と解像度が低い. このため一般座標およびシグマ座標での計算結果に見られる逆流が直交格子の計算結果には見られない. 以上のような結果は形状の異なる物体を置いた場合も見られた.

直交座標系においても同じ現象をとらえようとするならば, 丘の上の構造物の高さまで十分な格子数を確保しなければならなくなる. 計算時間については直行格子の方が短時間で言うことができた. しかし, シグマ座標系と一般座標系を用いる際には格子数を減じることも可能と考えられる.

地表面付近に存在する構造物の位置に因らない効率的な座標系選択としてはシグマ, 一般座標系となるといえる. その他の物体においても境界に沿って作成できる範囲は一般, シグマを用いた方がやはり効率的と考えられる. 一般に構造物の場合, 形状を考えてみると地面より鉛直に建っている物が多く, シグマ座標系の方が使いやすいものとする.

7. 結論

本研究では境界適合曲線座標に IBM 法を組み込

み, これまで一般に行われてきている直線直交座標を基にした IBM と比較することによりその精度や効率について調べた. これにより得られた結果を以下に示す.

- 1) 格子密度の十分ある山の下に構造物を設置したケースではシグマ, 一般, 直交座標系のいずれも構造物周辺の流れをうまく解像できた.
- 2) 丘の上に構造物を設置したケースではシグマ座標および一般座標では逆流が発生するのに対し, 直交座標系では格子間隔が粗くなり逆流が再現できないなどの問題がある.
- 3) 計算量に関しては直交座標が最も少ないが, シグマ座標での計算量は一般座標に比べて約80%ですむ.

以上の結果より IBM における地形上に構造物を設置するような複雑地形上流れの数値計算への応用を考慮すると地表面より鉛直に座標軸をとるシグマ座標系が有用であると判断できる.

今後, 任意位置の境界も表現するには内挿の導入が必要である. また, 実地形上に存在するさまざまな形状の物体についても検討する必要がある.

8. 参考文献

- 1) Peskin, C. S.: Flow patterns around heart valves, *J. comput. Phys*, Vol.10, pp.252-271, 1972.
- 2) Tseng, Y.-H., Ferziger, J.H.: A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry, *J. comput. Phys*, Vol.193, pp.593-623, 2003.
- 3) Peskin, C.S.: Numerical analysis of blood flow in the heart, *J. comput. Phys*, Vol.25, pp.220-252, 1977.
- 4) Mohd-Yusof, J. : Combined immersed boundaries / B-splines methods for simulations of flow in complex geometries, *CTR Annual Research Briefs*, pp.317-327, NASA Ames Research Center/Stanford University, 1997.
- 5) Fadlun, E. A., Verzicco, Orlandi, R. P. and Mohd-Yusof, J. : Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations, *J. of Comput. Phys*, Vol.161, pp.30-60, 2000.
- 6) Kim, J., Kim, D. and Choi, H. : An immersed-boundary finite-volume method for simulation of flow in complex geometries, *J. Comput. Phys*, Vol.171, pp.132-150, 2000.

- 7) Nakayama, A. and Yokojima, S. and Vengadesan, S. N. : Colocated finite difference method in general curvilinear coordinates for simulation of flows over arbitrary geometry, *Memoir of Construction Engineering Research Institute Foundation*, No.43-A, pp.29-39, Nov. 2001.
- 8) Zang, Y., Street. R. L. and Koseff. J. R. : A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.*, Vol.114, pp.18-33, 1994.
- 9) Hirsch, C. : Numerical computation of internal and external flows, Volume 1, John Wiley and Sons, New York, 1998.

(2005 年 4 月 15 日受付)