

浸透層上における浅水流の安定性について

On the instability of shallow water flow on permeable beds

大友裕隆*・泉 典洋**

Hirotaka OHTOMO and Norihiro IZUMI

*学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

**正会員 PhD 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻

The instability of shallow water flow has been studied since a long time ago. It has been found from linear stability analysis that, when the Froude number is larger than approximately two, uniform flow becomes unstable, resulting in the evolution of a terrain of waves, which are called roll waves. In this study, a linear stability analysis is performed with the use of the shallow water equation extended for flow on permeable beds in order to investigate the instability of flow on permeable river beds and the resulting water exchange between river flow and the seepage flow beneath the beds. The analysis reveals that flow is unstable in the range of sufficiently large wavenumbers and Froude numbers when the permeable layer is sufficiently thicker than the flow on the bed. In the range of instability, water exchange between river flow and the hyporheic layer beneath river beds is expected to be activated.

Key Words : *instability, water exchange, shallow water equations, linear stability analysis*

1. はじめに

流下方向スケールに比べて水深方向スケールが小さい浅い流れ（浅水流，薄層流）は，フルード数が比較的大きい領域において擾乱に対して不安定となり，水面には転波列と呼ばれる波列が発生することが知られている．このような浅水流の安定性や転波列の発生機構については，流体力学の分野において古くから数多くの研究が行われている．特に浅水流方程式を用いた解析は，比較的容易であるにも関わらず現実の流れの特性をある程度良好に説明できることから，安定性解析の典型的な例として知られている^{1),2)}．解析の結果によれば，フルード数が2より大きい場合，浅水流は擾乱に対して不安定となる．またその際，不安定性を表す擾乱の成長率を見ると，水深の数十倍から数百倍より小さい波長を持った擾乱に対して急激に大きくなり，実際に発生する転波列の波長領域を部分的に説明できることが明らかになっている．

一方，二つの流れが隣接して存在しているような状況下では，境界面を境にして上層と下層の流速分布に不連続が存在すると，境界面は微小変化に対して不安定となる．この不安定現象は，Kelvin-Helmholtz 型の不安定現象の最も単純な例として知られている^{3),4)}．

礫床河川等の流れのように，底面が透水性の高い浸透層で構成されているような場合も，流速の大きい河川流と流速の小さい浸透流の間に不安定が発生し，それによって河川流と浸透流の間に活発な流水交換が生じることが予想される．同時に，フルード数が比較的大きい場合，河川流自体も不安定となり，水面には転波列が発生する．このような水面における不安定現象と河川流・浸透流間における不安定現象は相互に影響を及ぼし合うことが予想されるが，これについて取り

扱った例は，著者らの知る限り存在しない．

近年における生物環境への関心の高まりに伴って，河道内の生物環境に関する研究も急速に進んでいる．前述した河川流と浸透流の間に生じる流水交換機構を明らかにすることは，河道内の生物環境を考える上でも重要な課題である．河川流との流水交換が活発に生じる hyporheic zone（河床間隙水域）とよばれる浸透層内の領域では，河川流と浸透流の間の流水交換現象が，河道内の生物環境に大きな影響を与えており，重要な環境要素となっていることが知られている⁵⁾．

本研究では，浸透層上を流れる浅水流の安定性を明らかにするための第一歩として，解析が容易な，水深平均した浸透層上と浸透層内の流れの方程式を用いた線形安定解析を行った．

2. 概念的モデル

礫で構成された透水性の高い浸透層上に浅い流れが生じている状況を考える．浸透層内には浸透流が生じており，浅水流と浸透流は流下方向に等流状態で流れているとする．もしこの等流状態が安定的に維持されるとすれば，水深方向の流速は0となり流れの交換は生じない．河川流の流れる領域（以降河川層と呼ぶ）と浸透層の境界上における乱流拡散によって微小な交換は生じるものの，浸透層内外の物質交換を活発にするためには，より大規模で組織的な流水交換が必要であると考えられる．

上記の流れに，流速が速いところと遅いところが発生したとする．流量の保存によって，流れの速いところは水深が浅くなり，流れの遅いところは水深が深くなる．水深が浅いところでは河床上での圧力が小さくなり，水深が深いところでは大きくなる．すると浸透

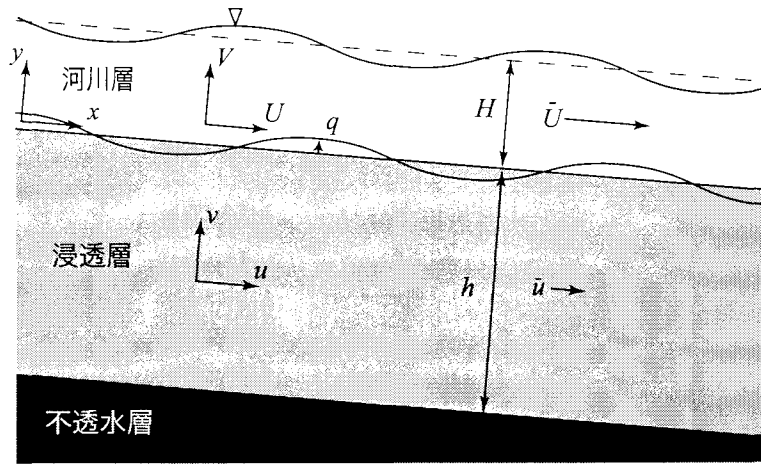


図-1 モデルの概念図

流にかかる水頭に空間的な分布が生じて、水深が浅いところでは浸透層から河川層に、水深が深いところでは河川層から浸透層に向かって流れが発生する。浸透流は河川流と比較して流速が遅いため、水深が浅いところでは浸透流の湧出により河川流は減速され、逆に水深が深いところでは加速されることになる。もし流速が最大になる（水深が最も浅くなる）点と、浸透流の湧出が最大になる点が完全に一致すれば、流速の大きな河川流は減速させられ、流速の小さな浸透流は加速させられる。このような作用は流れを一様にしようとし、与えられた擾乱を減衰させる方向に働く。ところが流れには慣性力が働くため、外力に対する反応が遅れることがある。このような反応の遅れ（位相の遅れ）が発生すると、流れの速いところはさらに速くなり遅いところはさらに遅くなるような力が働く。このとき流れは不安定になる。

図-1に示すような一様勾配斜面の二層流モデルを考える。流量は流下方向に一定とし、浸透層は水深とほぼ同程度から10倍程度のオーダーの厚さを有するものと仮定する。解析を容易にするために、河川流および浸透流の支配方程式としては水深方向に平均した方程式を用いることにする。等流状態にある河川流および浸透流に対し微小な擾乱を与え、その擾乱が発達するかどうかを線形安定解析を用いて調べることにする。

3. 定式化

3.1 水深平均した支配方程式

図-1に示した河川層の流れは、レイノルズ平均を取った二次元のNavier-Stokes方程式を用いて、次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + gS + \epsilon \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g + \epsilon \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで t は時間、 x は流下方向の座標、 y は河床を原点とし上向きにとった水深方向の座標、 U および V はそれぞれ x および y 方向の流速成分、 P は圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 S は河床勾配、 ϵ は渦動粘性係数である。問題を簡単にするためにここでは ϵ は断面内で一定値を取るものと仮定する。

一方、河床浸透層内の流れの運動方程式と連続の式は次式で表される³⁾。

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + gS + \frac{\epsilon_s}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{D_x}{\rho \lambda} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \frac{\epsilon_s}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{D_y}{\rho \lambda} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

ここで u および v は浸透層内における見かけの流速のそれぞれ x 方向および y 方向成分、 p は浸透層内の圧力、 λ は空隙率、 ϵ_s は浸透層内の渦動粘性係数、 D_x および D_y は浸透層内で流れが受ける抗力のそれぞれ x 方向および y 方向成分である。式(4)左辺の移流項は実流速 u/λ と単位面積あたりの流量を乗じた運動量の空間的変化を示している。また圧力および重力は空隙に存在する流体部分にのみ働くので、 λ がかかることになる。よって移流項と圧力および重力項には λ について2次の差が生じることがわかる。

河川層での連続式(3)を水深方向に $y = 0$ から H まです積分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{U} H}{\partial x} - U(H) \frac{\partial H}{\partial x} + V(H) - V(0) = 0 \quad (7)$$

ここで H は水深, $V(0)$ は底面 ($y = 0$) における水深方向流速である. また $\bar{U}$ は流下方向の平均流速であり, 次のように定義される.

$$\bar{U}H = \int_0^H U dy \quad (8)$$

水面での鉛直方向流速 $V(H)$ は運動学的境界条件により次のように表される.

$$V(H) = \frac{\partial H}{\partial t} + U(H) \frac{\partial H}{\partial x} \quad (9)$$

上式を用いると式 (7) は次のようになる.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}H}{\partial x} = V(0) \quad (10)$$

浸透層内での連続式 (6) を浸透層厚方向に $y = -h$ から 0 まで積分する. 浸透層厚 h を流下方向に一定とし, 浸透層の底部 ($y = -h$) における浸透層厚方向の流速はゼロと仮定する. そのとき式 (6) は次のようになる.

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} = -v(0) \quad (11)$$

ここで $\bar{u}$ は浸透層厚方向に平均した浸透流速であり次式で定義される.

$$\bar{u}h = \int_{-h}^0 u dy \quad (12)$$

式 (10) と (11) を辺々たし合わせると次のようになる.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{U}H + \bar{u}h)}{\partial x} = V(0) - v(0) \quad (13)$$

上式は浸透層内外を合わせた全体での流量保存を表している. したがって右辺はゼロとならなければならない. すなわち次の関係が成立する.

$$V(0) = v(0) \quad (14)$$

上式は浸透層内外の境界面を通過する流量が連続であることを意味している.

流下方向流速に比較して水深方向の流速が十分小さいとし, $V \approx 0$, $v \approx 0$, $D_y \approx 0$ とすると, 式 (2) および (5) より次式が得られる.

$$P = p = \rho g (H - y) \quad (15)$$

ただし上式中 P および p はそれぞれ $0 \leq y \leq H$ および $-h \leq y \leq 0$ における圧力を意味していることに注意する. 上式は浸透層内外で静水圧分布が成立することを意味している.

式 (9) および式 (15) を用いて式 (1) を水深積分すると次式が得られる.

$$\frac{\partial \bar{U}H}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2 H}{\partial x} - U(0)V(0) = -gH \frac{\partial H}{\partial x} + gHS - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (16)$$

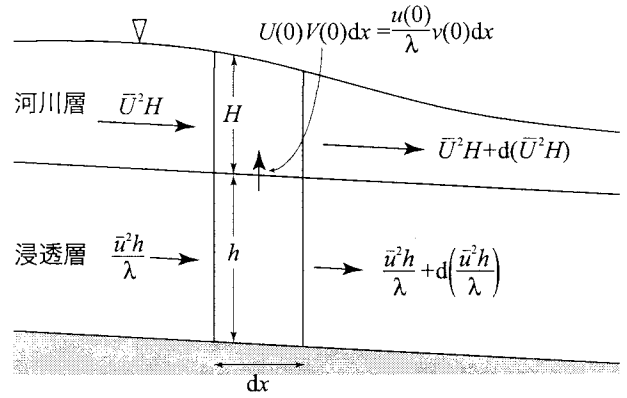


図-2 河川層-浸透層間の運動量交換.

上式を導く際, 式 (1) 中のレイノルズ応力を表す二つの項 $\epsilon \partial^2 U / \partial x^2$ および $\epsilon \partial^2 U / \partial y^2$ の内, 前者は後者に比べて小さいとして無視した. また τ_b は

$$\tau_b = \rho \epsilon \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (17)$$

であり底面剪断力を表している. ここでは平均流速 $\bar{U}$ を用いて次のように表すことにする.

$$\tau_b = \rho C_f \bar{U}^2 \quad (18)$$

ここで C_f は底面摩擦係数であり, 相対水深 (水深/粗度高さ) の弱い関数であるが, ここでは問題を簡単にするために定数と仮定する.

式 (4) を層厚方向 $y = -h$ から 0 まで積分し, 式 (15) を用いると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + u(0)v(0) \right] \\ = -gh \frac{\partial H}{\partial x} + ghS - \frac{\bar{D}_x h}{\rho \lambda} \end{aligned} \quad (19)$$

上式を導く際, 式 (4) 中のレイノルズ応力に関する右辺第三項を, 浸透層内の抗力に比較して小さいとして無視した. また水深平均した x 方向の抗力 $\bar{D}_x$ は Ergun の式を用いて次のように表されるものとする³⁾.

$$\bar{D}_x = \frac{150 \rho \nu (1 - \lambda)^2}{D_s^2 \lambda^2} \bar{u} + \frac{1.75 \rho (1 - \lambda)}{D_s \lambda^2} \bar{u}^2 \quad (20)$$

ここで ν は動粘性係数, D_s は浸透層を構成する礫の平均粒径である.

式 (16) および (19) は, 運動量の収支から直接導くことも可能である (図-2 参照). ここではさらに全層での運動量について考えてみる. 式 (19) に λ を乗じて式 (16) と辺々たし合わせると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}H + \bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{U}^2 H + \frac{\bar{u}^2 h}{\lambda} \right) \\ = -g(H + \lambda h) \frac{\partial H}{\partial x} - g(H + \lambda h) S - \frac{\tau_b + \bar{D}_x h}{\rho} \\ + U(0)V(0) - \frac{u(0)v(0)}{\lambda} \end{aligned} \quad (21)$$

上式中、右辺第一および第二項の圧力および重力は、浸透層内では空隙に存在する流体にのみ働くことから h に λ が掛かることになる。右辺最後の二つの項は運動量交換を表す項であり、 $U(0)V(0)$ は河川層-浸透層境界を通して河川層内へ輸送される運動量を表している。また $u(0)v(0)/\lambda$ は河川層-浸透層境界を通して浸透層外へ輸送される運動量である。全層で考えると運動量輸送の収支はゼロとならなければならない。したがって次の関係が成立する。

$$U(0)V(0) = \frac{u(0)v(0)}{\lambda} \quad (22)$$

上式に式 (14) を代入して次式が得られる。

$$U(0) = \frac{u(0)}{\lambda} \quad (23)$$

上式は河川層-浸透層境界近傍における河川層内の流速 $U(0)$ と浸透層内の実流速 $u(0)/\lambda$ が等しいことを意味している。

連続の式 (10) および (11) を用いて式 (16) および (19) を書き直すとそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + gS - \frac{\tau_b}{\rho H} - \frac{\bar{U} - U(0)}{H} V(0) \quad (24)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + gS - \frac{\bar{D}_x}{\rho \lambda} - \frac{u(0) - \bar{u}}{\lambda^2 h} v(0) \quad (25)$$

3.2 河川流、浸透流間の運動量交換

河川流、浸透流の浅水方程式はそれぞれ式 (10) および (24)、(11) および (25) のようになる。それらの式の中に現れる $V(0)$ および $v(0)$ は河川層-浸透層間の交換流量であり、次のように表すこととする。

$$V(0) = v(0) = q \quad (26)$$

q は後に理論より得ることができる。

一方、 $U(0)$ および $u(0)$ は鉛直方向の流速分布から決まるものであり、ここでやっているような浅水流的な取り扱いでは先験的に得ることはできない。何らかの仮定を用いて経験的に決定しなければならない量である。ここでは次のように決定する。河川層-浸透層境界における流速 $U(0) = u(0)/\lambda$ は河川流の平均流速 $\bar{U}$ より小さく浸透流の実平均流速 $\bar{u}/\lambda$ より大きいはずである。ここでは次のように両者の重みつき平均を取ることにする。

$$U(0) = \frac{u(0)}{\lambda} = r\bar{U} + (1-r)\frac{\bar{u}}{\lambda} \quad (27)$$

ここで r は 0 から 1 まで変化し得る重みパラメータであり、0 に近いとき河川層-浸透層境界での流速が浸透層実平均流速 $\bar{u}/\lambda$ に近くなり、1 に近いとき河川層平均流速 $\bar{U}$ に近くなる。通常の浸透層上の流れでは境界面での流れは非常に小さくなり、 r は小さい値を取ることが予想される。

r は河川層-浸透層での運動量輸送を決定するので、後の理論において重要なパラメータとなることが予想さ

れるが、前述したように r を合理的に得ることはできない。よって r を流れの不安定性を決定するパラメータとして変化させる。すなわち河川層-浸透層境界近傍における流速が流れの不安定性に影響を及ぼすかどうかを調べることにする。

式 (26) および (27) を用いると河川流および浸透流の浅水方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + gS - C_f \frac{\bar{U}^2}{H} - \frac{(1-r)q}{H} \left(\bar{U} - \frac{\bar{u}}{\lambda} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}H}{\partial x} = q \quad (29)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + gS - \frac{\bar{D}_x}{\rho \lambda} - \frac{r q}{\lambda h} \left(\bar{U} - \frac{\bar{u}}{\lambda} \right) \quad (30)$$

$$h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + q = 0 \quad (31)$$

3.3 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\bar{U}, \bar{u}) = U_c (U^*, u^*), \quad q = C_f U_c q^* \quad (32a, b)$$

$$(H, h) = H_c (H^*, h^*), \quad x = \frac{H_c}{C_f} x^*, \quad t = \frac{H_c}{C_f U_c} t^* \quad (32c-e)$$

ここで U_c および H_c は等流状態における河川層の流量を対象にしたフルード的な限界流速および限界水深であり、次式が成り立つ。

$$\frac{U_c^2}{g H_c} = 1 \quad (33)$$

上記の無次元化を用いると式 (28)–(31) は次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \sigma - \frac{U^2}{H} - \frac{(1-r)q}{H} \left(U - \frac{u}{\lambda} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} = q \quad (35)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\lambda^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \sigma - \psi u - \chi u^2 - \frac{r q}{\lambda h} \left(U - \frac{u}{\lambda} \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q}{h} = 0 \quad (37)$$

ここで表記を簡単にするために $*$ は落としている。以降も $*$ はすべて省略する。式 (34) および (36) 中に現れる無次元パラメータ σ および ψ , χ は次のように表される。

$$\sigma = \frac{S}{C_f} = Fr^2 \quad (38)$$

$$\psi = \frac{150}{C_f} Re^{-1} \left(\frac{H_c}{D_s} \right)^2 \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^3} \quad (39)$$

$$\chi = \frac{1.75}{C_f} \frac{H_c}{D_s} \frac{1-\lambda}{\lambda^3} \quad (40)$$

また $Re = U_c H_c / \nu$ であり、等流状態における河川流のレイノルズ数を示している。 σ は正規化された河床勾配であり、等流状態における河川流のフルード数の二乗に等しい。また ψ および χ は底面摩擦係数 C_f および相対水深 H_c/D_s 、空隙率 λ の関数となっている。空隙率 λ については砂礫の大きさ、形に影響されるが、一般に考えられる 0.3-0.4 程度とする。また底面摩擦係数 C_f の値は 0.05-0.005 の範囲で変化するものとする。相対水深は 0.5-10 程度の範囲として、礫の平均粒径 D_s を 5-20cm 程度とすると、相対水深の範囲から Re は 100000-1000000 程度と考えられる。よって χ は 100-100000 程度の値を取ることがわかり、それに対応して ψ は 0.01-50 程度の値を取る。すなわち χ と比較すると ψ は非常に小さい値となっている。

3.4 基本解

線形安定解析を行う前に擾乱を与える前の基本解を求める。基本状態では流速および水深は時間および空間において一定値を取る。またそのとき河川流と浸透流の間の交換量 q も 0 となる。式 (34) および (35) で時間微分項および x 微分、 q を落とすと次式が得られる。

$$\sigma = \frac{U_n^2}{H_n}, \quad U_n H_n = 1 \quad (41a, b)$$

ここで U_n および H_n は河川流の等流流速および等流水深である。式 (41) より次式が得られる。

$$U_n = \sigma^{1/3}, \quad H_n = \sigma^{-1/3} \quad (42a, b)$$

同様に式 (36) および (37) から次式が得られる。

$$\sigma - \psi u_n - \chi u_n^2 = 0 \quad (43)$$

u_n は浸透流の等流流速であり、ここでは正の値をとると仮定する。上式を解いて次式が得られる。

$$u_n = \frac{-\psi + (\psi^2 + 4\sigma\chi)^{1/2}}{2\chi} \quad (44)$$

前述したように ψ は χ に比べて非常に小さい値である。また σ は 1 のオーダーを考えているので、 ψ の項は u_n の決定にほとんど影響を及ぼさないことがわかる。すなわち u_n は χ の項により値が決定することから、ここで ψ を無視する。すると式 (44) は次式のように表される。

$$u_n = \left(\frac{\sigma}{\chi}\right)^{1/2} \quad (45)$$

4. 線形安定解析

次のような摂動展開を導入する。

$$(U, H, u, q) = (U_0, H_0, u_0, 0) + A(U_1, H_1, u_1, q_1) e^{\Omega t} e^{i(kx - \omega t)} \quad (46)$$

ここで A は擾乱の振幅であり、微小と仮定する。また Ω および k 、 ω はそれぞれ擾乱の成長率および波数、角振動数である。式 (46) を支配方程式 (34)-(37) に代入

して A のオーダーで整理すると、 $O(1)$ において前節で求めた基本状態の解 (42) および (45) が得られる。

$$U_0 = \sigma^{1/3}, \quad H_0 = \sigma^{-1/3}, \quad u_n = \left(\frac{\sigma}{\chi}\right)^{1/2} \quad (47a-c)$$

$O(A)$ では次式が導かれる。

$$(\Omega - i\omega + ikU_0 + 2U_0^2) U_1 + (ik - U_0^4) H_1 + (1-r)U_0 \left(U_0 - \frac{u_0}{\lambda}\right) q_1 = 0 \quad (48)$$

$$ikU_0^{-1} U_1 + (\Omega - i\omega + ikU_0) H_1 - q_1 = 0 \quad (49)$$

$$ikH_1 + \left(\frac{\Omega - i\omega}{\lambda} + \frac{iku_0}{\lambda^2} + 2\chi u_0\right) u_1 + \frac{r}{\lambda h} \left(U_0 - \frac{u_0}{\lambda}\right) q_1 = 0 \quad (50)$$

$$iku_1 + h^{-1} q_1 = 0 \quad (51)$$

式 (51) より次式が得られる。

$$q_1 = -ikh u_1 \quad (52)$$

式 (52) を式 (48)-(50) に代入し、マトリックス形で書き直すと次のようになる。

$$\mathbf{L} \begin{bmatrix} U_1 \\ H_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (53a)$$

ここで

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \Omega - i\omega + ikU_0 + 2U_0^2 & ik - U_0^4 & -i(1-r)khU_0 \left(U_0 - \frac{u_0}{\lambda}\right) \\ ikU_0^{-1} & \Omega - i\omega + ikU_0 & ikh \\ 0 & ik & \frac{\Omega - i\omega}{\lambda} + \frac{iku_0}{\lambda^2} + 2\chi u_0 - \frac{irk}{\lambda} \left(U_0 - \frac{u_0}{\lambda}\right) \end{bmatrix} \quad (53b)$$

式 (53) が自明でない解 (0 以外の解) を持つためには次の式が成立する必要がある。

$$|\mathbf{L}| = 0 \quad (54)$$

式 (54) を解けば発達率 Ω について次式のような関係が得られる。

$$\Omega = \Omega(k; \sigma, \chi, h, \lambda, r) \quad (55)$$

上式より発達率 Ω を決定する無次元パラメータは、擾乱の無次元波数 k 、正規化された河床勾配 $\sigma (= Fr^2)$ および透水性を表すパラメータ χ 、浸透層厚 h 、空隙率 λ 、重みパラメータ r の 6 個であることがわかる。

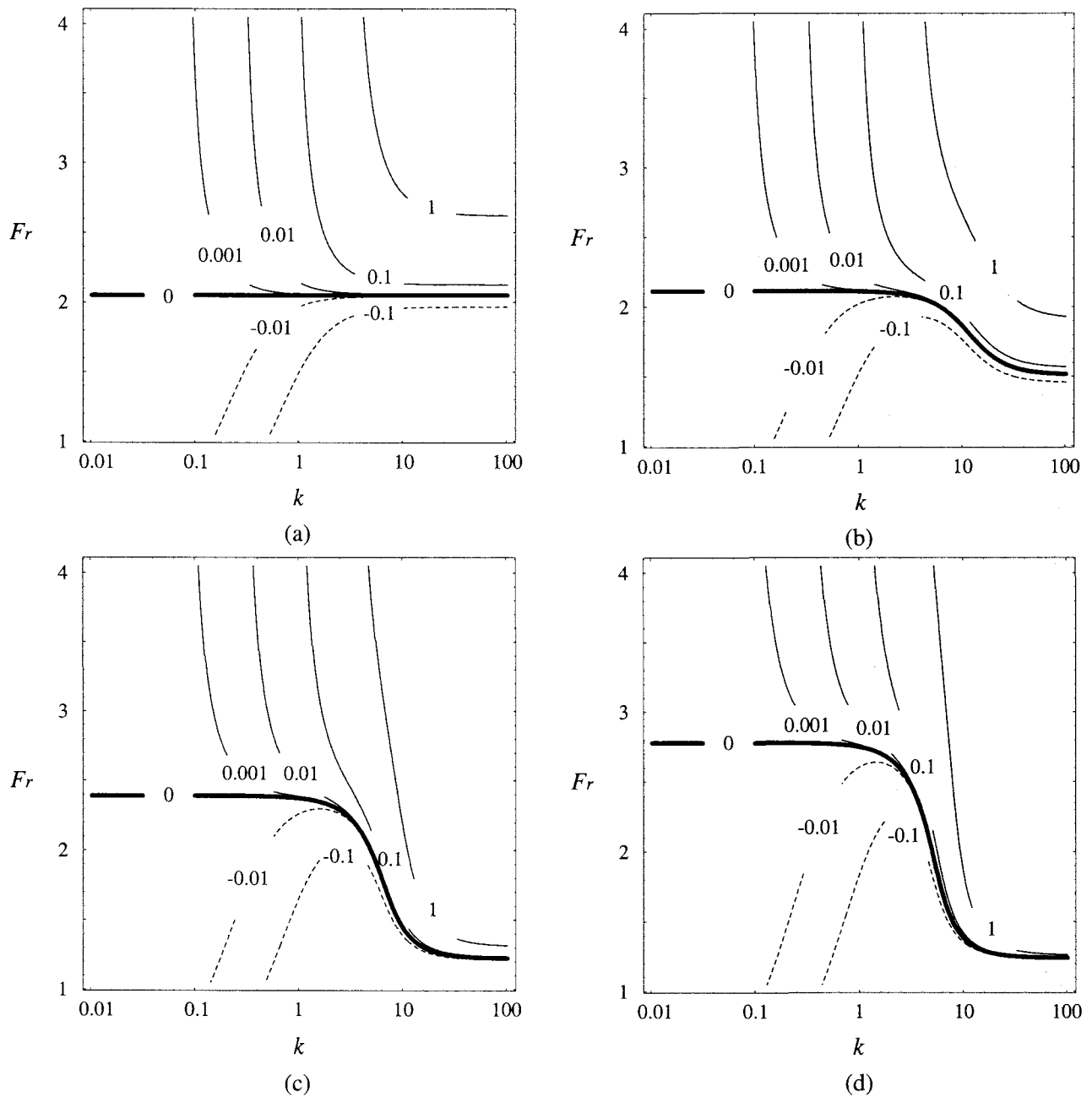


図-3 フルード数 Fr および擾乱の波数 k , 浸透層厚 h による発達率 Ω の変化. 太実線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し, 細実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す. $r = 0.1$, $\lambda = 0.3$, $\chi = 1000$, (a) $h = 0$, (b) $h = 1$, (c) $h = 5$, (d) $h = 10$.

5. 結果及び考察

5.1 浸透層厚 h の影響による安定性の変化

発達率 Ω のフルード数 Fr および無次元波数 k , 浸透層厚 h による変化を等高線図により示したのが図-3である. 図は縦軸をフルード数 $Fr (= \sigma^{1/2})$, 横軸を無次元波数 k に取っている. また太い実線が $\Omega = 0$ の中立曲線, 細い実線が正のコンタ, 点線が負のコンタを示している. 中立曲線から正の領域では等流状態は不安定となることを意味している. 前述したように河床付近の流速は浸透層内の流速に大きな影響を受けると考え, 重みパラメータ r は 0.1 とした. χ としては, 比較

的透水性の高い礫床で標準的と考えられる 1000 とし, 空隙率 λ は 0.3 の値を用いている.

図-3 は (a) $h = 0$ および (b) $h = 1$, (c) $h = 5$, (d) $h = 10$ とした場合の結果である. $h = 0$ に対応する図-3(a) は透水層が存在しない場合に相当しており, 従来の転波列の解析結果に対応している. 中立曲線は全ての波数において $Fr = 2$ に位置していることがわかる. 図によると臨界フルード数 (不安定が生じる最小のフルード数) は波数によらずほぼ一定であるが, Ω の値自体は, フルード数が 3-4 の領域で波数が大きくなるにしたがって大きくなる様子がわかる.

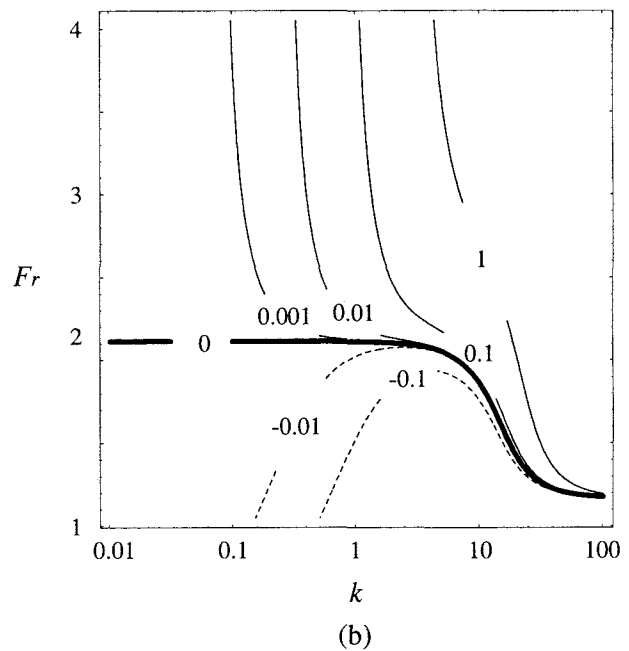
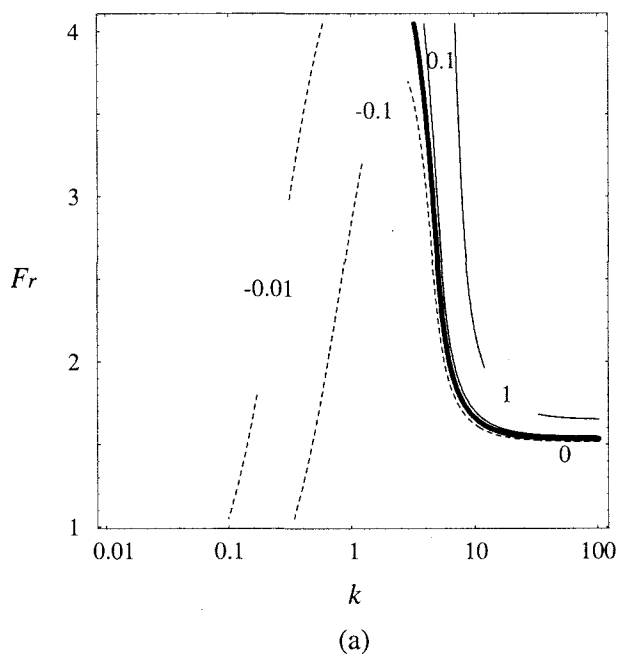


図-4 フルード数 Fr および擾乱の波数 k , 透水性を表すパラメータ χ による発達率 Ω の変化. 太線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し, 実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す. $r = 0.1$, $\lambda = 0.3$, $h = 10$, (a) $\chi = 100$, (b) $\chi = 100000$.

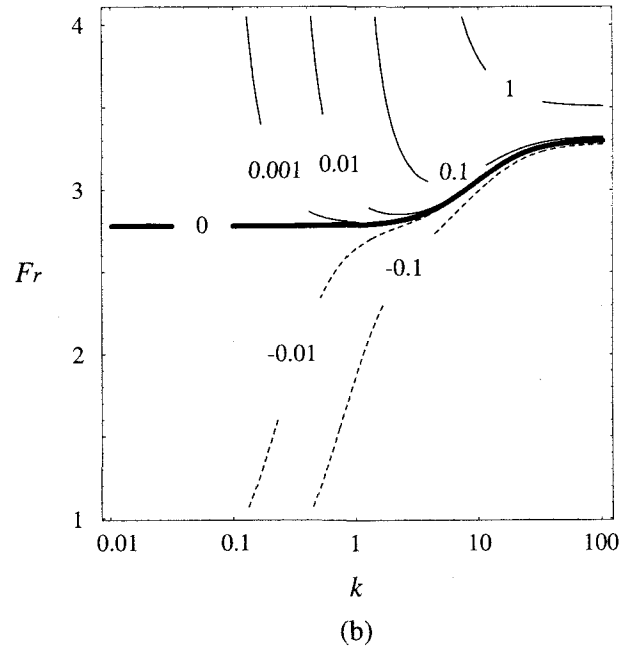
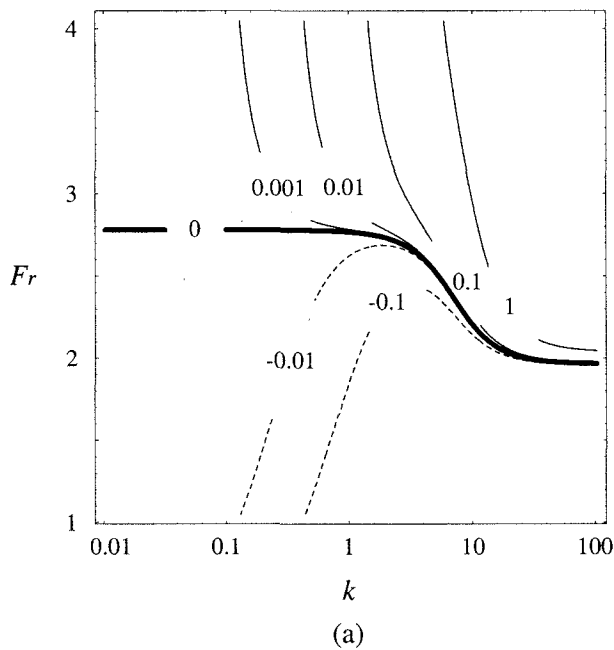


図-5 フルード数 Fr および擾乱の波数 k , 重みパラメータ r による発達率 Ω の変化. 太線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し, 実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す. $\lambda = 0.3$, $h = 10$, $\chi = 1000$, (a) $r = 0.5$, (b) $r = 0.9$.

図-3(b) および (c), (d) は, 浸透層厚が限界水深のそれぞれ 1 および 5, 10 倍の場合である. 浸透層厚が大きくなるにしたがって, 臨界フルード数は波数が小さい領域で大きくなり, 波数が大きい領域で逆になくなる様子がわかる. 特に h が 5-10 になると, 波数が大きい領域で臨界フルード数は 1 近くまで下がるのがわかる. 浸透層厚が増加すると波数が大きく波長が短い擾乱に対して流れの不安定性が増加することがわ

かる.

5.2 透水性パラメータ χ による安定性の変化

図-4 は $r = 0.1$ および $h = 10$, $\lambda = 0.3$ の下で, χ の値を変化させたときの $Fr-k$ 平面における不安定領域の変化を示したものである. 図-4(a) および (b) はそれぞれ $\chi = 100$ および $\chi = 100000$ の場合における結果であり, $\chi = 1000$ の場合に相当する図-3(d) の結

果を含めて比較すると、 χ の増加に伴って、波数が大きい領域の臨界フルード数はわずかに減少し、波数が小さい領域の臨界フルード数が大きく減少する様子が見られる。式 (40) によると χ を決定する最も重要な物理量は相対水深 H_c/D_s である。河床を構成する礫の粒径に比べて水深が大きくなると χ は大きくなることになる。

5.3 重みパラメータ r による安定性の変化

図-5 は $h = 10$ および $\lambda = 0.3$, $\chi = 1000$ とした場合の $\Omega(Fr, k)$ の r による変化を示したものである。図-5(a) および (b) はそれぞれ $r = 0.5$ および 0.9 の場合の結果を示している。 $r = 0.5$ である (a) では、 $r = 0.1$ である図-3(d) と比較すると、波数の大きい領域で明らかに臨界フルード数が大きくなることがわかる。図-5(b) の $r = 0.9$ のケースでは、波数が小さい領域の臨界フルード数はほとんど変化しないが、波数が大きい領域でかなり大きくなることがわかる。実際は $r = 0.9$ になることは考え難いが、 r が小さい場合と比較して全く逆の傾向が見られることは興味深い事実である。

5.4 理論の限界と今後の課題

本研究は、浸透層上を流れる浅水流の安定性の基本的な特性を調べるために、解析の容易な浅水流方程式を用いて線形安定解析を行った。浅水流方程式は水平方向スケールが水深スケールに比べて十分大きい現象を記述することはできるが、水深と同程度のスケールの現象を十分に記述することはできない。ここで行った解析の結果でも、波数が大きく（波長が小さく）なれば不安定性が単調に増加する（減少する）結果が得られているが、どこまでも単調に増加し続けるかどうかについては保証されていないことに注意する必要がある。

本解析で用いた無次元化では、擾乱の無次元波数 k と波長の次元量 L の間には次のような関係がある。

$$L = \frac{2\pi H_c}{k C_f} \quad (56)$$

前述したように C_f は 0.01 のオーダーを有するから、上式はさらに次のようになる。

$$L \approx \frac{600}{k} H_c \quad (57)$$

浅水流方程式を用いた河床波などの解析結果から、 k が 100 に近くなると本解析の結果も有意でなくなることが類推される。波数 $k = 100$ に相当する波長は限界水深 H_c の 6 倍程度となる。波長が限界水深とほぼ同オーダーとなる擾乱に対する不安定性については、本解析は有意な結果を与えないことに留意する必要がある。水深スケールの擾乱に対する不安定性について、その詳細を明らかにするためには浅水流方程式を用いない解析が必要となる。これについては今後の課題である。

6. 結論

水深、浸透層厚で平均した河川流および浸透流の方程式を用いて線形安定解析を行い、浸透層上における浅水流の安定性について調べた。解析の結果、フルード数が 1-3 より大きい領域で流れは不安定となること、浸透層厚および相対水深が大きいほど臨界フルード数は減少し、流れの不安定性は増大することが明らかとなった。

参考文献

- 1) Jeffreys, H.: The flow of water in an inclined channel of rectangular section, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 49, 1925.
- 2) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: A criterion for instability of flow in steep channels, Trans. Amer. Geophy. Union, 1940.
- 3) 日本流体力学会: 流体力学ハンドブック, 丸善, 1987.
- 4) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, 1974.
- 5) Boulton, A. J., Findlay, S., Marmonier, P., Stanley, A. H., Valett, H. M.: The functional significance of the hyporheic zone in streams and rivers, Annual Review of Ecology and Systematics, 29, pp. 59-81, 1998.

(2005 年 4 月 15 日 受付)