

破壊問題に適した数値解析手法とその地震現象への適用

Efficient Numerical Analysis Method for Failure Problems and its Application to Earthquakes

若井 淳*・Gharti Hom Nath**・小国 健二***・堀 宗朗****

Atsushi Wakai and Gharti Hom Nath and Kenji Oguni and Muneo Hori

*学生 東京大学工学系研究科社会基盤学専攻 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

**工修 東京大学工学系研究科社会基盤学専攻修了

***正会員 Ph.D. 東京大学助教授 地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

****正会員 Ph.D. 東京大学教授 地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

Earthquakes are the typical examples of failure phenomena of the crust materials. Especially, prediction of failure behavior of the faults is important for disaster mitigation. However, physical and mathematical modeling of failure phenomena is very difficult. In this sense, we need a highly efficient numerical analysis tool for failure behavior. This paper presents the application of FEM- β to analyze failure problems of earthquake. The major characteristic of FEM- β , the high efficiency in solving failure problem, is explained in the viewpoint of function discretization and failure criterion treatment.

Key Words : Failure Problem, Discretization of Function, Numerical Analysis Method, Earthquake

1. はじめに

地震現象は地殻材料の破壊現象の典型的な例である。しかし、破壊現象の数値モデル化は非常に困難を伴う。それは地殻の材料特性は大変不均質であり、地殻構造や材料特性の正確な測定はほとんど不可能なためである。したがって、実際の測定情報に基づいたモデル化に代わり、様々なモデルを使用するモンテカルロシミュレーションが有効な手法となり得る。このシミュレーションを実現するために、破壊現象を適切に解析するための数値解析手法が必要となる。

一方、地震観測データの統計的解析は従来から地震研究の主要なテーマであった。目的となる情報は主として、観測された地震の規模や長期発生間隔である。そこで、これまでに地震の発生間隔の平均値や分散を推定する多くの試みがなされてきた¹⁾。しかしそれらの手法では、対象領域内の地震の発生間隔が長い場合十分なデータが得られない、地震現象を説明する物理法則に従っていない、などの理由により十分な成果が得られていない。

実際、観測データ¹⁾からは、様々な要因により地震の発生間隔にはばらつきがあることがわかっている。そのひとつの要因として、地殻材料や断層構造の不均質性が影響していることは直観的に理解できる。また、不均質な単独の断層破壊挙動を評価するために、これまでにいくつかのモデルが開発されてきている^{3),4),5)}。一般に破壊現象と不均質性は関連性があり、地震現象を評価するために不均質性を考慮することは重要である。したがって、不均質性を考慮した複数断層系による地震現象の解析は、地震の長期発生予測に対してひとつの有効な手段を与えることが期待される。

そこで本論文では、まず、破壊現象を解析するために有効な数値解析手法である FEM- β ^{6),7)}について概要を

述べ、離散化の妥当性の検証を試みる。次に、FEM- β を地震の長期発生予測問題に適用し、材料の不均質性及び断層の構造不均質性を取り入れ、モンテカルロシミュレーションを行うことで、地震発生間隔の変動性を求め、評価する。また、地震発生間隔のパターンとばらつきに関して観測データと計算結果を比較し、地震の長期発生予測を行う上で、本論文で示す手法が有効であるかを評価する。

2. 破壊問題に適した数値解析手法

2.1 はじめに

破壊現象を伴う連続体の境界値問題を数値的に解くのに適した FEM- β と呼ばれる数値解析手法が提案されている。FEM- β の最大の特徴は、パーティクル離散化と呼ばれる、重なりのない特性関数による関数の離散化と破壊の取扱いにある。

FEM- β は、連続体モデルに対して、変位場に剛体・バネモデルを適用することにより境界値問題を解く。すなわち、領域を Voronoi ブロックに分割し、それぞれの Voronoi ブロックに対する重なりのない特性関数が変位場を離散化するために用いられる。FEM- β では、平均ひずみ及び平均ひずみエネルギーを計算することによって、境界値問題から変換された等価な変分問題の数値解が得られる。厳密な形式では、FEM- β は変位場とは異なる離散化手法を持つ応力場の変分問題として定式化される。即ち、Voronoi ブロック及びそれと共役な Delaunay 三角形の重なりのない特性関数がそれぞれ、変位場及び応力場を離散化するために利用される。変位場は滑らかでない関数により離散化されるが、FEM- β の解は三角形要素を持つ通常の FEM の解と同程度の精度を持つ。また、FEM- β では、重なりのない

ない特性関数を利用した離散化により、2つの隣接する Voronoi ブロックを切り離すことで破壊を簡便に表現する仕組みを持つ。

2.2 パーティクル離散化

本節では、付録 に示した FEM- β の定式化における変位場及び、ひずみ場・応力場の離散化の妥当性を検証する。

パーティクル離散化では、関数とその導関数を離散化するために、2つの異なる重なりのない特性関数を用いる。実際、導関数はその特性関数が定義されている境界上で特異となるため、導関数を関数と同じ重なりのない特性関数によって離散化することは不可能である。

ここではまず、領域 V で定義された2変数関数 f を例として関数の離散化を考えてみる。領域 V 内に分散させた点群 $\{x^\alpha\}$ に Voronoi 分割を適用することにより、領域 V は Voronoi ブロック群 $\{\Phi^\alpha\}$ に分割される。Voronoi ブロック Φ^α の特性関数を $\phi^\alpha(x \in \Phi^\alpha$ のとき 1, $x \notin \Phi^\alpha$ のとき 0) とすると、重なりのない特性関数 $\{\phi^\alpha\}$ による f の離散化は以下のようになる。

$$f^d(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f^{\alpha} \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

係数 $\{f^{\alpha}\}$ は離散化による誤差を最小化することで決定される。ここでは、以下のような誤差を用いて評価する。

$$E^f(\{f^{\alpha}\}) = \int_V (f(\mathbf{x}) - f^d(\mathbf{x}))^2 ds \quad (2)$$

式 (2) の E^f を最小化する $\{f^{\alpha}\}$ は、Voronoi ブロック群 Φ^α による f の平均である。すなわち、

$$f^{\alpha} = \frac{1}{\Phi^{\alpha}} \int_{\Phi^{\alpha}} f(\mathbf{x}) ds \quad (3)$$

となる。ここで、 Φ^{α} は Voronoi ブロックの面積を表す。

次に、 f の導関数の離散化を考えてみる。関数 f の特性関数を用いると、式 (1) の微分は特異な関数となる。しかし、 $\partial\Phi^{\alpha}$ を含む領域に対して平均がとれるならば、導関数の平均値を求められる。そこで、この導関数の平均値を求めるため、Delaunay 三角形 $\{\Psi^{\alpha}\}$ を使用する。 Ψ^{α} の特性関数を $\psi^{\alpha}(x \in \Psi^{\alpha}$ のとき 1, $x \notin \Psi^{\alpha}$ のとき 0) とすると、以下の形式で導関数 $f_{,i}^d$ が離散化できる。

$$g_i^d(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} g_i^{\alpha} \psi^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

式 (3) と同様の考え方で、 $\{g_i^{\alpha}\}$ は Delaunay 三角形の面積 Ψ^{α} を用いて、以下のように表される。

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{\Psi^{\alpha}} \sum_{\beta} \left(\int_{\Psi^{\alpha}} \phi_{,i}^{\beta}(\mathbf{x}) ds \right) f^{\beta} \quad (5)$$

ここで、 $(f_{,i}^d)^2$ は積分不可能であるため、誤差の汎関数 $\int_V (f_{,i}^d - g_i^d)^2 ds$ を用いることができないことに注意する。

式 (5) では、 g_i^d の係数 g_i^{α} 及び f^d の係数 f^{α} は、特性関数の積分を介して関係している。式 (5) 中の積分は f や $f_{,i}$ に依存しておらず、与えられた Voronoi ブロックとその双対図形である Delaunay 三角形に対して一意に決まる。式 (5) 中の積分を以下のように表す。

$$B_i^{\alpha\beta} = \int_V \phi_{,i}^{\alpha}(\mathbf{x}) \psi^{\beta}(\mathbf{x}) ds \left(= \int_{\Psi^{\beta}} \phi_{,i}^{\alpha}(\mathbf{x}) ds \right) \quad (6)$$

式 (6) は B マトリクスを表している。

3. 地震の長期発生予測解析

地震は、岩石中に存在する脆性を持ったクラックが破壊することにより繰り返し発生する。しかもその繰り返し間隔は必ずしも周期性を持っているわけではない。実際、観測データでは、地震の繰り返し間隔にばらつきが見られる²⁾。

そこで本章では、まず、地殻材料の不均質と複数断層の構造不均質を考慮し、モンテカルロシミュレーションを行うことで、地震の発生間隔とそのばらつきを求め、その評価を行う。次に、複数断層に対して同時解析を行い、計算結果と観測データの比較により、地震の長期発生予測に対する本手法の有用性について評価を行う。

3.1 不均質性を考慮した地震発生間隔

図-1 に示すように、本州中心部にある7つの活断層を選び、これらの断層を包含する領域を考える。正確な境界条件、材料特性および構成関係はわかっていないため、ここでは簡単なモデルを使用する。荷重境界条件として、図-1 の右図に示すせん断応力 (5MPa) を対象領域の境界上に作用させる。材料特性としては表-1 に示す値を使用する。断層の構成関係として図-2 に示すような Reid モデルを使用し²⁾、限界応力 τ_c を 40MPa、残留応力 τ_r を 10MPa に設定する (表-1)。断層を離散化することでつくられる各セグメントに固有の構成関係を仮定する。つまり、各断層は断層内の各セグメントが一樣に破壊するのではなく、断層内の各セグメントがそれぞれ異なる時間に破壊すると仮定することにより、断層の構造不均質性を実際の計算に取り入れる。また、与えられた平均値及び標準偏差を持つ断層の材料強度の正規分布に従う乱れを含ませることにより、材料の不均質性を実際の計算に取り入れる。

本節では、前述の構成関係、境界条件、材料特性を用いて地震の発生間隔とそのばらつきを求め、不均質性が地震発生間隔に与える影響を評価する。

1. 材料特性が均質な場合と不均質な場合の断層破壊挙動パターン

一例として、均質、不均質それぞれの場合における、紀伊半島断層の断層破壊挙動パターンの計算結果を図-3、図-4 に示す。これらの図に示すよ

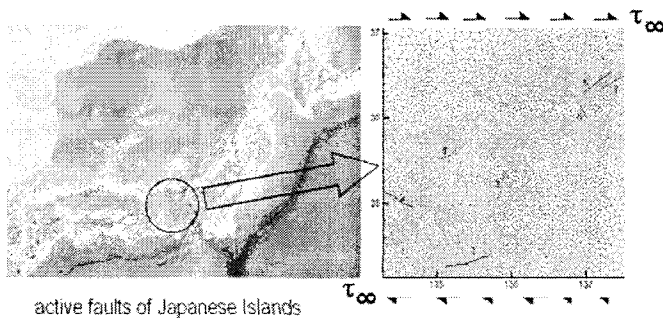


図-1 解析に用いる断層 1:紀伊半島, 2:山崎, 3:花折, 4:山田, 5:御母衣, 6:牛首, 7:跡津川 (右図-縦軸:北緯(度), 横軸:東経(度))

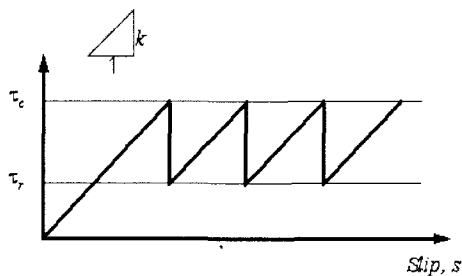


図-2 Reid モデル (τ_c :限界応力, τ_r :残留応力)(横軸:時間)

Young's modulus	50,000 KPa
Poisson's ratio	0.3
Critical stress	40,000 KPa
Residual stress	10,000 KPa
Strength reduction factor for fault	0.8
Density	3.0 KN/m ³

表-1 解析で用いる材料特性

うに、断層破壊挙動パターンは、材料特性が均質な場合よりも不均質な場合の方が変動性が大きくなっている。また、材料特性が均質な場合も断層破壊挙動パターンが変動性を有しているのは、断層の構造不均質が影響しているためと理解される。

2. 材料の不均質を考慮した地震発生間隔の平均と標準偏差の確率分布

一例として、材料特性に 10% の不均質を考慮した紀伊半島断層の地震発生間隔の平均と標準偏差の確率分布の計算結果を図-5, 6 に示す。標準偏差のばらつきが大きいのは、材料不均質が存在することで地震発生間隔の予測の変動性が大きくなっていることを示している。

3. 地震発生間隔の平均及び標準偏差と材料不均質の大きさとの関係

一例として、花折断層において材料不均質の大きさが地震発生間隔の平均及び標準偏差に与える影響を図-7, 8 に示す。これらの図では、材料の不

均質性が大きいほど地震の発生間隔が大きくなり、標準偏差も大きくなっている。また、材料不均質がゼロの場合でも地震発生間隔にばらつきが見られるのは、断層の構造不均質が影響しているためであると理解される。

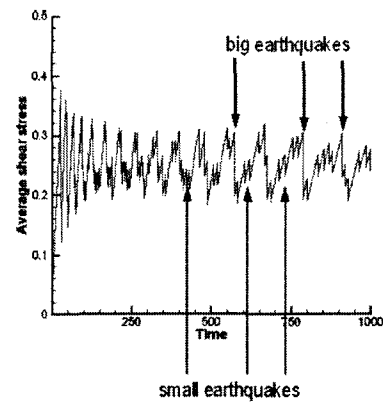


図-3 紀伊半島断層の断層破壊挙動パターン (材料特性が均質の場合) (縦軸:100MPa, 横軸:年)

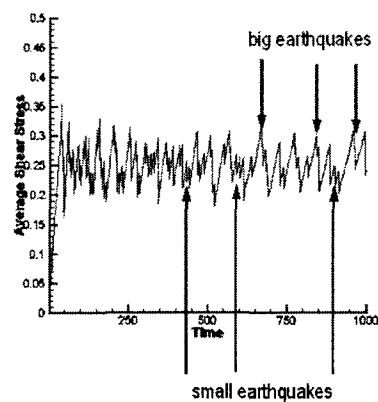


図-4 紀伊半島断層の断層破壊挙動パターン (材料特性が 10% 不均質の場合) (縦軸:100MPa, 横軸:年)

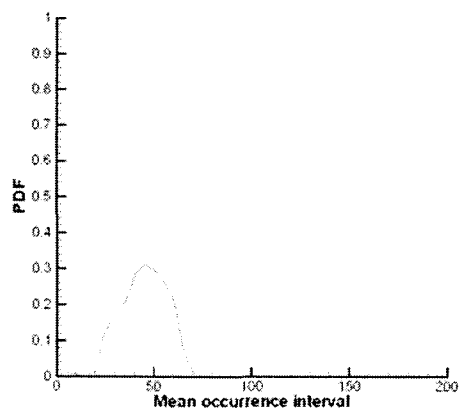


図-5 地震発生間隔の平均の確率分布 (材料特性 10% の不均質性を持つ紀伊半島断層) (横軸:年)

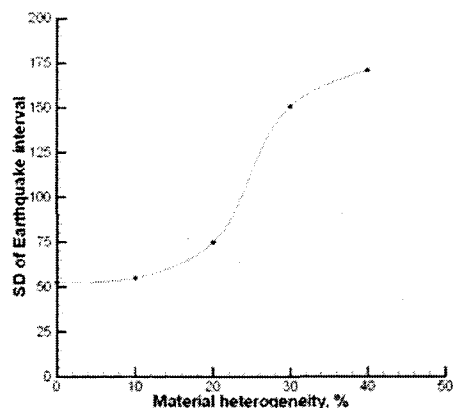


図-8 地震発生間隔の標準偏差と材料不均質の大きさとの関係 (横軸:年)

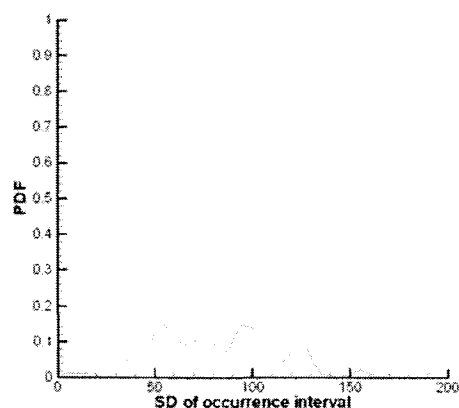


図-6 地震発生間隔の標準偏差の確率分布 (材料特性 10% の不均質性を持つ紀伊半島断層) (横軸:年)

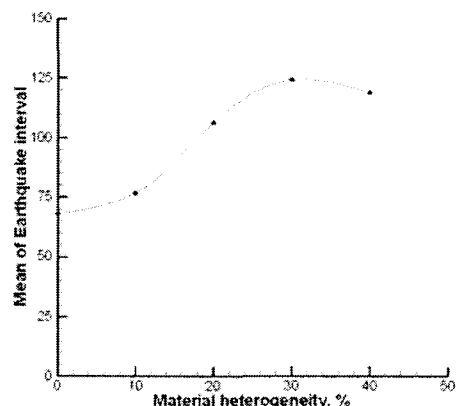


図-7 地震発生間隔の平均と材料不均質の大きさとの関係 (横軸:年)

3.2 地震発生間隔の観測値と計算値の比較

本節では、本州中心部にある 3 つの活断層を用いて、各断層の地震発生間隔パターンを計算し、地震発生間隔の平均と標準偏差を求める。そしてこれらの計算結果を観測データ⁸⁾と比較し、地震の長期発生予測に対する本手法の有用性について述べる。

解析領域は図-9 の右図に示されているとおりである。計算条件は前節と同じである。ここでは、一例として材料特性が 10 % の不均質性をもつと仮定して解析する。

観測データと計算結果による地震発生間隔パターンを図-10～図-15 に、地震発生間隔の平均と標準偏差の比較を観測データと計算結果により行ったものを表-2 に示す。ここで用いた観測データには地震の規模に関する情報が存在しないため、観測データに関する図中に描かれた規模のスケールは任意である。

これらの図と表から、本節で扱ったような簡単なモデル、近似した構成関係、材料特性、境界条件、初期条件を用いても、地震発生間隔パターンの計算結果は観測値とある程度、整合性がとれたものとなっていることがわかる。したがって、現実の地殻構造や応力状態に即した解析を行えるようになれば、現実の地震の定量的な長期予測につながることを期待される。

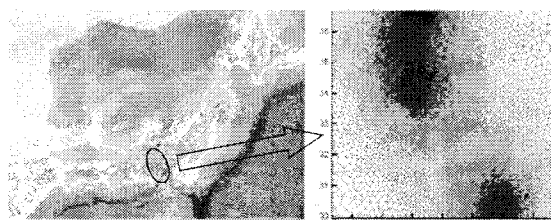


図-9 解析に用いる断層 1:跡津川, 2:阿寺, 3:丹那 (縦軸:北緯(度), 横軸:東経(度))

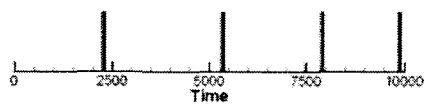


図-10 跡津川における地震発生間隔のパターン (観測値) (横軸:年)

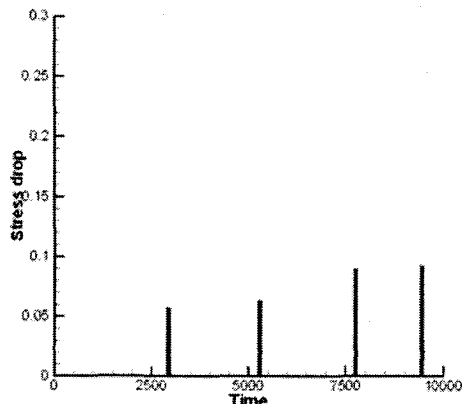


図-11 跡津川における地震発生間隔のパターン (計算値) (縦軸:100MPa, 横軸:年)

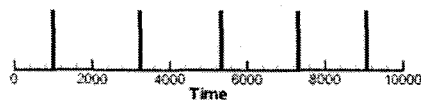


図-12 阿寺における地震発生間隔のパターン (観測値) (横軸:年)

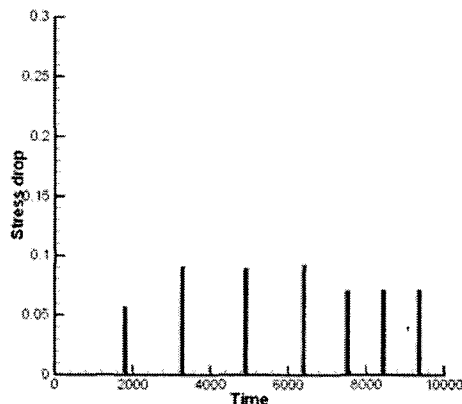


図-13 阿寺における地震発生間隔のパターン (計算値) (縦軸:100MPa, 横軸:年)

4. 結論

1. 破壊現象を解析するのに適した数値解析手法である FEM- β を地震の長期発生予測問題に対して適用した。これにより、境界条件、材料特性及び断層構成等が与えられれば、モンテカルロシミュレーションを行うことにより、不均質性を取り入

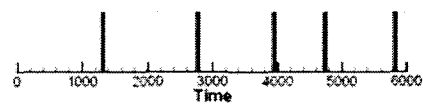


図-14 丹那における地震発生間隔のパターン (観測値) (横軸:年)

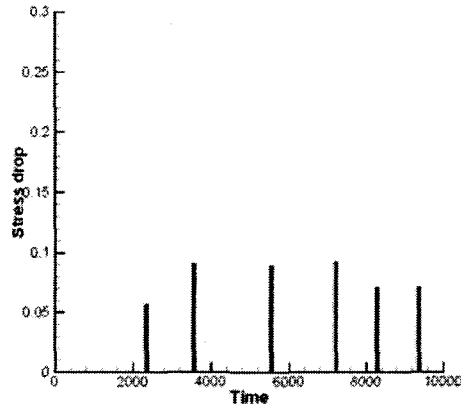


図-15 丹那における地震発生間隔のパターン (計算値) (縦軸:100MPa, 横軸:年)

Faults	Mean occurrence intervals yrs		Standard deviation of occurrence intervals, yrs	
	Observed	Computed	Observed	Computed
Atotsugawa	2471.1	1950	72.5	450.9
Atera	1814.3	1255	87.0	266.0
Tanna	1165.8	1428.83	82.6	333.76

表-2 地震発生間隔における観測値と計算値との比較

れた地震の発生間隔とそのばらつきを解析できる。

2. 本論文で用いた簡単な解析モデルを用いても、地震発生間隔パターンの計算結果について、観測値との整合性が程よくとれている。

付録 I FEM- β の定式化

ここでは、2次元問題に対する FEM- β の定式化を示す。2次元の連続体の最も簡単なモデルとして、準静的状態及び微小変形を仮定した線形弾性体 V を考える。外力 b_i と変位境界条件 u_i^0 が与えられるとき、変位場に対する境界値問題は、以下のように設定される。

$$\begin{cases} (c_{ijkl}u_{k,l}(\mathbf{x})),_{,i} + b_j(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } V, \\ u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}) & \text{on } \partial V. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

ここで、 c_{ijkl} は均質な線形弾性テンソルである。式 (I.1) で表される境界値問題は ∂V で $u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x})$ を満足する変位場 $u_i(\mathbf{x})$ に対して、等価な変分問題に変換される。FEM- β では、変位場の離散化に、導関数がデルタ関数となる特性関数を用いるため、ひずみの2次式

で表される通常の汎関数に対して、離散化された変位場を直接用いることはしない¹。代わりに変位場と応力場に対する以下の汎関数を用いる。

$$I(\mathbf{u}, \sigma) = \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) b_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} c_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \sigma_{kl}(\mathbf{x}) ds \quad (I.2)$$

ここに、 c_{ijkl}^{-1} は c_{ijkl} の逆テンソルであり、 $u_i(\mathbf{x})$ は境界条件を満足することに注意する。したがって、 I の第一変分は以下ようになる。

$$\delta I = - \int_V \delta u_j (\sigma_{ij,i} + b_j) + \delta \sigma_{ij} (c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} - \epsilon_{ij}) ds$$

これから、式 (I.1) の支配方程式、 $(c_{ijkl} u_{k,l})_{,i} + b_j = 0$ が導かれる。

次に領域 V を Voronoi ブロックとその双対図形である Delaunay 三角形によって分割することを考える。そこで $u_i(\mathbf{x})$ 及び $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ を、各 Voronoi ブロックの上に立つ特性関数 $\{\phi^\alpha\}$ 及び各 Delaunay 三角形の上に立つ特性関数 $\{\psi^\alpha\}$ によって、以下のように離散化する。

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}) = \sum_\alpha u_i^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_\alpha \sigma_{ij}^\alpha \psi^\alpha(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (I.3)$$

式 (I.3) を式 (I.2) の I に代入すると、 $\partial I / \partial \sigma_{ij}^\alpha = 0$ から σ_{ij}^α が以下の形で得られる。

$$\sigma_{ij}^\alpha = \frac{1}{\Psi^\alpha} \sum_\beta c_{ijkl} B_k^{\beta\alpha} u_l^\beta$$

ここに、 Ψ^α は Delaunay 三角形の面積、 $B_i^{\alpha\beta}$ は式 (6) で与えられる。従って、外力 b_i を $b_i = \sum b_i^\alpha \phi^\alpha$ ように離散化すると、 $\{u_i^\alpha\}$ に対する以下のマトリクス方程式が $\partial I / \partial u_i^\alpha = 0$ より導かれる。

$$\sum_{\beta, \gamma} \frac{1}{\Psi^\gamma} (B_l^{\alpha\gamma} c_{ilmj} B_m^{\beta\gamma}) u_j^\beta = \Phi^\alpha b_i^\alpha \quad (I.4)$$

式 (I.4) の $\{u_i^\alpha\}$ に対するマトリクスは Voronoi 母点及び Delaunay 三角形がそれぞれ、節点及び要素と見なされるとき、三角形要素を用いる FEM の剛性マトリクスに一致する。

また、重ならない特性関数を用いるパーティクル離散化の枠組みは、連続体モデルと等価な剛体・バネモデルを与える。式 (I.4) のマトリクスは剛体としての Voronoi ブロック同士をつなぐバネを表しており、材料特性によって厳密に決定されるマトリクス成分は、バネ定数を与える。実際、 α 番目と β 番目の Voronoi ブロックをつないでいるバネに対して、 i 番目と j 番目の

変位成分に対応するバネ定数は、弾性マトリクス c_{ijkl} を用いて以下のように表現される。

$$K_{ij}^{\alpha\beta} = \sum_\gamma \frac{1}{\Psi^\gamma} B_k^{\alpha\gamma} c_{kimj} B_m^{\beta\gamma} \quad (I.5)$$

パーティクル離散化の枠組みの中では、1 つの Delaunay 三角形から平均ひずみを求めるのに 3 つの Voronoi ブロックが用いられるため、3 つのひずみ成分が 2 つの相対変位ベクトルの 4 つの成分から求められる。従って、通常の DEM とは異なり、バネ定数は厳密に材料特性から決定される。

参考文献

- 1) Keilis-Brook, V. I. and Soloviev, A. A.: *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction*, Springer-Verlag, 2003.
- 2) Scholz, C. H.: *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge university press, 2002.
- 3) Ben-Zion, Y. and Eneva, M. and Liu, Y.: Large earthquake cycles and intermittent criticality on heterogeneous faults due to evolving stress and seismicity, *Journal of Geophysical Research*, Vol.108, No. B6, 2307, 2003.
- 4) Ben-Zion, Y. and Rice, J. R.: Slip patterns and earthquake populations along different classes of faults in elastic solids, *Journal of Geophysical Research*, Vol.100, B7, pp.12959-12983, 1995.
- 5) Dahmen, K. and Ertas, D. and Ben-Zion, Y.: Gutenberg-Richter and characteristics earthquake behavior in simple mean-field models of heterogeneous faults, *Physical Review E*, Vol.58, Number 2, pp.1494-1501, 1998.
- 6) 小国健二, 堀宗朗, 阪口秀: 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 構造工学・地震工学論文集, Vol.766, I-68, pp.203-217, 2004.
- 7) 岩井俊英, 小国健二, 堀宗朗: FEM - β - 破壊現象の解析に適した FEM, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, I-68, pp.231-238, 2003.
- 8) 地震調査研究推進本部: <http://www.jishin.go.jp/main/>.

(2005 年 4 月 15 日 受付)

¹ 汎関数 $J(\mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} ds$ は、 u_i 及び $u_{i,j}$ にパーティクル離散化を適用することにより評価可能となる。つまり、Voronoi ブロックの特性関数によって離散化された u_i 及び Delaunay 三角形の特性関数によって離散化された $u_{i,j}$ をこの J に用いる。