

調和振動荷重による P-SV 波の地盤振動・波動伝播特性

Characteristics of P-SV Wave Propagation and Displacements
by Harmonic Point Load on The Ground Surface of Elastic-Layered Half-Space

原田隆典*, 王宏沢**, 齊藤将司**, 山下典彦***, 森源次****

Takanori Harada, Hongze Wang, Shouji Saitou, Norihiko Yamashita, Genji Mori

* 工博, 宮崎大学教授, 工学部土木環境工学科 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

** 宮崎大学大学院学生, 工学研究科システム工学専攻 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

*** 工博 神戸市立工業高等専門学校、助教授、都市工学科 (〒651-2194 神戸市西区学園東町 8-3)

**** 古野電気株式会社 船用機器事業部, 主幹技師 (〒662-8580 兵庫県西宮市芦原町 9-52)

Elastic waves generated by a controlled dynamic load applied on the surface of soil deposits yield useful tools for non destructive testing of the systems to determine the elastic properties of the soils and their variation with depth. A number of methods for the non destructive testing have been developed and are being used in practice. The objective of this paper is to examine some of the basic concepts related to P-SV wave propagation in layered media and their dynamic response due to the vertical harmonic point load applied on the soil surface. A proper understandings of these concepts is necessary for a correct interpretation of the field data and for improving the accuracy of the estimation of the soil properties at low strain values by using the spectral analysis of surface waves or the Rayleigh wave method.

Key Words: Rayleigh wave, wave propagation, layered soil deposit, dynamic load, phase velocity, dynamic response of soil deposit, non destructive testing.

1. まえがき

地盤の地表面に動的荷重を作用させた時に生じる弾性波は、地盤の弾性定数とそれらの深さ方向の分布を決めるための有用な情報を与えてくれる。このような弾性波を使った地盤構造(弾性定数とその分布特性)の推定方法は数多く提案され実務に利用されている¹⁾。

これらの中で、地表面の1地点に鉛直方向の衝撃荷重または調和振動荷重を作用させ、地表面上に設置した2つの観測点から計測される弾性波の位相速度並びに、レイリー波の分散曲線と地盤構造の理論的關係を使って地盤構造を推定する方法は、表面波のスペクトル解析法またはレイリー波法と呼ばれ、1960年代に開発された方法である²⁾。その後、1980年代に表面波のスペクトル解析法の理論的精緻化や実測データの解釈を通じ、この方法による地盤構造の推定精度向上に関する研究が活発化する^{3), 4)}。

しかしこれらの研究では、地表面の観測波形をレイリー波モードの重ね合わせによって解釈しているため、加振点から遠くの観測点を利用するという制約が課せられ、観測ノイズと加振力の増大や観測点数の増加をもたらす、簡便で高精度な地盤構造推定に関して課題が残されている。

そこで本論文では、表面波のスペクトル解析法による地盤構造の簡便かつ的確な推定法の確立を目的に、地表面に調和振動

荷重を作用させたときに地表面の2地点間で観測される位相速度や地盤振動特性がどのような特性を持っているのかという基礎的事項を理論的な数値計算によって調べ、観測される位相速度並びに、レイリー波の分散曲線と地盤構造の理論的關係を明らかにする。数値計算には、原田ら⁵⁾が開発した剛性マトリクスによる水平成層地盤の波動場解析法を用いる。この解析法はP-SV波問題における波動場を厳密に再現するものである。

2. 剛性マトリクスによる水平成層地盤の波動解析法

本研究で用いる波動場解析法は、よく知られた方法ではないので、ここにその概要を整理しておくこととする。この方法は、地震波動場または弾性波動場を解析する方法の一つとして、運動学的断層モデルと組み合わせた地震波動解析や各層の境界上に単位面積あたりの外力を作用させたときの地盤振動解析に用いることができる⁵⁾。剛性マトリクスの考え方が構造工学分野で馴染み深いこともあり、工学分野の研究者や技術者にとって取っ付き易く、扱い易いという側面や、コンピュータの記憶容量と計算速度の性能アップにより工学問題に対する魅力的な道具であり発展性があると思われる。

ここでは、P-SV波問題を対象に図-1に示すような半無限地盤を含む n 層から成る水平成層地盤(簡単のため4層とする)

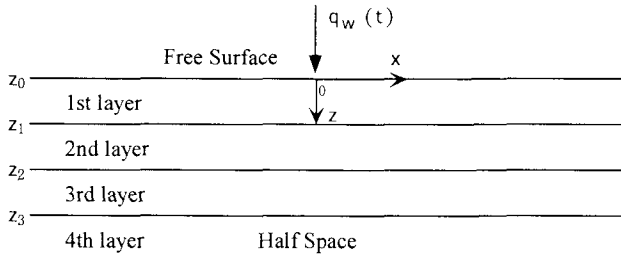


図-1 P-SV 波問題における半無限地盤を含む
4層水平成層地盤モデル

$$u(x, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\kappa, z, \omega) e^{i[\kappa x - \omega t]} d\kappa d\omega \quad (1)$$

の地表面に鉛直方向の外力が作用するときの2次元直交座標系 ($x-z$) における定式化を示すものとする。深さ z 、水平距離 x 点の時刻 t における変位は、式(1)のような波数 κ と振動数 ω に関する2重フーリエ積分によって求められる。ここに、 $x-z$ 軸方向の変位 u, w をまとめて、変位ベクトル u として表現している。上式の振動数-波数領域での変位ベクトル $u(\kappa, z, \omega)$ は、次式の剛性方程式 (連立1次方程式) を解いて求めることができる。

$$\begin{pmatrix} q(z_0) \\ q(z_1) \\ q(z_2) \\ q(z_3) \end{pmatrix} = \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} + K_{Half} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z_0) \\ u(z_1) \\ u(z_2) \\ u(z_3) \end{pmatrix}$$

ここに、 $u(z) = u(\kappa, z, \omega)$ と簡略化して表現している。 $K_{ij}^{(n)}$ と K_{Half} は第 n 層と半無限地盤の剛性マトリックスを表す。上式の右辺第1項が図-1のような全体系の剛性マトリックスを表しているが、これは第 n 層の剛性マトリックスを重ね合わせの原理に従って組み立てることにより求められる。また、上式左辺は振動数-波数領域での外力項で、 $q(z_n)$ は、深さ z_n の層境界に作用する単位面積あたりの外力 (応力) ベクトルを表す。

図-1のように地表面 z_0 上の $x=0$ の点に鉛直方向のみに振動数 ω_0 の調和振動外力が作用する場合には、外力項は次式のように与えられる⁶⁾。

$$\begin{aligned} q(z_1) &= q(z_2) = q(z_3) = 0 \\ q(z_0) &= \left(0, i q_0 \delta(\omega - \omega_0) \right)^T \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 q_0 は鉛直方向の外力 (応力) の振幅を、 δ はデルタ関数を表す。

表面波 (P-SV 波問題のレイリー波) の位相速度 c と振動数の関係 (分散曲線) は、式(2)の左辺の外力項を全て零とし、零でない変位ベクトル $u(z) = u(\kappa, z, \omega)$ が存在するための条件から、式(2)右辺第1項の全体剛性マトリックスの行列式が零となるような波数 $\kappa = \omega/c$ と振動数 ω の組み合わせとして求められる。

3. 水平成層地盤の波動解析の検証例

3. 1 半無限地盤において鉛直方向に集中外力が作用するときの地表面変位波形の計算例

半無限地盤地表面に鉛直方向の集中荷重が作用するときの地表面の振動問題は、Lamb(1904)⁷⁾の問題としてよく知られているが、剛性マトリックス法によって計算した振動源から5km地点の半径方向 (水平方向) と鉛直方向の変位波形を図-2(b)に示す (荷重の振幅 q_0 とせん断弾性剛性 μ で規準化している)。半無限地盤モデルと物性値は図-2(a)のようになる。

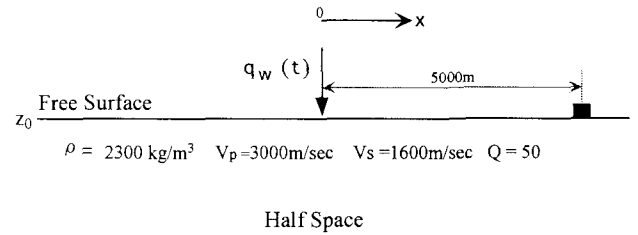


図-2(a) 半無限地盤モデル

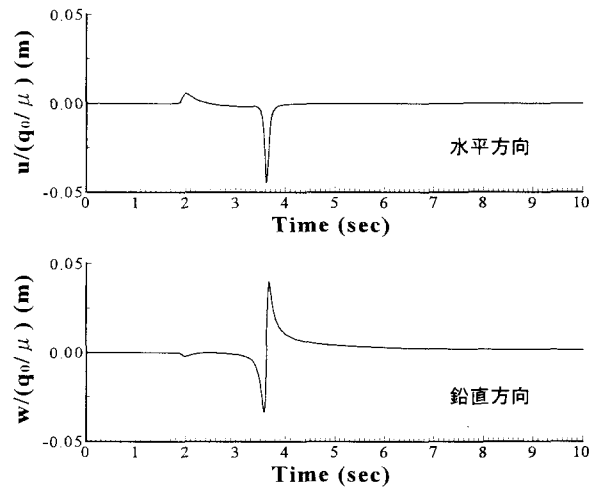


図-2(b) 荷重点から5km地点の地表面の水平成分と鉛直成分の変位波形

この場合、レイリー波の位相速度は約1424m/secとなる。単位面積当りの鉛直集中荷重は、次式で表されるような周期0.1秒ぐらいの狭帯域のガウスタイプのパルス関数とした。

$$q_w(t) = q_0 \exp[-1000(t - \tau)^2] \quad (\tau = 0.25 \text{ sec})$$

図-2(b)では、P波が約1.7秒、振幅の大きいレイリー波は約3.5秒に到達しているのが読み取れるが、S波に関しては、理論的には3.125秒(5/1.6)で到達するが、振幅の大きいレイリー波の理論的到達時刻3.511秒(5/1.424)と近いこともあり、はっきりと到達時間を読み取れないもののP波、S波、レイリー波の特徴が読み取れる。

3. 2 多層地盤におけるレイリー波の分散曲線の計算例

反射・透過行列法によってレイリー波の位相速度と振動数の関係(分散曲線)を計算したChen(1993)⁸⁾の結果と剛性マトリックス法による結果を比較すると、図-3が得られる。なお、地盤構造やその物性値に関しては、表-1で示すように、3層の水平成層地盤を仮定している。

図-3から両者は完全に一致しており、剛性マトリックス法の妥当性が確認できる。

表-1 地盤の物性値

物性値	厚さ (m)	密度 (kg/m ³)	P波速度 (m/sec)	S波速度 (m/sec)
1層	6000	2800	6000	3500
2層	6000	2900	6300	3650
3層	18000	3100	6700	3100
半無限地盤	—	3300	8200	3300

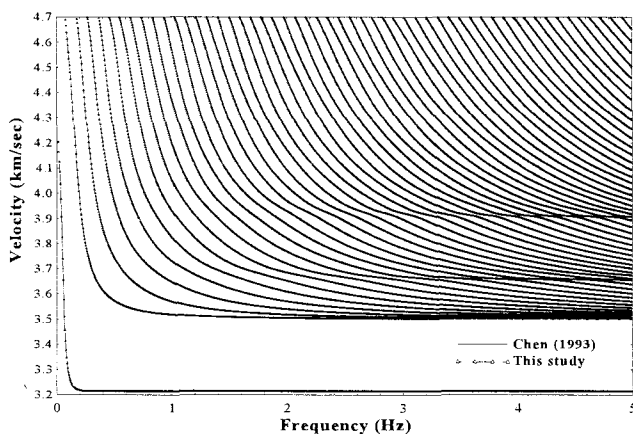


図-3 剛性マトリックス法と反射・透過行列法(Chen 1993)⁸⁾から求めた多層地盤におけるレイリー波の分散曲線

4. 鉛直方向の調和振動荷重による水平成層地盤の振動・波動伝播特性

剛性マトリックスによる水平成層地盤のP-SV波問題の解析法を第2章で紹介し、波動に関する基礎的問題(パルス外力による地盤振動問題と表面波の分散曲線問題)に対する数値計

算例を第3章で示した。この章では、地表面に鉛直方向の調和振動荷重を作用させたときに地表面で観測される位相速度から地盤構造を的確に推定する方法に応用することを目的に、地盤振動・波動伝播特性、レイリー波の分散曲線と地盤構造の関係など、調和振動荷重によるP-SV波の伝播と地盤振動特性を調べる。

4. 1 数値計算用地盤モデルと調和振動荷重による地表面の変位応答に関する基礎式

数値計算用地盤モデルとしては、図-4で示すような半無限地盤上に約6mの表層地盤が存在する1層地盤系を想定した。鉛直方向の単位面積当りの荷重は、図-4に示すような振幅 q_0 、振動数 ω の調和振動荷重とした。

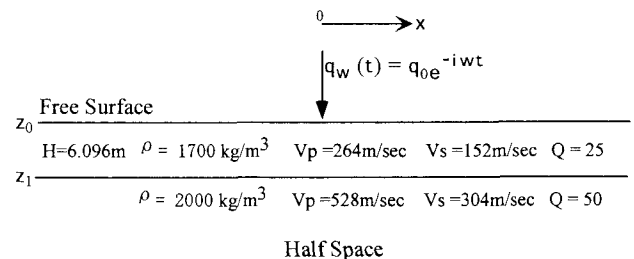


図-4 調和振動荷重が地表面に作用する1層の水平成層地盤モデル

調和振動荷重による地表面の変位 $u(x, t) = u(x, z_0 = 0, t)$ は、次式のように地表面変位の振動数一波数スペクトル $u(z_0 = 0) = u(\kappa, \omega)$ のフーリエ積分から求められる地表変位の伝達関数 $u(x, \omega)$ に調和振動外力を掛けて求められる。

$$u(x, t) = q_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\kappa, \omega) e^{i\kappa x} d\kappa \quad (4)$$

$$= q_0 e^{-i\omega t} u(x, \omega)$$

この数値計算例では、地表面に鉛直方向の外力 q_w のみ作用させているため、ここでは主に、鉛直方向の地表面変位 $w(x, t)$ を対象に考察することとする。

式(4)から得られる鉛直方向の地盤の伝達関数 $w(x, \omega)$ は複素数(実数部Rと虚数部I)であるので、式(5)のように表現することができる。

$$w(x, \omega) = R[w(x, \omega)] + iI[w(x, \omega)] = |w(x, \omega)| e^{i\theta(x, \omega)} \quad (5)$$

ここに、

$$|w(x, \omega)| = \sqrt{R^2[w(x, \omega)] + I^2[w(x, \omega)]}$$

$$\theta(x, \omega) = \tan^{-1} \left(\frac{I[w(x, \omega)]}{R[w(x, \omega)]} \right)$$

したがって、地表面の鉛直方向変位 $w(x, t)$ は、式(5)を式(4)に

代入して次式のように表すことができる。

$$w(x, t) = q_0 |w(x, \omega)| e^{-j\omega \left[t - \frac{\theta(x, \omega)}{\omega} \right]} \quad (6)$$

ここで、式(6)の位相角が一定である点の移動する速さは位相速度 $c(x, \omega)$ と呼ばれる。すなわち、

$$\omega t - \theta(x, \omega) = \text{constant} \quad (7)$$

式(7)の両辺を t について微分すると、

$$\omega - \frac{d\theta(x, \omega)}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (8)$$

式(8)より、

$$\frac{dx}{dt} = c(x, \omega) = \frac{\omega}{\frac{d\theta(x, \omega)}{dx}} \quad (9a)$$

または、

$$c(x, \omega) = \frac{2\Delta x \cdot \omega}{\theta(x + \Delta x, \omega) - \theta(x - \Delta x, \omega)} \quad (9b)$$

式(9)の中央差分のイメージ図は図-5 に示すようなものとなる。

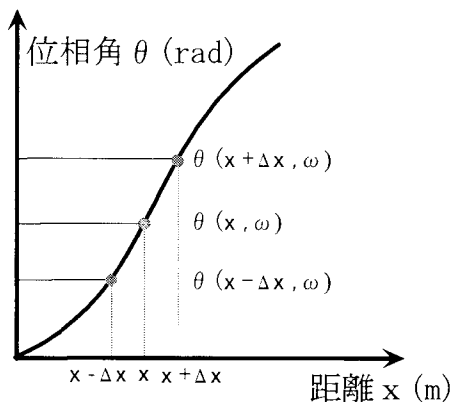


図-5 離散化された距離 X と位相角の説明図

4. 2 伝達関数と位相角の特性

ここでは、地表面鉛直方向の振動数-波数スペクトル $w(\kappa, \omega)$ をフーリエ積分して求めた式(5)または式(6)の地盤の伝達関数 $|w(x, \omega)|$ とその位相角 $\theta(x, \omega)$ の特性を示す。

図-6(a)と(b)は、加振点からの距離 $x = 0 \sim 100\text{m}$ 、振動数 $(\omega = 2\pi f) f = 1 \sim 100\text{Hz}$ の範囲における地盤の伝達関数 $|w(x, \omega)|$ を3次元鳥瞰図と2次元等高線図で示したものである。同様に、式(6)を参照し、位相角 $\theta(x, \omega)$ を振動数 ω で除した $\theta(x, \omega)/\omega$ の特性を図-7(a)と(b)に示す(両座標の表示範囲は1-50Hzと0-50mとする)。図-6と図-7の3次元鳥瞰図の高さと2次元等高線図のカラーレジェンドは伝達関数の絶対

値の振幅と位相の大きさを表す(2次元等高線図は振幅最大値で基準化したもの)。

図-6(a)と(b)に示す地盤の伝達関数 $|w(x, \omega)|$ から、約10Hzに地盤の振幅が大きく増幅される地盤の卓越振動数(地盤の1次固有振動数)が確認できる。しかし、高次の固有振動数については、場所 x によって多少変化している。このことをもう少し定量的に見るために、 $x = 5\text{m}, 10\text{m}, 20\text{m}$ の3地点の地盤伝達関数 $|w(x, \omega)|$ の振動数特性を図-8に、また、 $f = 5\text{Hz}, 10\text{Hz}, 15\text{Hz}$ における伝達関数の場所 x による変化を図-10に示している。

振動数で規準化した位相角 $\theta(x, \omega)/\omega$ は、図-7(a)と(b)に示すように、加振点からの距離 x とともになめらかに増加している。振動数が1Hz～約6Hzまでは、単調に減少し、約6Hzを超えとなめらかに増加し始め、約15Hz付近からはほぼ一定値を保つというように、地盤の卓越振動数(約10Hz)の前後(約6Hz、約15Hz)を境にして振動数特性が変化している。このことを定量的に見るために、 $x = 5\text{m}, 10\text{m}, 20\text{m}$ の3地点の位相角 $\theta(x, \omega)/\omega$ の振動数特性を図-9に、また、 $f = 5\text{Hz}, 10\text{Hz}, 15\text{Hz}$ における位相角 $\theta(x, \omega)/\omega$ の場所 x における変化の様子を図-11に示す。図-11から位相角は距離 x に比例する直線として近似する場合、卓越振動数(約10Hz)以下ではその近似が悪くなるように見える。位相角の距離 x に関する微分は、位相速度に関係するので(式(9a)参考)、位相角が距離 x に比例する直線の場合、一定の位相速度が求められるが、この位相速度の特性については次節で考察する。

4. 3 位相速度の特性

ここでは、式(9b)から位相速度(差分間隔 $\Delta x = 1\text{m}$ とする)を求め、加振点からの距離 x と加振振動数による位相速度の変化の様子や位相速度とレイリー波の分散曲線の関係を調べる。

図-12(a)と(b)は、位相速度 $c(x, \omega)$ の振動数(1-50Hz)と場所(1-50m)における変化の様子を3次元鳥瞰図と等高線図によって示したものである。3次元鳥瞰図の高さ方向と等高線のカラーレジェンドは位相速度の大きさを表す。

位相速度は加振振動数のみならず、加振点からの距離によって変化していること、その変化の様子はなめらかな山谷が連なる波状に見える。ただし、地盤の卓越振動数(約10Hz)より低振動数領域における位相速度の場所 x による変化の様子は少し異なっているように見える。

このような位相速度の変化の様子を定量的に見るために、 $x = 5\text{m}, 10\text{m}, 20\text{m}$ における位相速度の振動数特性を図-13にプロットした。また、図-13には、レイリー波の位相速度の振動数特性(分散曲線)を点線で示している。レイリー波の1次モードに対する分散曲線と3地点毎の位相速度の振動数特性は近いようで遠くない。特に地盤の卓越振動数(約10Hz)より低振動数領域での一致が悪い。

図-14 は、 $f = 5\text{Hz}, 10\text{Hz}, 15\text{Hz}$ における位相速度の場所 x による変化とレイリー波の位相速度をプロットしたものである。 $f = 10\text{Hz}, 15\text{Hz}$ での位相速度は、 $x = 10\text{m}$ より遠くでは、1 次モードのレイリー波の位相速度に近いように見えるものの、一致度はあまりよくない。 $f = 5\text{Hz}$ での位相速度とレイリー波速度は大きく違っている。

図-12～図-14 に示した位相速度とレイリー波の位相速度との複雑な関係の原因は、加振点近傍では、P 波、S 波、レイ

リー波が混雑した波動場であることによるものと考えられる。このため、加振点からの距離 x を 1000m まで広げてレイリー波の波長の数 10 倍の距離スケールで位相角 $\theta(x, \omega)/\omega$ の変化を観測すると、図-15 の実線のようにになる。この図には振動数毎に定まる 1 次と 2 次のレイリー波の位相速度に対応する位相角 $\theta(x, \omega)/\omega$ の直線の傾きを点線で示している。図-15 より、レイリー波の波長の数 10 倍の距離スケールで観測すると、レイリー波の位相速度が見えてくることがわかる。

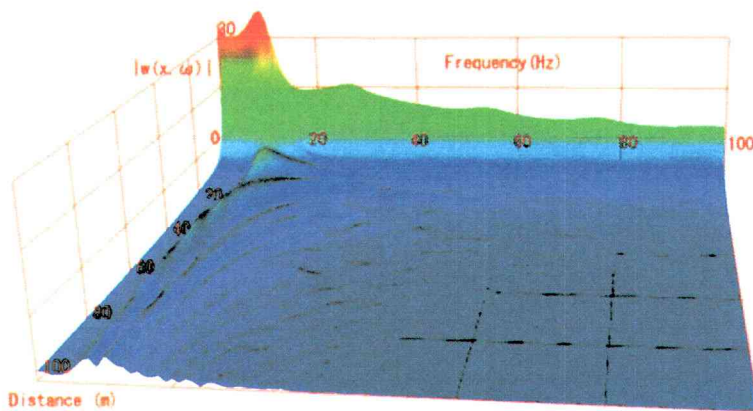


図-6(a) 地盤の伝達関数の 3 次元鳥瞰図

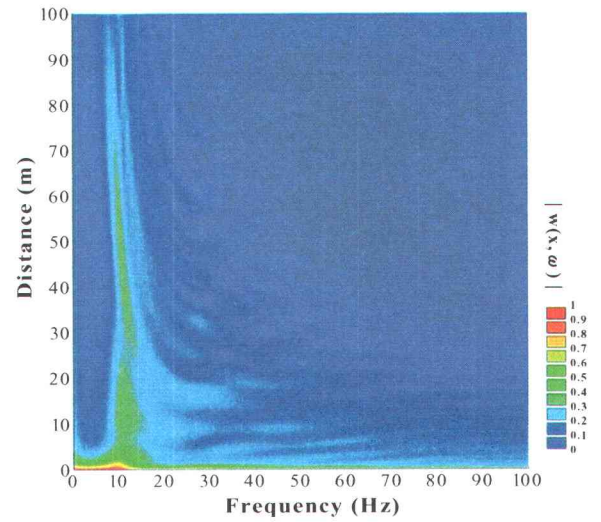


図-6(b) 地盤の伝達関数の 2 次元等高線図

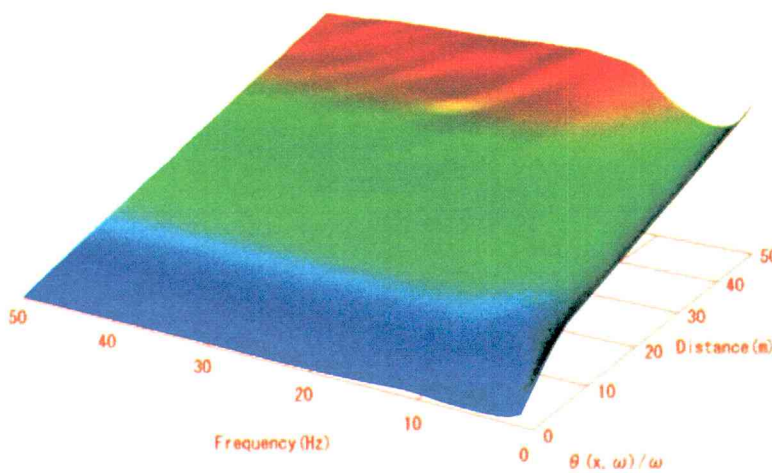


図-7(a) 振動数で規準化した地盤の位相角の 3 次元鳥瞰図

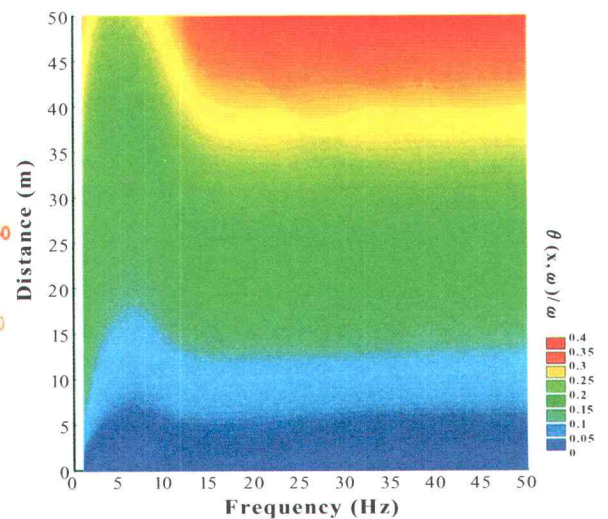


図-7(b) 振動数で規準化した地盤の位相角の 2 次元等高線図

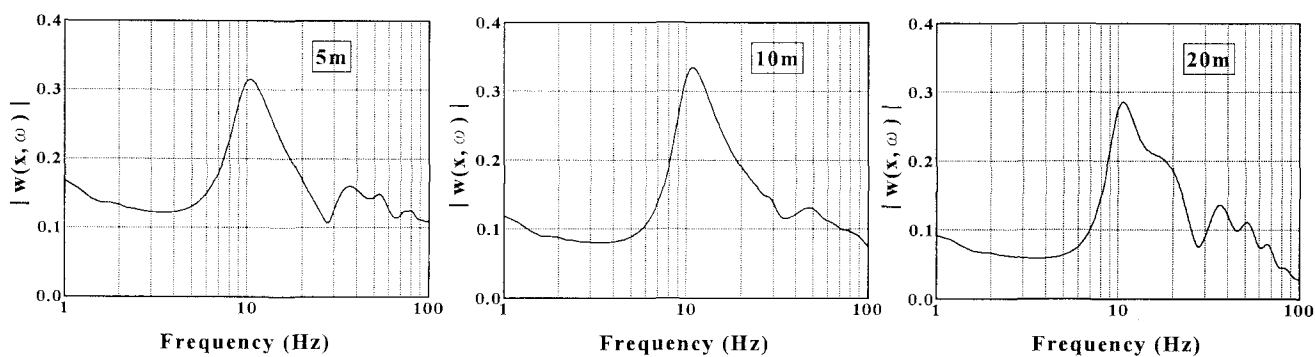


図-8 5m、10m、20mの地点における地盤の伝達関数の分布

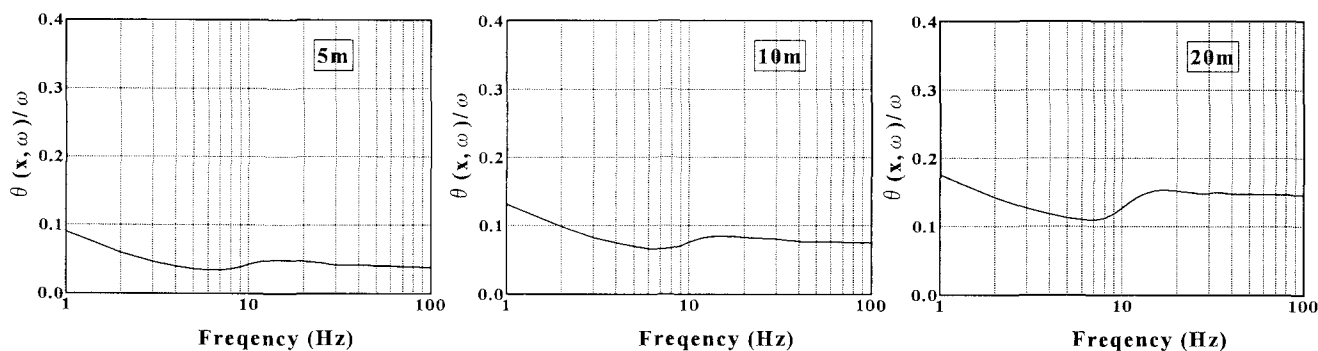


図-9 5m、10m、20mの地点における地盤の位相角の振動数特性

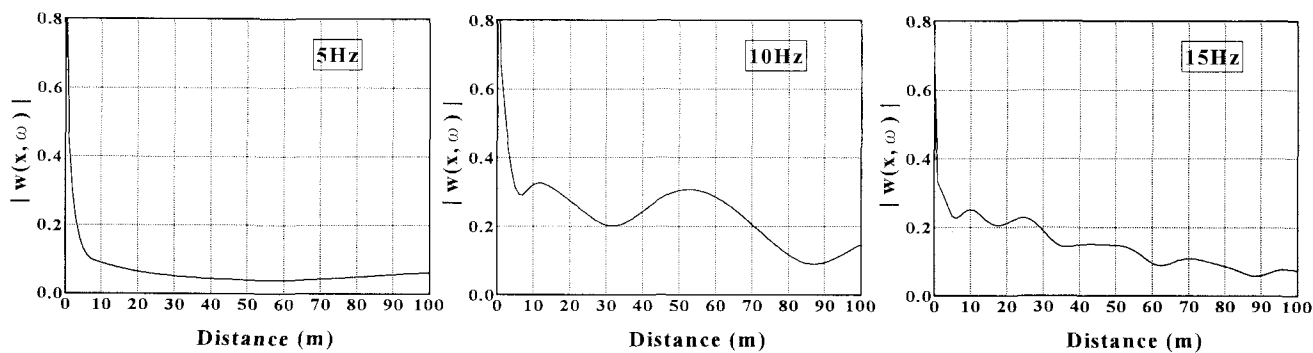


図-10 調和振動数 5Hz、10Hz、15Hz を固定したときの地盤の伝達関数

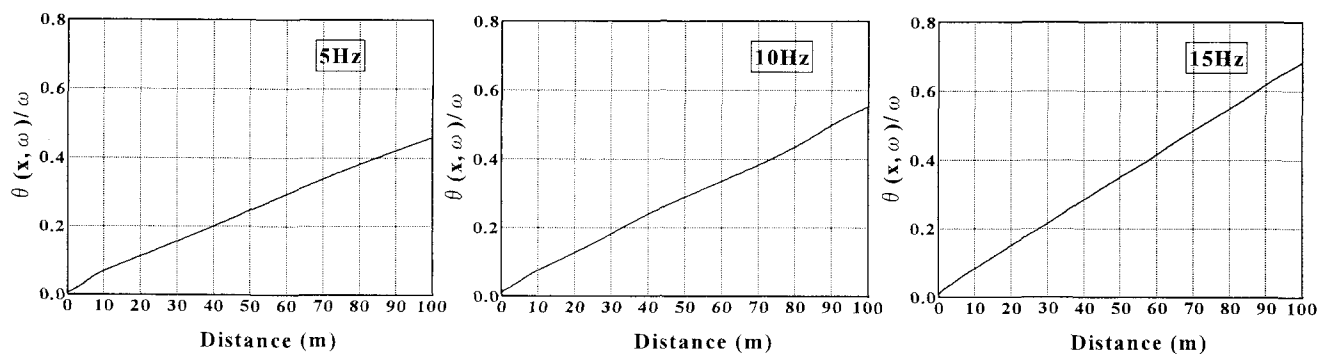


図-11 調和振動数 5Hz、10Hz、15Hz を固定したときの地盤の位相角の場所的変化

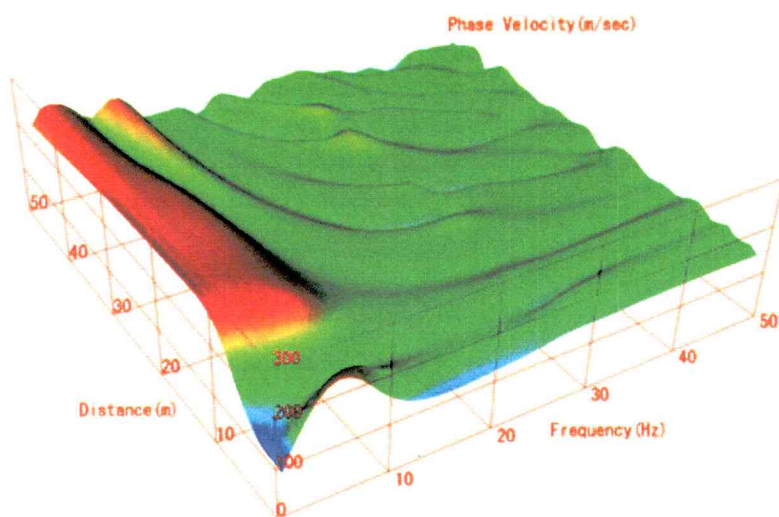


図-12(a) 位相速度の3次元鳥瞰図

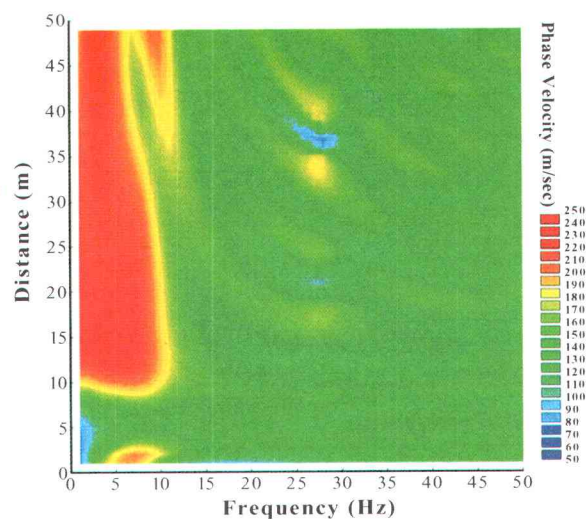


図-12(b) 位相速度の2次元等高線図

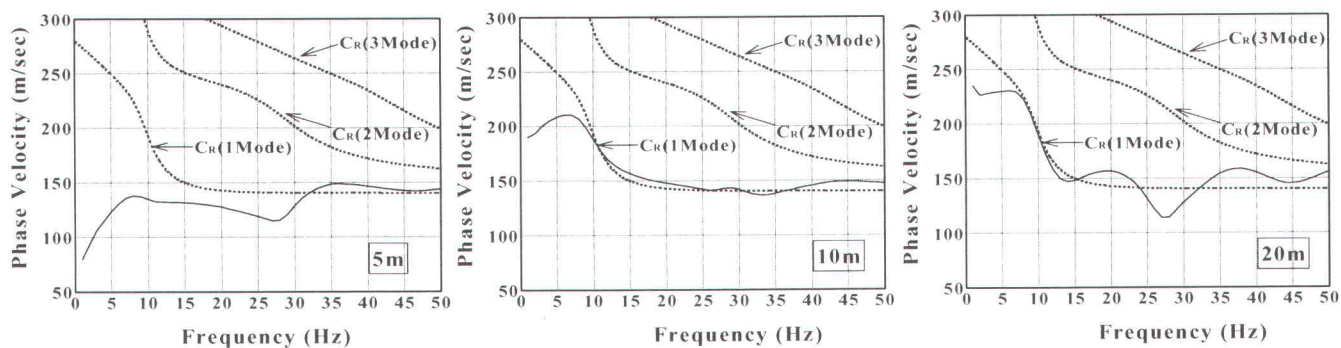


図-13 5m、10m、20m 地点の位相速度とレイリー波速度の振動数特性

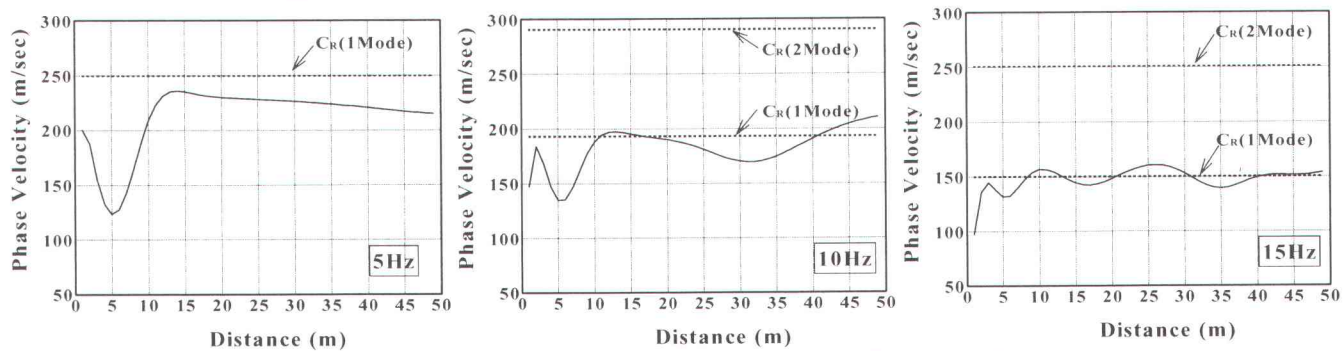


図-14 振動数 5Hz、10Hz、15Hz における近距離域の位相速度の場所的変化

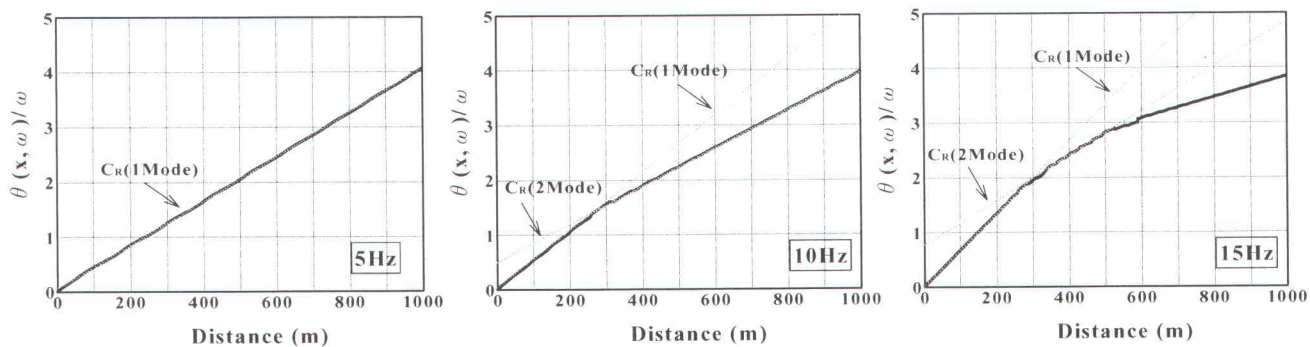


図-15 振動数 5Hz、10Hz、15Hz における遠距離域の位相角とレイリー波速度による位相角の関係

5. まとめと課題

本論文では、表面波のスペクトル解析法による地盤構造の簡便かつ的確な推定法の確立を目的として、地表面に鉛直方向の調和振動荷重を作用させたときに地表面の2地点間で観測される位相速度の特性や、地盤振動特性を厳密な数値計算法によって調べた。

その結果、地盤の固有振動数による地表面の各地点の増幅特性と波動伝播特性が複雑に関係して、地表面の応答変位が出現しているため、2地点間で観測される位相速度の加振点からの距離 x と加振振動数 ω による変化は複雑であることがわかった。このような位相速度の複雑な特性もレイリー波の波長の数10倍の距離スケールで観測すると、レイリー波の分散曲線と一致することがわかった。

本論文で示した位相速度の場所と振動数による複雑な変動特性並びに、地盤の振動応答特性を利用し、地盤構造を推定するためには、これらの理論的に求められる地盤の波動・振動特性によって実測データを解釈しながら、計測や理論に関わる各種のパラメータを整理することが今後の課題である。

参考文献

- 1) 物理探査学会編, 物理探査ハンドブック, 第1章-第4章, 物理探査学会, 1998年
- 2) Fry, Z. B., A procedure for determining elastic moduli of soils by field vibratory technique, *U.S. Army Engineer Waterway Experiment Station*, Miscellaneous Paper 4, 1963.
- 3) Heisey J.S., Stokoe II K.H., Hudson W.R., Meyer A.H. Determination of in situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves, Research Report No. 256-2, *Center for Transportation Research*, The University of Texas, 1982.
- 4) Nazarian S., Stokoe II K.H., In situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves, *Proc. of the 8th Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, Vol. 3, pp.38-45, 1984.
- 5) 原田隆典, 王宏沢, 剛性マトリックスによる水平成層地盤の波動解析, 地震, 第57巻, pp.387-392, 2005.
- 6) 原田隆典, 大角恒雄, 奥倉英世, 3次元直交座標系における波動場の解析解とその地震動波形作成への応用, 土木学会論文集, No. 612/I-46, pp. 99-108, 1999.
- 7) Lamb, H., On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, *Phi. Trans. Roy. Soc., London*, A203, pp.1-42, 1904.
- 8) Chen, X., A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half space, *Geophys. J. Int.*, Vol. 115, pp.391-409, 1993.

(2005年4月15日受付)