

スペクトル確率手法による構造動的解析における入力波の 位相不確定性の影響評価法

A method to estimate the effect of the phase uncertainty of input motions on structural dynamic analysis
by spectral stochastic approach

本田利器*・村上裕宣**
Riki HONDA and Hironobu MURAKAMI

*正会員 工博 京都大学防災研究所 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**正会員 工修 中央復建コンサルタンツ株式会社 (〒533-0033 大阪市東淀川区東中島 4-11-10)

The present paper proposes an application of spectral stochastic approach to dynamic analysis of stochastic structures in the presence of phase uncertainty of input motions. An analytical expression of the expectation value of the product of complex exponential and polynomial chaos. This allows efficient computation of the projection of the function to the homogeneous chaos space. Efficiency of the proposed scheme is discussed based on the comparison with the results obtained by Monte Carlo Simulation. It is found that the proposed method exhibits good performance even when variety of uncertainty amplitude and structural parameters are assumed.

Key Words : spectral stochastic approach, uncertainty, phase, structural parameter

1. はじめに

1.1 背景

合理的な地震対策や耐震設計を行うためには、地震動や構造物の地震時挙動を精度良く評価することが重要となる。しかし、地震動や構造物の挙動に影響を及ぼす要素の多くが不確定性を含み、そのほとんどが事実上計測不可能である。そのため、地震動シミュレーションや地震時の構造物の応答を正確に評価することは非常に困難である。例えば、震源での地震発生メカニズムに関わる様々な震源パラメータは不確定性が大きく、地震波の伝播媒体である地盤の物性は不均質性を有する。また、構造物も物性パラメータに多くの不均質性／不確定性を有している。これらの物性値やパラメータの「真値」を調査することは、技術的にも経済的にも非常に困難である。

近年の計算機性能や計算技術の発達により、高精度な解析が可能となってきたが、むしろそれゆえに、様々な各パラメータの呈する不確定性による影響を考慮することの重要性は大きくなっている。したがって、不確定性を合理的かつ定量的に考慮した検討が重要となる。

不確定性を定量的に考慮する数値解析法としては、モンテカルロシミュレーションが挙げられる。この手法は、多数のシミュレーションを行うことで、より真値に近い結果を算出することが可能である。しかし、大量の計算を必要とするため、実用性の面から、より効率的な手法も求められている。

1.2 目的

上述したような背景から、入力および系が不確定性を有する非線形問題の効率的な解析手法の重要性が分かる。筆者らは、不確定性を合理的かつ定量的に扱う

手法として、本研究では、Ghanem and Spanos¹⁾の提案したスペクトル確率手法を用いたアプローチを試みてきている。この手法は、不確定性を有する支配方程式の、有限次の確率空間 (Homogeneous Chaos) 上での最良近似を与える解を求めるものである。スペクトル確率手法は、モンテカルロシミュレーションよりもはるかに計算量が少ない。また、比較的大きいばらつきを有する問題に対しても安定的な解析が可能であり、解の確率密度関数を容易に評価することが可能であるといった利点も持つ。

本研究では、周波数領域での解析が困難な非線形問題への適用も視野にいれ、この手法を、不確定性を有する構造系の動的解析の時間領域での定式化に適用する。その上で、入力地震動の不確定性の影響を考慮するため、時間周波数特性を考慮するうえで重要な位相の不確定性を効率的に扱う手法を提案する。一般に、位相とは、フーリエ変換の偏角として定義される位相を用いることが多い。しかし、入力の時間周波数特性が非線形応答に大きな影響を与えることを踏まえ、ここでは、時系列信号等の時間周波数解析に広く用いられるようになってきているウェーブレット変換を用いた定式化を用いる。ただし、その計算手順はフーリエ変換による場合と同じである。したがって、本論文の成果は、フーリエ変換で定義される位相の不確定性を考慮する問題にもそのまま適用することができる。

1.3 既往の研究

不確定性を確率的に変化するものとして効率的に扱う方法として、様々な手法が提案されている。例えば、Yamazaki ら³⁾、Vanmarcke and Grigoriu⁴⁾および Spanos ら⁵⁾などの研究がある。しかし、Yamazaki ら³⁾や Spanos ら⁵⁾のように、Neumann 展開を用いて解を得る手法で

は、展開が収束する範囲が比較的狭く計算が不安定となる等の指摘⁶⁾もあり、実際の問題への適用が困難な面もある。本研究で用いるスペクトル確率手法は、これらの手法に比べ比較的大きな不確定性に対しても安定的な解析が可能である。Ghanem ら⁷⁾や Anders and Hori^{8),9)}により静的問題へ適用されている。本田ら^{10),11)}は動的問題へも適用しているが、これらの検討においては入力の不確定性は想定されていない。

入力の不確定な問題を対象とした非線形動的解析も行われている^{12),13)}。例えば、Micaletti ら¹³⁾は、入力の不確定性として包絡関数の不確定性を考慮している。しかし、これらをはじめとする研究の多くは、マルコフ性を有する入力を想定している。この場合、地震波の非常に重要な特性である周波数特性についての条件設定ができない。したがって、時間周波数特性を考慮した上での不確定性を考慮するという現実性のある問題への適用性が不十分である。例えば、周波数特性を考慮するためには、フーリエ変換等を用いることは不可欠であり、その場合には、位相や振幅のスペクトル特性の不確定性について考慮することが必要になる。本論ではこのための方法論について提案する。

2. スペクトル確率手法

本研究では、構造系の不確定性を定量的に考慮する効率的な方法として、Ghanem and Spanos らの提案したスペクトル確率手法¹⁾を用いる。以下にその概要を述べる。

2.1 確率過程の表現

本研究では、構造系を構成する様々なパラメタが不確定性を有する問題を取り扱う。この不確定性を有するパラメタは、確率変数として扱うこととする。例えば、剛性 $k(\theta)$ がガウス確率過程である場合を考える。 θ は確率空間における事象を表す。剛性 $k(\theta)$ を次式のように表す。

$$k(\theta) = k_0 + k_1 \xi(\theta) \quad (1)$$

$$k_1 = \gamma k_0 \quad (2)$$

ここで、 k_0 は剛性の期待値であり、 γ はばらつきの大きさを表すパラメタである。 $\xi(\theta)$ はガウス確率変数である。(以下では簡単のため、原則として引数の θ は省略する。)

しかし、系の不確定性をガウス確率過程と仮定した場合でも、得られる解はガウス確率過程であるとは限らない。そこで、本手法においては、解をガウス確率変数を引数とする Hermite 多項式汎関数 (Polynomial Chaos, 以下、PC 汎関数。)を用いて展開 (Polynomial Chaos 展開, 以下、PC 展開。)した形で求める。一般に、複数のガウス確率変数を引数とする PC 汎関数を

用いて PC 展開された解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(\xi_{i_1}, \dots) = & a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma_n(\cdot)$ が n 次の PC 汎関数であり、括弧内には、その汎関数の引数として用いたガウス確率変数の種類および数を示している。この $\Gamma_n(\cdot)$ の張る空間が n 次の Homogeneous Chaos (以下、HC 空間。)となり、 $\Gamma_n(\cdot)$ はその空間の直交基底を構成する。一般に、 n 次の PC 汎関数は次式の形で与えられる。

$$\Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) = e^{\frac{1}{2} \xi^T \xi} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2} \xi^T \xi} \quad (4)$$

ただし、 ξ は

$$\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})^T \quad (5)$$

で表される n 次元のベクトルであり、 n 次の PC 汎関数の引数として用いられるガウス確率変数の取り得るすべての組み合わせを表す。この場合、 ξ_i は期待値は 0 であり、次式で表される直交性を有する。

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (6)$$

δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $\langle \cdot \rangle$ は期待値を表す。例として、引数が 1 変数のときの PC 汎関数を 3 次まで示す。

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 \\ \Gamma_1(\xi) &= \xi \\ \Gamma_2(\xi, \xi) &= \xi^2 - 1 \\ \Gamma_3(\xi, \xi, \xi) &= \xi^3 - 3\xi \end{aligned} \quad (7)$$

HC 空間を無限大の次数まで考えるとき、任意の 2 次確率過程は PC 展開された形で表すことができる。しかしながら、後述するとおり、実際の計算においては考慮する HC 空間の次数を有限次とするため、解を、有限次の HC 空間上において近似的に求めることとなる。

以下、簡単のため、Ghanem and Spanos¹⁾にならい、係数 a および PC 汎関数 $\Gamma_p(\cdot)$ に順に番号を与え、それぞれ、 u_i 及び $\Psi_i[\{\xi\}]$ と表すものとする。ここで、 $\{\xi\}$ は必要な数の確率変数 $\xi_i(\theta)$ の集合を表す。これにより、式 (3) は

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\{\xi\}] \quad (8)$$

と表される。なお、この PC 汎関数は Hermite 多項式汎関数であり、その期待値は、第 0 次項以外は 0 である。すなわち

$$\langle \Psi_i[\{\xi\}] \rangle = 0, \quad (i \neq 0) \quad (9)$$

また、次式で示される直交性を有する。

$$\langle \Psi_i[\{\xi\}] \Psi_j[\{\xi\}] \rangle = 0, \quad (i \neq j) \quad (10)$$

実際の計算においては、式 (8) において展開の和を無限大までとることが不可能である。したがって、PC 展開の展開次数は有限とする。このとき、式 (8) は

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{N_{PC}} u_i \Psi_i[\{\xi\}] \quad (11)$$

と表される。ただし、 N_{HC} は考慮する HC 空間の次数であり、 N_{PC} は対応する (0 次の定数関数を除く) PC 汎関数の項数である。これは、解を、考慮する有限次数の HC 空間に属する確率過程として近似的に表現することを意味する。

以下に、本定式化における N_{HC} と N_{PC} の対応関係を示す。PC 汎関数の引数が ξ のみの場合、式 (7) のように、各 HC 空間に対応する PC 汎関数はひとつずつとなる。したがって、系の不確定性としてひとつの要素 (ここでは剛性) のみを考慮した場合、考慮する HC 空間の次数 N_{HC} と、対応する PC 汎関数の項数 N_{PC} は一致する。

本研究では、系に加えて入力波も不確定性を有する問題を扱う。この入力波の不確定性は、系の不確定性とは独立なものであるため、系の不確定性の展開に用いた ξ とは異なるガウス確率変数 ξ' を用いて表現する。したがって、解の不確定性を表す PC 汎関数の引数として、 ξ と ξ' の二者を考えることとなる。この場合、考慮する HC 空間の次数 N_{HC} と対応する PC 汎関数の項数 N_{PC} は異なる値をとることになる。両者の関係は、引数として用いるガウス確率変数の数を n と表すと、

$$N_{PC} = \sum_{i=1}^{N_{HC}} \binom{n+i-1}{n-1} \quad (12)$$

と表される。($N_{HC} = 0$ ならば $N_{PC} = 0$ である。)

式 (11) で表される確率過程の期待値および分散は、式 (9) および式 (10) で示す性質を用いて、次式のように評価することが可能である。

$$\langle u(\theta) \rangle = u_0 \quad (13)$$

$$\langle \{u(\theta) - \langle u \rangle\}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N_{PC}} \langle \Psi_i[\{\xi(\theta)\}] \Psi_i[\{\xi(\theta)\}] \rangle u_i^2 \quad (14)$$

スペクトル確率手法では、モンテカルロシミュレーションと同様の手法を用いることで、確率密度関数も容易に評価することができる。 ξ の値を、ガウス確率密度関数に基づく乱数として多数発生させ、それらを対象とする式に代入する。これにより得られる式の値の統計的分布が、確率密度関数に相当する。

3. 入力波の位相の不確定性の表現

本研究では、系の不確定性に加えて、入力波が不確定性を有する問題を扱う。構造物の動的解析を行う場合、入力波の時間周波数特性が非線形応答に大きな影響を与える。それゆえ、非線形応答の不確定性を考慮する上で、入力波の時間周波数特性を考慮することが重要である。地震波の周波数特性はフーリエ振幅スペ

クトルで表現され、その時間的な変化は位相特性により決定される。

本研究では、入力波の不確定性として、位相が不確定性を有する問題を考える。ただし、フーリエ変換により定義される位相ではなく、ウェーブレット変換を用いて定義される、時間周波数軸上である程度の局在性を有する位相 (以下、ウェーブレット位相) を用いるものとする。入力波の不確定性としては、このウェーブレット位相の不確定性を考える。

ウェーブレット位相を用いることで、入力時間周波数特性を維持したうえで、波形の不確定性を考慮することが可能となるという利点がある。また、その定式化は、一般的なフーリエ変換と同様であり、本論文で提案する数値解析法は、フーリエ変換で定義される位相の不確定性の考慮にも適用が可能である。

以下では、ウェーブレット位相の定式化について述べる。

現行の時系列データの解析では、非線形動的解析の入力波の合成や、構造物の挙動の評価における地震動の特性を規定するパラメタとして、フーリエ振幅やフーリエ位相がよく用いられている。信号 $s(t)$ のフーリエ変換 $\hat{s}(\omega)$ 、フーリエ振幅 $|\hat{s}(\omega)|$ およびフーリエ位相 $\phi(\omega)$ は、次の関係を満たす。

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{s}(\omega)| e^{i\phi(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (15)$$

$$\phi(\omega) = \arg\{\hat{s}(\omega)\} \quad (16)$$

非線形動的解析を行う場合、信号の時間周波数特性が重要な要素となる。

同一のフーリエ振幅を有する時刻歴波形は無数に存在し、これらの時刻歴波形が構造物に与える影響は大きく異なっている。また、フーリエ位相を用いた場合、積分核が $e^{i\omega t}$ という定常関数であるため、位相は全時間に渡り、時刻歴波形の形状に大きく影響する。このような性質から、フーリエ振幅やフーリエ位相は、時間周波数特性を考慮する解析に必ずしも適していない。

この問題を回避する方法としてウェーブレット解析がある。ウェーブレット変換は、周波数スケールと時間シフトのふたつのパラメタを持つウェーブレットを用いて元の波を展開する。展開されたウェーブレット係数には、周波数スケールごとの位相情報が一定の分解能を持って保存されている。したがって、得られたウェーブレット係数からウェーブレット逆変換により元の波の再合成を行う際に、元の波の時間周波数特性が保存される。次式に、離散ウェーブレット変換、逆変換の定義式を示す。

$$s_{j,k} = \int s(t) \psi_{j,k}^*(t) dt \quad (17)$$

$$s(t) = \sum_{j,k} s_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (18)$$

ただし、 $*$ は複素共役を表す。 $\psi(t)$ はアナライジングウェーブレットと呼ばれ、 $\psi_{j,k}$ は

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (19)$$

である。式 (19) からわかるように、パラメタ j は周波数スケールを表す因子であり、パラメタ k は時間軸上での位置（時間シフト）を表す因子である。式 (17) が信号 $s(t)$ の離散ウェーブレット変換、式 (18) が逆変換を表す。

適当なアナライジングウェーブレット $\psi(t)$ を選ぶことにより、 $\psi_{j,k}(t)$ が $L^2(R)$ で完全正規直交系となる。この正規直交ウェーブレットとしては、周波数領域でコンパクトサポートである Meyer のウェーブレット¹⁴⁾や、時間領域でコンパクトサポートである Daubechies ウェーブレット¹⁵⁾、また、複素関数である Complex Daubechies ウェーブレット¹⁶⁾等がある。本検討では、大濱²⁾にならいうェーブレットとして解析信号である関数（以下、解析信号ウェーブレット。）を用いる。解析信号は、負の周波数成分を有さない複素信号であり、解析信号の導入により、正の周波数領域のみにおいて信号の時間周波数特性を完全に規定することが可能である。したがって、解析信号ウェーブレットを用いることで、正の周波数領域に限定した、より合理的な時間周波数特性の扱いが可能となる。

解析信号ウェーブレットを用いて定義される、時間周波数軸上で局在性を有する位相（以下、ウェーブレット位相。） $\phi_{j,k}$ は、ウェーブレット係数 $s_{j,k}$ を用いて次式のように表される。

$$\phi_{j,k} = \arg(s_{j,k}) \quad (20)$$

この式と式 (16) を比較すると、ウェーブレット位相とフーリエ変換により定義される位相が同様に扱えることが分かる。したがって、本論文で示す手法は、フーリエ位相の不確定性を想定した問題においても全く同様に適用することができる。

4. スペクトル確率手法による動的解析

4.1 不確定性を有する波形および解の表現

不確定性を有する入力波として、ウェーブレット位相に不確定性を有する波を考える。ウェーブレット表現を用いて、時刻歴波形 $s(t)$ は次式で表される。

$$s(t) = \sum_{j,k} |s_{j,k}| e^{i\phi_{j,k}} \psi_{j,k}(t) \quad (21)$$

ここで、 $|s_{j,k}|$ はウェーブレット振幅を、 $\phi_{j,k}$ はウェーブレット位相を表す。ここでは、 $j=L, k=M$ として与えられる基底 $\psi_{L,M}(t)$ に対応するウェーブレット位相 $\phi_{L,M}$ が不確定性を有する場合を考える。この不確定性を有するウェーブレット位相 $\phi_{L,M}(\theta)$ を、ガウス確率変数 $\xi'(\theta)$ を用いて、

$$\phi_{L,M}(\theta) = \phi_0 + \phi_1 \xi'(\theta) \quad (22)$$

$$\phi_1 = 2\pi \xi \quad (23)$$

とおく。ただし、 θ は確率空間での事象を表すパラメタであり、 ξ' は正規ガウス確率変数である。ウェーブレットの位相の不確定性のモデル化の妥当性については別途検討が必要であると考えられる。ここでは、位相が、何らかの手法で評価された値（ ϕ_0 ）を中心にしてばら

つきを有すると解釈される状況を考え、上のように定式化した。

入力の不確定性は系の不確定性とは独立のものであるので、 $\xi'(\theta)$ は、第 2 章において系の不確定性を表現するために用いたガウス確率変数 $\xi(\theta)$ とは独立な確率変数である。

式 (22) において、 ϕ_0 はウェーブレット位相の期待値であり、 ξ はばらつきの大きさを定めるパラメタである。ばらつきは、 2π に対する割合として与える。このとき、入力信号 $s(t, \theta)$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} s(t, \theta) &= |s_{L,M}| \psi_{L,M}(t) e^{i\phi_0} e^{i\phi_1 \xi'(\theta)} + \sum_{j,k \neq L,M} |s_{j,k}| \psi_{j,k}(t) e^{i\phi_{j,k}} \\ &= |s_{L,M}| \psi_{L,M}(t) e^{i\phi_0} e^{i\phi_1 \xi'(\theta)} + \sum_{j,k \neq L,M} s_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (24) \end{aligned}$$

一方、解としての応答は、2.1 で示したように PC 展開した形で求める。ここでは、入力波のウェーブレット位相に加えて、構造系の不確定性として剛性が不確定性を有する問題を考える。剛性の不確定性を、式 (1) の形でガウス確率変数を用いて展開されるガウス確率過程として扱うとすると、PC 展開された応答は次式のように表される。なお、簡単のため θ は省略する。

$$\begin{aligned} u &= u_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^2 u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}) \\ &\quad + \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \\ &\quad + \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} u_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \cdots \quad (25) \end{aligned}$$

ここで式 (25) における ξ_1, ξ_2 として、それぞれ ξ, ξ' を与えることで

$$\begin{aligned} u &= u_0 \Gamma_0 + u_1 \Gamma_1(\xi) + u_2 \Gamma_1(\xi') \\ &\quad + u_{11} \Gamma_2(\xi, \xi) + u_{21} \Gamma_2(\xi', \xi) + u_{22} \Gamma_2(\xi', \xi') \\ &\quad + u_{111} \Gamma_3(\xi, \xi, \xi) + u_{211} \Gamma_3(\xi', \xi, \xi) \\ &\quad + u_{221} \Gamma_3(\xi', \xi', \xi) + u_{222} \Gamma_3(\xi', \xi', \xi') + \cdots \quad (26) \end{aligned}$$

を得る。また、このときの PC 汎関数を 3 次まで示すと

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1, & (\text{以上, 0 次}) \\ \Gamma_1(\xi) &= \xi, \Gamma_1(\xi') = \xi', & (\text{以上, 1 次}) \\ \Gamma_2(\xi, \xi) &= \xi^2 - 1, \Gamma_2(\xi, \xi') = \xi \xi', \\ \Gamma_2(\xi', \xi') &= \xi'^2 - 1, & (\text{以上, 2 次}) \\ \Gamma_3(\xi, \xi, \xi) &= \xi^3 - 3\xi, \Gamma_3(\xi, \xi, \xi') = \xi^2 \xi' - \xi', \\ \Gamma_3(\xi, \xi', \xi') &= \xi \xi'^2 - \xi, \Gamma_3(\xi', \xi', \xi') = \xi'^3 - 3\xi' & (\text{以上, 3 次}) \end{aligned}$$

である。

以下、2. で述べたように、係数 u および PC 汎関数 $\Gamma_n(\cdot)$ に順に番号を与え、それぞれを改めて、 u_i 及び $\Psi_i[\xi, \xi']$ と表わすものとする。これにより、式 (26) は次のように表される。

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\xi, \xi'] \quad (27)$$

実際の計算においては、式 (27) において展開の和を無限大までとすることは不可能である。したがって、PC 展開の展開次数は有限 (N_{PC}) とし

$$u = \sum_{i=0}^{N_{PC}} u_i \Psi_i[\{\xi, \xi'\}] \quad (28)$$

を得る。考慮する HC 空間の次数 N_{HC} と対応する PC 汎関数の項数 N_{PC} の関係は上述した通りであり、例えば、 $N_{HC} = 2$ とした場合、式 (26) より、解は定数関数項を除く 5 項の PC 汎関数からなる関数となるので、 $N_{PC} = 5$ となる。

解の期待値および分散は、それぞれ式 (13) 及び式 (14) を用いて評価することができる。また、確率密度関数は、前述のように、モンテカルロシミュレーションを援用することで容易に算出することができる。

4.2 動的解析の定式化

運動方程式

$$Ma(t, \theta) + Cv(t, \theta) + K(\theta)u(t, \theta) = s(t, \theta) \quad (29)$$

を考える。対象とする系の自由度を n_{dof} と表すと、 $M, C, K(\theta)$ は $n_{dof} \times n_{dof}$ の質量、減衰、剛性マトリクスであり、 $a(t, \theta), v(t, \theta), u(t, \theta)$ は、 n_{dof} 次元の加速度、速度、変位ベクトルである。

非線形系を対象とした数値解析も視野に置いて増分形で表すことを考える。 $\Delta a^n(\theta), \Delta v^n(\theta), \Delta u^n(\theta)$ を、それぞれ、加速度、速度、変位の時刻 $t = t_n$ から $t = t_{n+1}$ への増分量のベクトルとすると、次式を得る。

$$M\Delta a^n(\theta) + C\Delta v^n(\theta) + K(\theta)\Delta u^n(\theta) = \Delta s^n(\theta) \quad (30)$$

ここで、剛性は不確定性を有するものとし、剛性マトリクスを次式で与える

$$K(\theta) = K_0 + K_1\xi(\theta) \quad (31)$$

$\Delta s^n(\theta)$ は、式 (24) で展開された、不確定性を有する n_{dof} 次元の入力信号の増分ベクトルである。ここで、 $\Delta a^n(\theta), \Delta v^n(\theta), \Delta u^n(\theta)$ については、式 (28) のように PC 展開し、展開次数を有限 (N_{PC}) とする。なお、 $\Delta a^n(\theta), \Delta v^n(\theta), \Delta u^n(\theta)$ の展開係数は、式 (11) にならい、 $\Delta a_i^n, \Delta v_i^n, \Delta u_i^n$ と表す。これらの展開された加速度増分、速度増分および変位増分、ならびに、式 (24) で展開された入力信号の増分、式 (31) で展開された剛性マトリクスを式 (30) に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} & M \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta a_i^n \Psi_i[\{\xi, \xi'\}] + C \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta v_i^n \Psi_i[\{\xi, \xi'\}] \\ & + (K_0 + K_1\xi) \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta u_i^n \Psi_i[\{\xi, \xi'\}] \\ & = |s_{L,M}| \Delta \psi_{L,M}^n e^{i\phi_0} e^{i\phi_1\xi'} + \sum_{j,k \neq L,M} s_{j,k} \Delta \psi_{j,k}^n \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $\psi_{j,k}^n$ は、 $\Delta \psi_{j,k}(t)$ の時刻 t_n から t_{n+1} への増分を示し、簡単のためパラメタ θ は省略した。

PC 展開の次数を有限で打ち切っているため、不確定性を有する変数は真値とは異なる値を有することになり、式 (32) の等号は近似的にのみ成立する。近似誤差を、 N_{PC} 次までの HC 空間内で最小化するため、その空間の基底である PC 汎関数 $\Psi_j[\{\xi, \xi'\}]$ 上に射影する。これにより、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle M \Delta a_i^n + \sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle C \Delta v_i^n \\ & + \sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle (K_0 + K_1\xi) \Psi_i | \Psi_j \rangle \Delta u_i^n \\ & = |a_{L,M}| \Delta \psi_{L,M}^n e^{i\phi_0} \langle e^{i\phi_1\xi'} \Psi_j \rangle + \sum_{j,k \neq L,M} a_{j,k} \Delta \psi_{j,k}^n \langle \Psi_j \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

と求められる。この式 (33) を Newmark の β 法を用いて解くために、同手法の増分に対する定式化を用いる。時刻 $t = t_n$ での $a^n(\theta), v^n(\theta)$ を既知として、 $\Delta u^n, \Delta v^n$ は次式を満たすように与えられる。

$$-\gamma \Delta t \Delta a^n + \Delta v^n = \Delta t a^n(\theta) \quad (34)$$

$$-\beta \Delta t^2 \Delta a^n + \Delta u^n = \Delta t v^n(\theta) + \frac{1}{2} \Delta t^2 a^n(\theta) \quad (35)$$

以下の計算では、 $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ とする。式 (34), (35) において、 $\Delta a^n(\theta), \Delta v^n(\theta), \Delta u^n(\theta)$ および $a^n(\theta), v^n(\theta), u^n(\theta)$ を PC 展開し、展開次数を有限 (N_{PC}) とする。なお、 $a^n(\theta), v^n(\theta), u^n(\theta)$ の展開係数は、 a_i^n, v_i^n, u_i^n と表す。式 (34), (35) を PC 展開すると、

$$-\gamma \Delta t \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta a_i^n + \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta v_i^n = \Delta t \sum_{i=0}^{N_{PC}} a_i^n \quad (36)$$

$$-\beta \Delta t^2 \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta a_i^n + \sum_{i=0}^{N_{PC}} \Delta u_i^n = \Delta t \sum_{i=0}^{N_{PC}} v_i^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \sum_{i=0}^{N_{PC}} a_i^n \quad (37)$$

となる。ここで、式 (33), (36), (37) をまとめてマトリクス表記すると

$$A \Delta x^n - \Delta f^n = 0 \quad (38)$$

となる。ここで、

$$\Delta x^n = \{\Delta a_0^n, \Delta v_0^n, \Delta u_0^n, \dots, \Delta a_{N_{PC}}^n, \Delta v_{N_{PC}}^n, \Delta u_{N_{PC}}^n\}^T \quad (39)$$

$\Delta f^n =$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{L,M}^n \Delta \psi_{L,M}^n e^{i\phi_0} \langle e^{i\phi_1\xi'} \Psi_0 \rangle + \sum_{j,k \neq L,M} s_{j,k} \Delta \psi_{j,k}^n \langle \Psi_0 \rangle \\ \Delta t a_0^n \\ \Delta t v_0^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_0^n \\ \vdots \\ s_{L,M}^n \Delta \psi_{L,M}^n e^{i\phi_0} \langle e^{i\phi_1\xi'} \Psi_{N_{PC}} \rangle + \sum_{j,k \neq L,M} s_{j,k} \Delta \psi_{j,k}^n \langle \Psi_{N_{PC}} \rangle \\ \Delta t a_{N_{PC}}^n \\ \Delta t v_{N_{PC}}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_{N_{PC}}^n \end{array} \right\} \quad (40)$$

表-1 解析条件：入力のおよび系の諸元

No.	γ	ζ	mass	$k_0[1/\text{sec}^2]$	Natural Period [sec]	Damping factor
ケース 1	0.05	0.05	0.1	1.0	1.99	0.1
ケース 2	0.1	0.1	0.1	1.0	1.99	0.1
ケース 3	0.05	0.05	1.0	1.0	6.28	0.1
ケース 4	0.05	0.05	0.01	1.0	0.628	0.1

下線は、着目するパラメタの値を示す。

$A =$

$$\begin{bmatrix}
 \langle \Psi_0 \Psi_0 \rangle M & \langle \Psi_0 \Psi_0 \rangle C & \langle (K_0 + K_1 \xi) \Psi_0 \Psi_0 \rangle \\
 -\gamma \Delta t & 1 & 0 \\
 -\beta \Delta t^2 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \langle \Psi_0 \Psi_{N_{PC}} \rangle M & \langle \Psi_0 \Psi_{N_{PC}} \rangle C & \langle (K_0 + K_1 \xi) \Psi_0 \Psi_{N_{PC}} \rangle \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \langle \Psi_{N_{PC}} \Psi_0 \rangle M & \langle \Psi_{N_{PC}} \Psi_0 \rangle C & \langle (K_0 + K_1 \xi) \Psi_{N_{PC}} \Psi_0 \rangle \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \langle \Psi_{N_{PC}} \Psi_{N_{PC}} \rangle M & \langle \Psi_{N_{PC}} \Psi_{N_{PC}} \rangle C & \langle (K_0 + K_1 \xi) \Psi_{N_{PC}} \Psi_{N_{PC}} \rangle \\
 -\gamma \Delta t & 1 & 0 \\
 -\beta \Delta t^2 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad (41)$$

ただし、式(40),(41)においてPC汎関数の指数 $[\xi]$ は省略した。ここで、 $\Delta x, \Delta f$ ベクトルは $\{3 \cdot (N_{PC} + 1) \cdot n_{dof}\}$ 次元のベクトル、 A マトリクスは $\{3 \cdot (N_{PC} + 1) \cdot n_{dof}\} \times \{3 \cdot (N_{PC} + 1) \cdot n_{dof}\}$ のマトリクスとなる。式(38)を解くことで、時刻 $t = t_n$ からの増分量が得られる。この過程を解析終了時刻まで繰り返すことで時刻歴応答が得られる。

ここで、式(40)に示される Δf ベクトルにおける係数 $\langle \Psi_j \rangle$ や、式(41)に示される A マトリクスの要素 $\langle \Psi_i \Psi_j \rangle$ 、 $\langle \xi \Psi_i \Psi_j \rangle$ は、Hermite多項式であるPC汎関数の性質から解析的に求められる¹⁾。位相の不確定性を表す $e^{i\phi_1 \xi}$ を含む項の評価については次節で述べる。

4.3 複素指数関数を含む項のHC空間への射影の評価について

Ghanemらの定式化¹⁾では、不確定性の影響を多項式展開するものであるため、位相の不確定性を表す $e^{i\phi_1 \xi}$ を含む項のHC空間への射影、例えば、 $\langle e^{i\phi_1 \xi} \Psi_j \rangle$ の評価のためには、これを多項式展開することが必要となる。

本論文では、これをLaguerre多項式を用いることで解析的に算出することができることを示す。 $e^{i\beta \xi}$ と、 ξ を指数とするPC汎関数 $\Psi_j[\xi]$ の積の期待値を次式に示す。値は、次数の偶奇によって場合分けされ、次式のように求められる。

$$\langle e^{i\beta \xi} \Psi_{2m+1}[\xi] \rangle = i(-1)^m \beta^{2m+1} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} L_0^{(2m+1)}(\beta^2) \quad (42)$$

$$\langle e^{i\beta \xi} \Psi_{2m}[\xi] \rangle = 2(-1)^m \beta^{2m} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} L_0^{(2m)}(\beta^2) \quad (43)$$

ここで、 $L_n^{(\alpha)}(x)$ はLaguerre多項式であり、次式で与え

られる。

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (44)$$

式(33)の右辺第1式において、PC汎関数が、 ξ' だけでなく ξ を指数に持つ項について述べる。

ξ, ξ' の両者を指数に持つ任意のPC汎関数 $\Psi_j[\xi, \xi']$ は、式(7)に表されるような一つの指数を有するPC汎関数、 $\Psi_k[\xi], \Psi_l[\xi']$ の積として、

$$\Psi_j[\xi, \xi'] = \Psi_k[\xi] \Psi_l[\xi'] \quad (45)$$

と表される。したがって、 ξ, ξ' が互いに独立であることも考慮すると、

$$\langle e^{i\beta \xi} \Psi_j[\xi, \xi'] \rangle = \langle e^{i\beta \xi} \Psi_k[\xi] \rangle \langle \Psi_l[\xi'] \rangle \quad (46)$$

と表される。右辺の第一項は式(42),(43)を用いて表現できるため、これは解析的な表現が求められる。

なお、 $k \neq 0$ のときには $\langle \Psi_k[\xi] \rangle = 0$ となる。したがって、 Δf ベクトルにおいて、係数として $\langle e^{i\phi_1 \xi'} \Psi_j[\xi, \xi'] \rangle$ がかかる項については、PC汎関数が ξ' のみを指数とする項についてのみ非零の値を持ち、その他の場合は全て0となる。

以上の定式化においてウェーブレット関数の特性は全く用いていないことから明らかなように、この結果は、フーリエ変換で定義される位相の不確定性を考慮する場合にもそのまま適用可能である。

5. 数値解析例

本章では、4.2において提案した手法の適用性についての検討を行うことを目的として、系の剛性および入力波のウェーブレット位相がともにガウス分布の不確定性を有する問題を対象として解析を行う。得られる解の確率特性（期待値、分散、確率密度関数）についてモンテカルロシミュレーション（MCS）による結果と比較を行い、適用性の検証を行う。

5.1 解析条件

解析対象として、線形一質点系を考える。入力として、兵庫県南部地震において神戸海洋気象台で観測された強震記録（NS成分）を用いる。入力波の時刻歴波形を図-1に示す。離散時間間隔は $\Delta t = 0.04$ [sec]として512ステップの解析を行うものとする。入力の不確定性としては、最大振幅を有する成分のウェーブレット位相の不確定性を考える。不確定性を有する成分は、時刻 $t = 4 \sim 5$ [sec]付近に卓越した成分である。

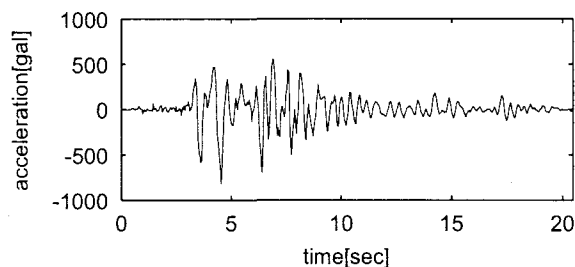


図-1 入力波の時刻歴

系の各諸元の値が適用性や近似精度に与える影響についての検討を行うことを目的とし、表-1 に示す4 ケースを対象に解析を行う。 k_0 は剛性の期待値を表す。剛性およびウェーブレット位相のばらつきの大きさについては、ばらつきの程度による計算精度についての比較を行うために、

$$(\gamma, \zeta) = (0.05, 0.05), (0.1, 0.1) \quad (47)$$

の2 ケースを考える。ただし、 γ は、式 (2) に示される剛性 $k(\theta)$ の期待値に対するばらつきの程度を表すパラメタである。また、 ζ は式 (23) に示されるウェーブレット位相 $\phi_{L,M}(\theta)$ の 2π に対するばらつきの程度を表すパラメタである。

比較のために行うモンテカルロシミュレーションについては試行回数を 10,000 回とする。試行回数を 9,000 回とした場合と 10,000 回とした場合の結果にほとんど差は見られなかった。したがって、10,000 回の試行を行うことで、対象とする問題の確率的な性質は十分表現できていると考えられる。スペクトル確率手法で考慮する HC 空間の次数 (以下、HC 次数) の影響についても検討するため、HC 次数を $N_{HC} = 2$ および 4 とした場合について比較を行う。

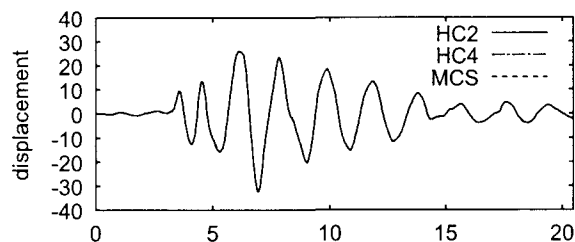
5.2 解析結果

(1) 基本ケースを用いた適用性の検討

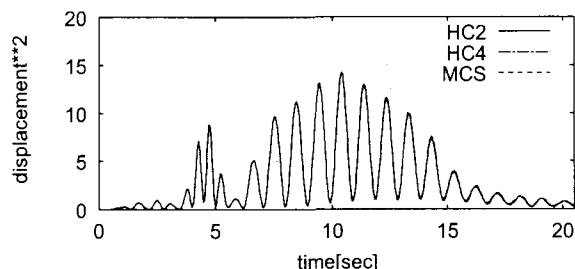
スペクトル確率手法の基本的な適用性について述べる。図-2 に、ケース 1 において得られた応答変位の期待値および分散の時刻歴を示す。図中で、**HC2(4)** とは、考慮した HC 次数が $N_{HC} = 2(4)$ であることを示す。期待値、分散ともに、HC 次数によらず MCS の結果を非常に精度良く再現できていることが分かる。図-3 に示す変位復元力の期待値の関係についても、HC 次数を低次とした場合においても、良い精度で近似できている。

図-4 に時刻 $t = 4.0, 12.0$ [sec] における応答変位の確率密度関数を示す。HC 次数を $N_{HC} = 4$ とした場合には、いずれの時刻においても良い精度で近似できている。しかし、 $N_{HC} = 2$ とした場合、時刻 $t = 4.0$ [sec] において、時刻 $t = 12.0$ [sec] と比べて近似精度が低い。

この精度の低下の理由を検討するため、入力および剛性のみが不確定性を有する場合について検討を行う。解析対象の系の各諸元はケース 1 のそれと同じとし、HC 次数を $N_{HC} = 4$ とする。ばらつきの大きさについては、ウェーブレット位相にのみ不確定性を与える場合には $(\gamma, \zeta) = (0, 0.05)$ とし、剛性のみに不確定性を与える場合には $(\gamma, \zeta) = (0.05, 0)$ とする。



(a) 期待値



(b) 分散

図-2 応答変位の時刻歴 (ケース 1)

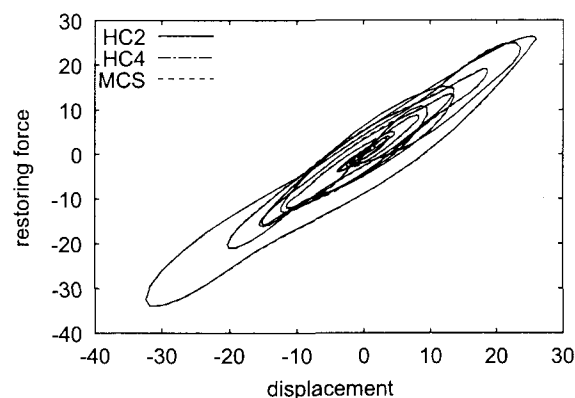


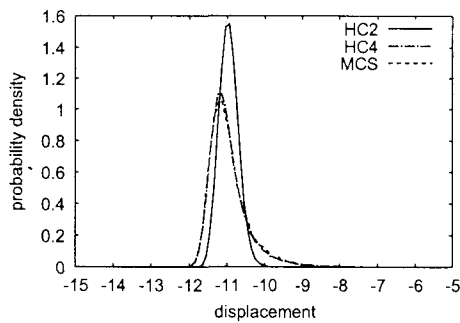
図-3 変位復元力関係 (期待値)

図-5 に応答変位の分散の時刻歴を示す。同図より、時刻 $t = 4 \sim 5$ [sec] 付近においては入力の不確定性による影響が、また時刻 $t = 6$ [sec] 以降においては剛性の不確定性による影響が強いことが分かる。図-4 に、2つの時刻における確率密度関数が示されている。次数が低い $N_{HC} = 2$ の場合には近似精度が低い時刻 $t = 4.0$ [sec] の値に関しては、主に入力波の位相のばらつきの影響が大きいことがわかる。しかし、HC 次数を $N_{HC} = 4$ に上げることで、近似精度を高めることができています。また、主に剛性の不確定性による影響を受けている時刻 $t = 12.0$ [sec] では、低い HC 次数でも高い精度で MCS の結果を近似することができていることができています。

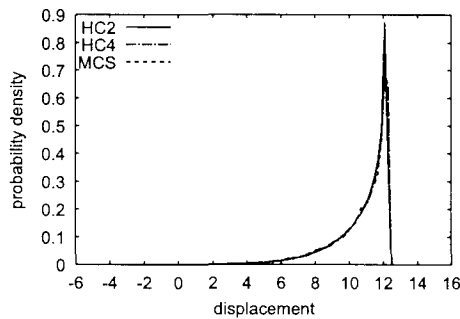
以上から、提案手法の適用性が概ね示された。以下では、ばらつきの大きさや構造パラメタの値を変えたケースについて、MCS との比較により精度についての検討を行う。

(2) 不確定性の大きさの影響について

ばらつきの大きさが精度に与える影響についての検討を行うために、表-1 に示すケース 2 についての解析を行った。図-6 に、応答変位の期待値および分散の時

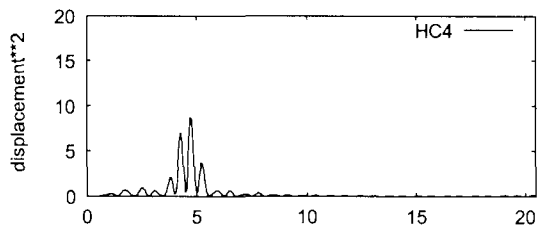


(a) $t = 4.0$ [sec]

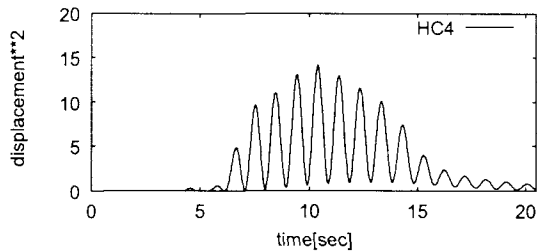


(b) $t = 12.0$ [sec]

図-4 応答変位の確率密度関数 (ケース 1)



(a) 入力波の不確定性のみを考慮した場合

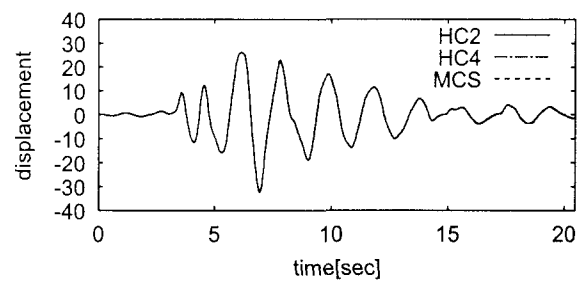


(b) 剛性が不確定性のみを考慮した場合

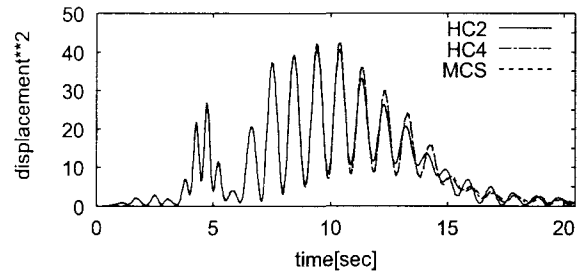
図-5 入力波または系の剛性のいずれかのみが不確定性を有する場合の応答変位の分散の時刻歴

時刻歴を示す。期待値については、HC 回数によらず高い近似精度を示している。一方、分散については、HC 回数を $N_{HC} = 2$ とした場合、時刻 10 [sec] 以降で位相のずれといった近似精度の低下が見られる。 $N_{HC} = 4$ と HC 回数を上げることで、位相のずれも見られなくなり、良い精度で近似できている。

図-7 に示す応答変位の確率密度関数についても、分散の時刻歴と同様に、HC 回数を上げることで近似精度が向上している。特に、時刻 $t = 4.0$ [sec] において、 $N_{HC} = 2$ とした場合にはピーク値も再現することはできていないのに対して、 $N_{HC} = 4$ とすることで、再現



(a) 期待値



(b) 分散

図-6 応答変位の時刻歴 (ケース 2)

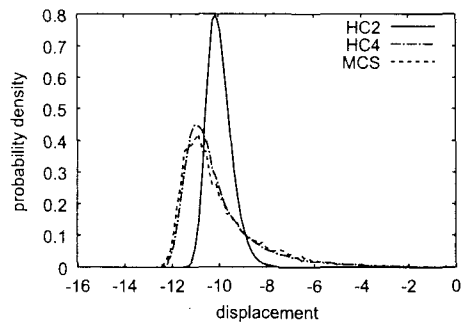
性を高められている。しかし、ケース 1 による結果と比較すると、高い HC 回数を考慮した場合でも近似精度は低下している。これらの結果から、期待値が同じである線形系においても、ばらつきが大きくなるにつれ近似精度は低下し、精度を確保するためには HC 回数を上げることが必要であると言える。

(3) 固有周期の影響について

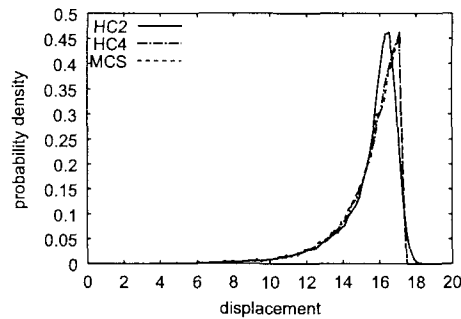
系に影響を与える周波数帯の成分の大きさが、提案手法の近似精度や解の確率特性の時間的变化に与える影響についての検討を行う。

ケース 3 では固有周期が 6.28 [sec] と長周期である系、ケース 4 では 0.628 [sec] と短周期である系を対象とする。ケース 3 の系は 0.15 [Hz] 付近の成分に影響を受けるが、入力波のこの周波数帯の成分は卓越しておらず、不確定性を有する成分による影響も小さい。一方、ケース 4 の系に影響を与える 1.5 [Hz] 付近の周波数帯においては、入力波の不確定性を有する成分も卓越しており、その影響を強く受けると考えられる。

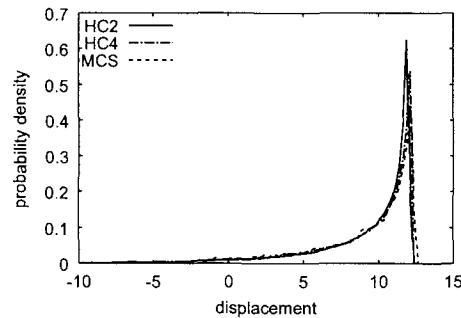
図-8 に、ケース 3 における応答変位の期待値および分散の時刻歴を示す。期待値、分散ともに、提案手法による結果は HC 回数によらず精度良く近似できている。分散は、広い時刻帯にわたって値を示している。これは、位相の不確定性による影響と剛性の不確定性による影響が同程度であることを意味する。しかし、分散の絶対値はケース 1, 2 に比較して非常に小さいものとなっている。図-9 に 2 つの時刻における応答変位の確率密度関数を示す。時刻 $t = 8.0$ においては HC 回数に関わらず良い近似ができているが、時刻 $t = 4.0$ [sec] において $N_{HC} = 2$ とした場合の結果に精度の低下が見られる。しかし、上述したケースと同様に、HC 回数を $N_{HC} = 4$ と上げることで精度は向上している。また、次数が低い場合においても、時刻が遅い段階では良い近似ができている。これは、位相の不確定性による応答の不確定性は、時刻 $t = 8.0$ [sec] までに減衰してし



(a) $t=4.0$ [sec]



(b) $t=8.0$ [sec]



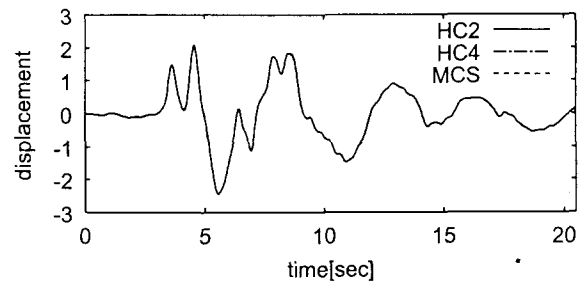
(c) $t=12.0$ [sec]

図-7 応答変位の確率密度関数 (ケース 2)

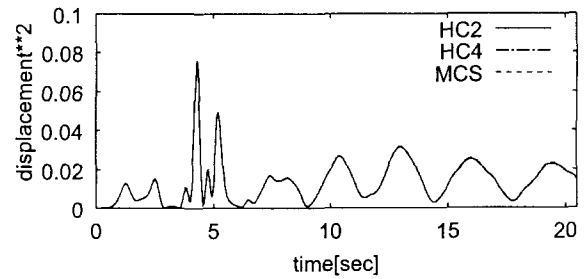
まっているからであると考えられる。

図-10 に、ケース 4 における応答変位の期待値および分散の時刻歴を示す。HC 次数によらず MCS の結果を良い精度で再現できている。このケースでは、インパルス応答関数の減衰が大きいので、応答変位の分散は、時刻 $t=3.5\sim 5.5$ [sec] で大きな値を示し、それ以降においては急激に減少している。これは、位相の不確実性が剛性の不確実性に比較して非常に大きい影響を有することを意味している。このケースでは、図-11 に示される応答変位の確率密度関数は、いずれの時刻においても、HC 次数に関わらず、よい近似が得られている。分散のピーク値はケース 3 に比較して圧倒的に大きいですが、時刻 $t=4.0$ [sec] における変位の確率密度関数は、HC 次数が 2 でも良く近似できている、その精度はケース 3 で HC 次数が 2 の結果よりも高い。

ケース 1 と 2 の比較で、不確実性が大きい場合には応答の不確実性の近似精度が低下することが示されていた。ケース 3 と 4 の比較から、分散は小さくとも高い HC 次数を必要とする場合もあることが分かる。

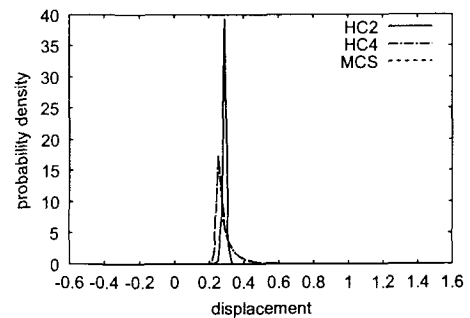


(a) 期待値

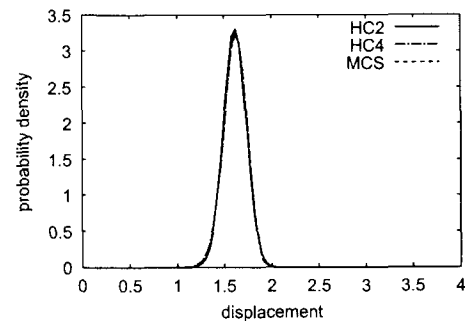


(b) 分散

図-8 応答変位の時刻歴 (ケース 3)



(a) $t=4.0$ [sec]



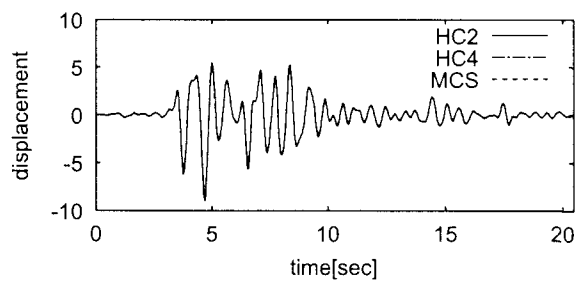
(b) $t=8.0$ [sec]

図-9 応答変位の確率密度関数 (ケース 3)

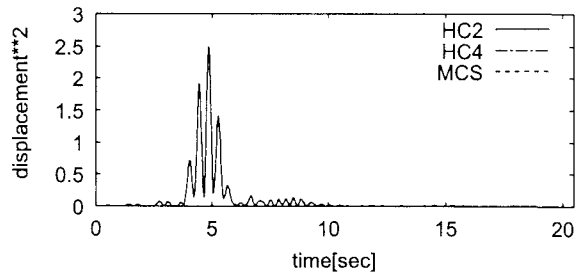
6. おわりに

6.1 まとめ

本論文では、位相に不確実性を有する入力波が入力する不確定系の動的解析を、スペクトル確率手法を用いて行うことを提案し、時間積分法として Newmark の β 法を用いる場合の定式化を示した。スペクトル確率手法では、不確実性を有する支配方程式を HC 空間に射影するため、入力波が位相に不確実性を有する運動

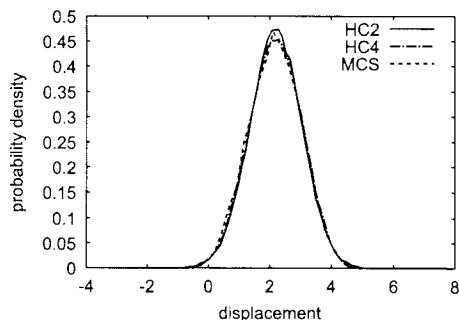


(a) 期待値

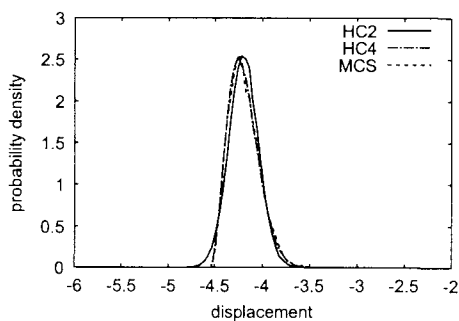


(b) 分散

図-10 応答変位の時刻歴 (ケース 4)



(a) $t=4.0$ [sec]



(b) $t=8.0$ [sec]

図-11 応答変位の確率密度関数 (ケース 4)

方程式を扱う場合には、確率変数を指数に持つ複素指数関数と PC 関数の積の期待値を算出することが必要となる。本論文ではその期待値を与える解析的な解を示した。

また、提案手法による解析結果を、モンテカルロシミュレーションにより算出した値と比較し、その有効性を検討した。系の剛性の不確定性の影響による応答の不確定性は高い精度で評価できた。しかし、考慮する HC 次数が低い場合、位相の不確定性の影響による

応答の不確定性の評価の精度は低かった。ただし、考慮する HC 次数を上げることで、評価精度を上げられることも示されたため、提案手法の有効性が検証できたと考えられる。

6.2 今後の課題

本論文は、線形系を対象とした解析結果を報告したものである。提案した定式化は、時間領域での計算を行うものであるため、原理的には非線形系の動的解析にも適用できるものである。ただし、解の近似空間の展開次数の制限による計算精度の低下が問題となることが予想され、非線形系の実用的な解析のためには更なる検討が要されるものと考えられる。

参考文献

- 1) Ghanem, R. G. and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*. Springer - Verlag NY, 1991.
- 2) 大濱吉礼. 解析信号ウェーブレットによる地震波形合成法に関する研究. 京都大学大学院修士論文, 2002.
- 3) Yamazaki, F., M. Shinozuka, and G. Dasgupta. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ACSE*, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1354, 1988.
- 4) Vanmarcke, E. and M. Grigoriu. Stochastic finite element analysis of simple beam. *Journal of Engineering Mechanics, ACSE*, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214, 1983.
- 5) Spanos, P. D. and R. G. Ghanem. Stochastic finite elements expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053, 1989.
- 6) R. G. Ghanem and Spanos, P. D. Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 197-202, 1990.
- 7) Ghanem, R. and W. Brzakala. Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 122, No. 4, pp. 361-369, 1996.
- 8) Anders, M. and M. Hori. Stochastic finite element method for elast-plastic body. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 46, pp. 1897-1916, 1999.
- 9) マチエイ・アンドレ, 堀宗朗. 地表地震断層発生のシミュレーションのための確率有限要素法の開発. 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 595-600, 2000.
- 10) 本田利器. スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析. 土木学会論文集, No. 689/I-57, pp. 321-331, 10 2001.
- 11) 本田利器, 村上裕宣. 三次元不確定波動場のスペクトル確率有限要素解析の並列計算. 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 789-798, 8 2003.
- 12) Jensen, H. and W. D. Iwan. Response of system with uncertain parameters to stochastic excitation. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 5, pp. 949-959, 1992.
- 13) Micaletti, R. C., A. Ş. Çakmak, S. R. K. Nielsen, and H. Uğur, Köylüglü. A solution method for linear and geometrically nonlinear mdof systems with random proper-

- ties subject to random excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 13, No. 2, pp. 85–95, 1998.
- 14) Meyer, Y. *Orthonormal Wavelets, in Wavelets*. Springer, 1989.
- 15) Daubechies, I. Orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. 41, pp. 909–996, 1988.
- 16) Lina, J. M. and M. Mayrand. Complex daubechies wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis* 2, pp. 219–229, 1995.

(2005 年 4 月 15 日 受付)