

平面ひずみ圧縮を受ける乗算分解型超弾性-塑性材料の 拡散型分岐条件に関する理論解法と数値解法との比較

Comparative Study of Conditions for Diffuse Mode Bifurcation in Multiplicative
Hyperelasto-plastic Material under Plane Strain Compression :
Theoretical and Numerical Approaches

佐藤啓介*・山川優樹**・堤成一郎***

Keisuke SATOH, Yuki YAMAKAWA, Seiichiro TSUTSUMI

*学生会員 工修 長岡技術科学大学大学院 工学研究科材料工学専攻 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工博 長岡技術科学大学助手 工学部環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***非会員 農博 九州大学助手 工学部海洋システム工学部門 (〒812-8581 福岡県福岡市東区箱崎 6-10-1)

This paper investigates bifurcation behavior of an elasto-plastic material under plane strain deformation. A simple and isotropic material in finite strains based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient and Hencky's hyperelastic model is employed, and the expressions of instantaneous modulus of the material in rate form are explicitly derived. We present a theoretical approach for bifurcation analysis, and calculate bifurcation stresses of diffuse modes. The analysis reveals that elastic nonlinearity due to the hyperelastic constitutive model significantly changes general characteristics of the governing partial differential equation, and, moreover, this change influences occurrence of bifurcation. Finally, we conduct numerical bifurcation analysis based on FEM. Comparison between the theoretical and numerical results shows that the numerical approach provides good accuracy for estimate of the bifurcation stress.

Key Words : multiplicative hyperelasto-plastic material, bifurcation, diffuse mode

1. はじめに

地盤材料力学の分野では、分岐現象に起因する変形局所化を理論的・数値解析的あるいは実験的に捉える研究が盛んに行われている。一様な変形から局所的な変形に移行する際の分岐モードとしては、狭い幅の帯状領域に変形が局所化する「せん断帯分岐モード」や周期性を持った変形を生じる「拡散型分岐モード」などが考えられる。

地盤材料に限らず、弾塑性体のせん断帯分岐および拡散型分岐については、非圧縮性材料の平面ひずみ引張り状態における分岐問題について検討した Hill and Hutchinson¹⁾による先駆的研究をはじめ、解析的理論解法により古くから研究^{2),3),4)}が行われてきた。Rudnicki and Rice⁵⁾は、摩擦性材料の降伏面に現応力点を頂点とした尖り点が存在する場合を考え、その効果により降伏面に対して接線方向にも塑性ひずみの変化を生じる構成モデルを用いてせん断帯の発生について論じた。Yahomi et al.⁶⁾は非共軸 Cam-clay モデルの提案とせん断帯の発生に関する検討、志比ら⁷⁾は非共軸 Cam-clay モデルを用いた拡散型分岐モードに関する検討を行った。また、Hashiguchi and Tsutsumi⁸⁾は接線塑性を導入した下負荷面モデル⁹⁾を用いてせん断帯の発生に関する検討を行った。以上の研究は、いずれも非排水条件（非圧縮変形）に限った検討である。これに対して、Chau and Rudnicki⁴⁾は静水圧に依存する摩擦性材料について、分岐発生時の体積変化を含む一般化された変形場（変形モード）について論じている。

Durban and Papanastasiou¹⁰⁾は、Mohr-Coulomb モデルや Drucker-Prager モデルを用いて分岐発生時の体積変化を含む変形場について検討した。従来行われた理論解法による分岐解析では、拡散型分岐条件として、仮定した変形モードの変位速度について支配方程式を導き、境界条件を用いて分岐条件式を求める方法をとっている。また、客観応力速度として Jaumann 速度が選択されることが多く、本論文では、このような材料を「Jaumann 速度を用いた速度型超弾性-塑性材料」と称することとする。

一方、弾塑性有限変形の取扱いにおいて変形勾配の乗算分解を仮定し、弾性部分に超弾性構成式を用いる定式化^{11),12)}が最近の主流となりつつある。この定式化では、応力解放状態の中間配置を定義し、弾性・塑性応答の基準状態を常に明確に保持していること、また、弾性部分はポテンシャルの存在を保証したモデルであることなどの特長がある。そのため、運動学的厳密性・整合性を重視する非線形連続体力学の分野はもとより、有限ステップでの応力積分を伴う計算の効率性を要求する計算力学の分野で特にこの定式化が好んで採用されている。本論文では、このような材料を「乗算分解型超弾性-塑性材料」と称することとする。最近では、地盤材料のような複雑な構成モデル¹³⁾のほか、異方性材料¹⁴⁾に関しても研究が行われている。

弾塑性有限要素法による数値分岐解析では、山川ら¹⁵⁾によって平面ひずみ圧縮場における拡散型分岐モードについて論じられている^{16),17),18)}。この研究では、「乗算分解型超弾性-塑性材料」を用いている。ここでは、

数値分岐解析における拡散型分岐条件として、接線剛性マトリックスがゼロ固有値をもち、かつ荷重極大点でない瞬間を拡散型分岐モードの分岐発生点としている。また、山川ら¹⁹⁾は、弾塑性アコースティックテンソルの特異性条件により、強楕円性喪失を判定して不連続せん断帯分岐の発生条件について調べている。

本研究では、排水条件の平面ひずみ圧縮場（体積変化を含む変形場）を想定し、式の誘導は Chau and Rudnicki⁴⁾にならい、拡散型分岐発生時の速度場について体積変化の影響を考慮した。乗算分解型超弾性－塑性材料の定式化の場合、Kirchhoff 応力の Truesdell 速度で表される速度型弾塑性構成式が自然に導かれることから、構成式を表す応力速度として、速度型超弾性－塑性材料で一般的に使われている Jaumann 速度は用いずに、Truesdell 速度を用いた。材料モデルは、等方性材料で塑性スピンは考慮していない。なお、関連流れ則に従う法線則の保たれた Drucker-Prager 型モデルを用いた。理論解法による分岐解析と有限要素法による分岐解析では、前述したように、全く異なる分岐条件に基づいており、その分岐条件の違いから分岐発生点に関する理論解法と数値解法との直接的な比較ができないため、数値分岐解析の精度検証が必要とされていた。そこで本研究では、拡散型分岐モードのつり合い経路上の分岐点位置（応力・ひずみ）について、理論解法で用いられる分岐条件によって求められる分岐点と数値分岐解析の結果とを比較した。このとき、平面ひずみ圧縮時の応力・ひずみ状態を求めるために、1要素の有限要素法を行い、各つり合い状態において解析的分岐解法で用いられる分岐条件に基づいて判定を行った。

2. 構成関係と分岐に関する支配方程式

2.1 圧縮性を考慮した構成関係

x_1, x_2 平面内で平面ひずみ変形をしている長方形領域について考える。一様な材料からなる長方形領域が、現配置において一様な軸方向の荷重による変形をしている。このとき、現配置を参照配置とし、その瞬間における長方形領域の応答が、Chau and Rudnicki⁴⁾にならい次の速度型構成式で表されるものとする：

$$\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} = \frac{2G^*}{(1-\alpha\delta)} [(d_{11} - d_{22}) - \kappa\delta(d_{11} + d_{22})], \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \frac{2G^*}{(1-\alpha\delta)} [\kappa(d_{11} + d_{22}) - \alpha(d_{11} - d_{22})], \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = 2G_t d_{12}. \quad (3)$$

ここで、 σ は Cauchy 応力、 $\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - l \cdot \sigma - \sigma \cdot l^T + \text{tr}(l)\sigma$ は Cauchy 応力の Truesdell 速度、 d は変形速度である。乗算分解型超弾性－塑性材料における速度型構成式は、Kirchhoff 応力の Truesdell 速度で表された形式が自然に導出される。応力は引張を正とする。 G^* は主応力（軸応力）の方向の座標軸に対して 45 度方向の瞬間せん断剛性であり、45 度せん断剛性と呼ばれる。また、式 (1.16) に示すように、 G_t は現応力に依存して変化する

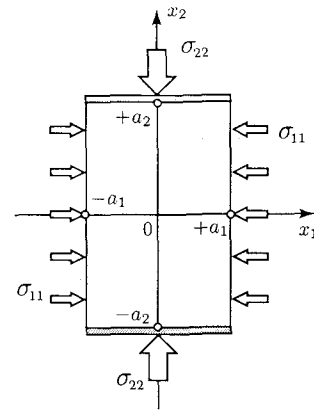


図-1 供試体モデル

る瞬間せん断剛性であり、後述するせん断剛性定数 G とは異なる。さらに、式 (1), (2) を書き直すと、

$$2G^*(d_{11} - d_{22}) = (\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}) + \delta(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}), \quad (4)$$

$$2G^*\kappa(d_{11} + d_{22}) = \alpha(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}) + (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) \quad (5)$$

となる。平面ひずみ状態での変形について考えるとき、Cauchy 応力の公称速度 $\bar{\dot{\sigma}} = \frac{1}{J} \dot{P} \cdot F^T = \dot{\sigma} - \sigma \cdot l^T + \text{tr}(l)\sigma$ と Truesdell 速度 $\dot{\sigma}$ の関係は、

$$\bar{\dot{\sigma}}_{11} = \dot{\sigma}_{11} + \sigma_{11}l_{11}, \quad (6)$$

$$\bar{\dot{\sigma}}_{12} = \dot{\sigma}_{12} + \sigma_{22}l_{12}, \quad (7)$$

$$\bar{\dot{\sigma}}_{21} = \dot{\sigma}_{21} + \sigma_{11}l_{21}, \quad (8)$$

$$\bar{\dot{\sigma}}_{22} = \dot{\sigma}_{22} + \sigma_{22}l_{22} \quad (9)$$

と表される。ここで、 l は速度勾配であり、 $d = \frac{1}{2}(l + l^T)$ の関係がある。

2.2 支配方程式と境界条件

Hill and Hutchinson¹⁾, Needleman³⁾, Chau and Rudnicki⁴⁾らによって示された方法に従い、支配方程式について議論を行う。図-1 に示すように、供試体寸法が x_1 軸方向 $2a_1$, x_2 軸方向 $2a_2$ である長方形供試体について考える。供試体側面 ($x_1 = \pm a_1$) にはせん断力が発生せず、一定な法線方向の応力 σ_{11} が発生し、供試体の上下端面 ($x_2 = \pm a_2$) には x_2 軸に対してせん断成分を含まない圧縮応力が生じている状態を考える。供試体端面の摩擦は考慮しない。供試体は現配置において一様な応力・変形状態であり、変位速度を与えたときの変形応答は一様変形を示す変位速度場の自明解を持つ。しかしながら、分岐が発生する場合の変形応答では、一様変形の場合とは異なるモードの変形速度場の解が現れる。そのときのそれら二つの変位速度の差、およびそれに対応する応力速度の差を右上付き添字 (*) を用いて表す。

分岐が発生する瞬間の応力状態は、つり合い式

$$\text{div } \bar{\dot{\sigma}}^* = 0 \quad (10)$$

を満足していなければならない。式 (1)～(3) を用いて式 (10) の各成分 $\bar{\dot{\sigma}}_{11,1}^* + \bar{\dot{\sigma}}_{12,2}^*$, $\bar{\dot{\sigma}}_{21,1}^* + \bar{\dot{\sigma}}_{22,2}^*$ について

展開すると,

$$\begin{aligned} & \left[G^* \{ (1-\alpha) + \kappa(1-\delta) \} + (1-\alpha\delta)\sigma_{11} \right] l_{11,1}^* \\ & + (1-\alpha\delta)(G_t + \sigma_{22}) l_{12,2}^* \\ & - \left[G^* \{ (1-\alpha) - \kappa(1-\delta) \} - (1-\alpha\delta)G_t \right] l_{21,2}^* \\ & = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & - \left[G^* \{ (1+\alpha) - \kappa(1+\delta) \} - (1-\alpha\delta)G_t \right] l_{11,2}^* \\ & + (1-\alpha\delta)(G_t + \sigma_{11}) l_{21,1}^* \\ & + \left[G^* \{ (1+\alpha) + \kappa(1+\delta) \} + (1-\alpha\delta)\sigma_{22} \right] l_{22,2}^* \\ & = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる. ここで, $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$ を意味する.

分岐が発生する瞬間における境界条件は, 供試体表面の公称応力速度の変化がなく, 供試体の上下端面 ($x_2 = \pm a_2$) での変位速度も発生しないことから,

$$\dot{t}_1^* = 0, \quad \dot{t}_2^* = 0 \quad \text{on } x_1 = \pm a_1, \quad (13)$$

$$\dot{t}_1^* = 0, \quad \dot{v}_2^* = 0 \quad \text{on } x_2 = \pm a_2 \quad (14)$$

と表される. ここで $\dot{t}$ は公称表面力速度であり, $\dot{t} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ と定義される. ここで, $\mathbf{n}$ は供試体表面の外向き法線方向である. さらに,

$$\dot{t}^* = \bar{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

と表わされる. このとき, 供試体側面 ($x_1 = \pm a_1$) の境界条件式 (13) に式 (1), (2), (3) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \left[G^* \{ (1-\alpha) + \kappa(1-\delta) \} + (1-\alpha\delta)\sigma_{11} \right] l_{11}^* \\ & - G^* \{ (1-\alpha) - \kappa(1-\delta) \} l_{22}^* = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$G_t l_{12}^* + (G_t + \sigma_{11}) l_{21}^* = 0 \quad (17)$$

となり, 供試体の上下端面 ($x_2 = \pm a_2$) における境界条件式 (14) は,

$$(G_t + \sigma_{22}) l_{12}^* + G_t l_{21}^* = 0 \quad (18)$$

$$\dot{v}_2^* = 0 \quad (19)$$

となる.

3. 拡散型分岐モード

3.1 境界条件とつり合い式

拡散型分岐モードについて, 変位速度の差 $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ の各成分 v_1^*, v_2^* を Chau and Rudnicki⁴⁾ にらう,

$$v_1^*(x_1, x_2) = [u(x_1) + \gamma_m v(x_1)] \sin(\gamma_m x_2), \quad (20)$$

$$v_2^*(x_1, x_2) = v'(x_1) \cos(\gamma_m x_2) \quad (21)$$

とする. この変位速度場 (20), (21) が示す分岐モードは, 体積変化を含む拡散型分岐モードとなり, 長方形領域の形状比や境界条件にも依存した変形モードとなる. また, 境界条件式 (18) および (19) に整合するよう

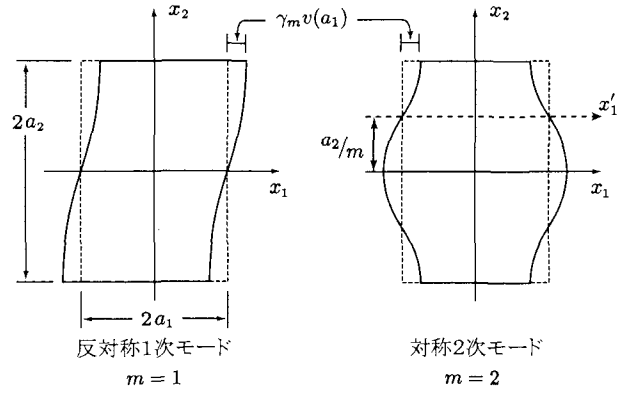


図-2 拡散型分岐モード

に, 分岐発生時に上下端面で x_2 軸方向変位が起きないような変位速度場を表している. ここで, 分岐発生時の長方形領域の幅を $2a_1$, 高さを $2a_2$ とする. 分岐モードの波数を m , $\gamma_m = m\pi/2a_1$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) とし, 上付き記号 $(\cdot)'$ は $d(\cdot)/dx_1$ を意味する. また, 図-2 に示すように, 長方形領域の座標の原点は m が奇数のときは x_1 軸と x_2 軸の交点とし, m が偶数のときは x_1 軸を a_2/m だけ移動した x_1' 軸と x_2 軸の交点とする.

速度勾配は $\mathbf{l}^* = \partial \mathbf{v}^* / \partial \mathbf{x}$ と表されることから, 変位速度の式 (20), (21) を速度型つり合い式 (12) に代入すると,

$$\begin{aligned} u = & \left[(1-\alpha\delta)(G_t + \sigma_{11})v'' \right. \\ & \left. - \gamma_m^2 [2G^*(1+\alpha) - (1-\alpha\delta)(G_t - \sigma_{22})]v \right] / \\ & \left[\gamma_m [G^* \{ (1+\alpha) - \kappa(1+\delta) \} - (1-\alpha\delta)G_t] \right] \end{aligned} \quad (22)$$

となる. さらに, 式 (22) を用いてつり合い式 (11) を整理すると, 4階の微分方程式

$$Av^{(iv)} - 2B\gamma_m^2 v'' + C\gamma_m^4 v = 0 \quad (23)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} A = & (G_t + \sigma_{11}) [G^* \{ (1-\alpha) + \kappa(1-\delta) \} \\ & + (1-\alpha\delta)\sigma_{11}], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{2} \left[4G^{*2}\kappa + 2G^*G_t(1-\kappa) \right. \\ & + G^*\sigma_{11} \{ (1+\alpha) + \kappa(1+\delta) \} \\ & + G^*\sigma_{22} \{ (1-\alpha) + \kappa(1-\delta) \} \\ & \left. + (1-\alpha\delta) \{ G_t(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2\sigma_{11}\sigma_{22} \} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C = & (G_t + \sigma_{22}) [G^* \{ (1+\alpha) + \kappa(1+\delta) \} \\ & + (1-\alpha\delta)\sigma_{22}] \end{aligned} \quad (26)$$

と定義した. さらに, 境界条件は式 (16), (18) に式 (20), (21) を代入することにより, 次のように求められる.

$$Pv'' + \gamma_m^2 Qv = 0, \quad (27)$$

$$Av''' - \gamma_m^2 Rv' = 0 \quad (28)$$

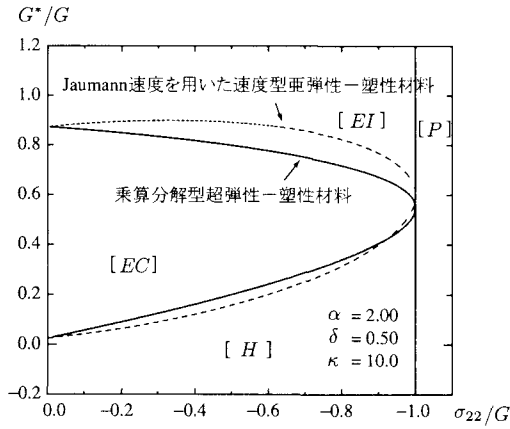


図-3 解の領域

ここで,

$$P = (G_t + \sigma_{11}) \left[G^* \{ (1 + \alpha) - \kappa(1 + \delta) \} \right], \quad (29)$$

$$Q = -G_t \left[G^* \{ (1 + \alpha) + \kappa(1 + \delta) \}, \right. \\ \left. + (1 - \alpha\delta)\sigma_{22} \right], \quad (30)$$

$$R = 4G^{*2}\kappa + G^*G_t \{ (1 - \alpha) - \kappa(1 - \delta) \} \\ + G^*\sigma_{11} \{ (1 + \alpha) + \kappa(1 + \delta) \} \\ + G^*\sigma_{22} \{ (1 - \alpha) + \kappa(1 - \delta) \} \\ - (1 - \alpha\delta)\sigma_{11}\sigma_{22} \quad (31)$$

である.

3.2 支配方程式における解の分類

微分方程式 (23) の一般解 $v(x_1)$ は

$$v(x_1) = \sum_{j=1}^4 A_j \exp(i\gamma_m \omega_j x_1) \quad (32)$$

である. ここで, $i = (-1)^{1/2}$ は虚数単位である. 式 (32) を式 (23) に代入すると, ω_j を根とする 4 階の微分方程式

$$Av^{(iv)} + 2Bv'' + Cv = 0 \quad (33)$$

に書き換えられる. この 4 階の微分方程式 (33) の 4 つの解のうち実数解が 0 個, 2 個, 4 個のとき, それぞれ楕円領域 (E 領域), 放物線領域 (P 領域), 双曲線領域 (H 領域) に分類される. さらに, E 領域では 4 つの複素数解を持つ場合を EC 領域, 4 つの純虚数解を持つ場合を EI 領域とする. この 4 つの領域における支配方程式の分類条件は, 式 (33) と式 (24)~(26) を用いて次のように表される.

EC 領域:

$$B^2 - AC < 0 \quad (34)$$

EI 領域:

$$AC > 0, \quad B^2 - AC < 0, \quad B/A > 0 \quad (35)$$

P 領域:

$$AC < 0 \quad (36)$$

H 領域:

$$AC > 0, \quad B^2 - AC > 0, \quad B/A < 0 \quad (37)$$

図-3 は, 縦軸をせん断弾性定数 G で正規化した 45 度せん断剛性 G^*/G , 横軸を x_2 軸方向の応力 σ_{22}/G とした面上で, 式 (34)~(37) で示す支配方程式 (33) の解の領域を示したものである. 同図は, Chau and Rudnicki⁴⁾ にならい, 構成パラメータの値を $\alpha = 2.00$, $\delta = 0.50$, $\kappa = 10.0$ とした場合の例である. 図-3 では, 乗算分解型超弾性-塑性材料の定式化に基づく各領域の境界を実線で, Jaumann 速度を用いた速度型超弾性-塑性材料の定式化に基づく各領域の境界⁴⁾を破線で示した. Jaumann 速度を用いた速度型超弾性-塑性材料の場合, EC 領域とその他の領域との境界を表す条件式 $B^2 - AC = 0$ は, G^*/G_t に関する 2 次方程式となるのに対して, Truesdell 速度で表される速度型構成式が自然な形として導かれる乗算分解型超弾性-塑性材料の場合, この条件式は 4 次方程式となる. このとき, 後者の方が放物線状の凸形状が鋭くなっていることが分かる. このことから, 構成式を表す応力速度が異なることで生じる曲線形の違いが, EC 領域から H 領域に移行する際の応力状態に影響を与えていると考えられる.

3.3 EC 領域の分岐条件式

微分方程式 (33) の 4 つの根が, 共役複素数 $\omega = +p \pm iq$, $\omega = -p \pm iq$ である場合の分岐条件について考える. 特に, 根の 1 つが $\omega = p + iq$ であるとする. このとき,

$$p^2 - q^2 = -\frac{B}{A}, \quad p^2 + q^2 = \sqrt{\frac{C}{A}} \quad (38)$$

となる. また, 対称分岐モードが現れるときの微分方程式の一般解は,

$$v(x_1) = \text{Re}[C_1 \sin(\gamma_m \omega x_1)] \quad (39)$$

であり, 反対称分岐モードのときの一般解は,

$$v(x_1) = \text{Re}[C_1 \cos(\gamma_m \omega x_1)] \quad (40)$$

である. ここで, $\text{Re}[\dots]$ は $[\dots]$ の実部, C_1 は任意の定数である. 結果的に分岐条件式は,

$$\frac{q \sin(2p\gamma_m a_1)}{p \sinh(2q\gamma_m a_1)} = \pm \frac{(A/C)^{1/2} + \frac{(AQ + PR)}{PC - Q(R - 2B)}}{(A/C)^{1/2} - \frac{(AQ + PR)}{PC - Q(R - 2B)}} \quad (41)$$

となる. ここで, 右辺の符号が '+' の時は対称分岐モードに, '-' の時は反対称分岐モードに対応する.

3.4 EI 領域での分岐条件式

微分方程式 (33) の 4 つの根 ω は純虚数 $\omega = \pm ip, \pm iq$ ($p > 0, q > 0$) で表される。このとき、 p, q の関係は、

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{B}{A}, \quad \frac{1}{2}(p^2 - q^2) = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (42)$$

である。対称分岐モードにおける一般解 $v(x_1)$ は、

$$v(x_1) = C_1 \sinh(\gamma_m p x_1) + C_2 \sinh(\gamma_m q x_1) \quad (43)$$

で表される。反対称分岐モードにおける一般解は

$$v(x_1) = C_1 \cosh(\gamma_m p x_1) + C_2 \cosh(\gamma_m q x_1) \quad (44)$$

で表される。ここで、 C_1, C_2 は任意の定数である。式 (43), (44) を境界条件式 (27), (28) に代入すると、対称分岐モードの分岐条件式は

$$\frac{p \tanh(\gamma_m q a_1)}{q \tanh(\gamma_m p a_1)} = \frac{(P p^2 + Q)(A p^2 + R - 2B)}{(P q^2 + Q)(A q^2 + R - 2B)} \quad (45)$$

となり、反対称分岐モードの分岐条件式は

$$\frac{p \tanh(\gamma_m p a_1)}{q \tanh(\gamma_m q a_1)} = \frac{(P p^2 + Q)(A p^2 + R - 2B)}{(P q^2 + Q)(A q^2 + R - 2B)} \quad (46)$$

となる。

3.5 P 領域での分岐条件式

P 領域における微分方程式 (33) の一般解は、対称モードでは、

$$v(x_2) = C_1 \sin(p \gamma_m x_2) + C_2 \sinh(q \gamma_m x_2) \quad (47)$$

となり、反対称モードでは、

$$v(x_2) = C_1 \cos(p \gamma_m x_2) + C_2 \cosh(q \gamma_m x_2) \quad (48)$$

となる。ここで、 p, iq はそれぞれ微分方程式 (33) の実数根および虚数根であり、

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{\sqrt{B^2 + |AC|}}{|A|}, \quad \frac{1}{2}(p^2 - q^2) = -\frac{B}{A} \quad (49)$$

という関係が成り立つ。これらを境界条件式 (27), (28) に代入すると P 領域における分岐が発生する時の固有方程式が得られる。対称モードの分岐条件式は、

$$\frac{\tan(p \gamma_m a_1)}{\tanh(q \gamma_m a_1)} = \frac{p(P q^2 + Q)(A q^2 + R - 2B)}{q(P p^2 - Q)(A p^2 + R - 2B)} \quad (50)$$

となり、反対称モードの分岐条件式は

$$\frac{\tanh(q \gamma_m a_1)}{\tan(p \gamma_m a_1)} = -\frac{p(P q^2 + Q)(A q^2 + R - 2B)}{q(P p^2 - Q)(A p^2 + R - 2B)} \quad (51)$$

となる。

3.6 H 領域での分岐条件式

H 領域における微分方程式 (33) の一般解は、対称モードでは、

$$v(x_2) = C_1 \sin(p \gamma_m x_2) + C_2 \sin(q \gamma_m x_2) \quad (52)$$

となり、反対称モードでは、

$$v(x_2) = C_1 \cos(p \gamma_m x_2) + C_2 \cos(q \gamma_m x_2) \quad (53)$$

となる。ここで、 p, q は微分方程式 (33) の実数根であり、

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) = -\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{2}(p^2 - q^2) = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (54)$$

という関係を持つ。これらを境界条件式 (27), (28) に代入すると、H 領域において分岐が発生する時の固有方程式が得られる。対称モードの分岐条件式は、

$$\frac{\tan(p \gamma_m a_1)}{\tan(q \gamma_m a_1)} = \frac{p(Q - P q^2)(R - 2B - A q^2)}{q(Q - P p^2)(R - 2B - A p^2)} \quad (55)$$

となり、反対称モードの分岐条件式は

$$\frac{\tan(q \gamma_m a_1)}{\tan(p \gamma_m a_1)} = \frac{p(Q - P q^2)(R - 2B - A q^2)}{q(Q - P p^2)(R - 2B - A p^2)} \quad (56)$$

となる。

4. 理論解法における分岐解析

4.1 1 要素解析による構成式応答

本節では乗算分解型超弾性-塑性材料について弾塑性有限要素法による 1 要素解析を行う^{12),17),15)}。次節以降では理論解法で用いられる分岐条件による分岐の判定を行うが、その際に用いる構成パラメータ α, δ, κ および瞬間せん断剛性 G_t は変形の進展に伴って変化する瞬間係数であり、これを 1 要素解析の結果に基づき各ステップのつり合い状態での応力・ひずみをもとに算出することとした。

解析モデルは寸法や境界条件を図-1 で示される長方形供試体と一致するようにした 4 節点アイソパラメトリック要素からなる 1 要素モデルである。供試体寸法は幅 W_0 、高さ H_0 とし、初期の供試体形状比を $H_0/W_0 = 2.00$ とした。載荷条件は平面ひずみ供試体の上端に y 方向の圧縮荷重 F を与え、側圧は $\sigma_{11} = 0$ とした。現配置における供試体の幅を W 、高さを H とすると、供試体に発生する軸荷重は $F/W (= \sigma_{22})$ となる。

乗算分解型超弾性-塑性材料に関する定式化は、付録 I で示す。Hencky 超弾性モデルの Lamé 定数は $\lambda = 11.54 \text{ MPa}$ 、 $\mu = 7.69 \text{ MPa}$ とした。また、降伏関数および塑性ポテンシャル関数には Drucker-Prager モデルを用いて、塑性流動則は関連型とした。内部摩擦角は 23.1° とし、このとき、それらに関わる材料定数は $\beta_f = 0.55$ 、 $\beta_g = 0.55$ となる。塑性ひずみに関する硬化関数 $q(\xi)$ は、ここでは、

$$q(\xi) = -\left[\hat{\tau}_{y0} \left(1 + \frac{\xi}{\hat{\varepsilon}_{y0}}\right)^m - \hat{\tau}_{y0}\right] \quad (57)$$

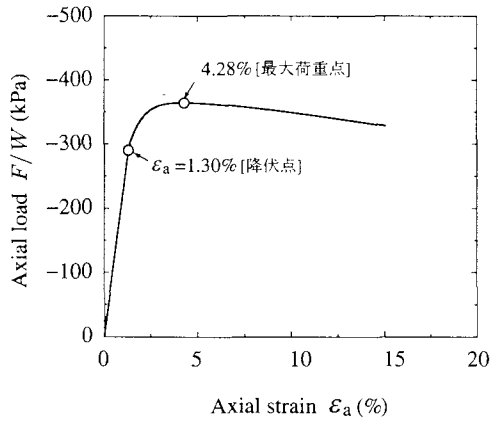


図-4 つり合い経路

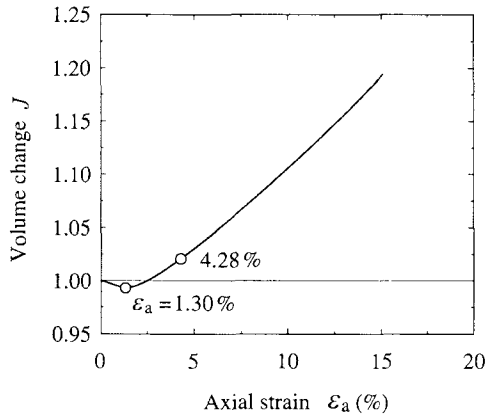


図-5 体積変化率

という形式を用いた。ここで、 ξ は塑性ひずみに関する内部変数である。各定数は、初期降伏応力 $\hat{\tau}_{y0} = 100\text{kPa}$ 、初期降伏ひずみ $\varepsilon_{y0} = 0.005$ 、塑性硬化に関するパラメータ $m = 0.03$ とした。このとき、塑性硬化係数は常に $H(\xi) = -\partial q(\xi)/\partial \xi > 0$ なので、このモデルは Kirchhoff 応力 τ で表示した場合には硬化型の挙動を示す。これらの材料定数は実験的に求められたものではないが、粘着性を有する地盤材料として常識的な範囲内で適当に設定したものである。

上述の解析条件で1要素解析を行う。図-4は解析により得られたつり合い経路である。縦軸は軸荷重 $F/W (= \sigma_{22})$ で表している。つり合い経路は軸ひずみ ε_a の進展に伴い1.30%で初期降伏点を通過し、4.28%で荷重極大点となり、それ以後は軟化挙動を示している。図-5は体積変化率 J の変化を表しており、弾性変形中は圧縮、降伏後は膨張を示している。ここで、Kirchhoff 応力と Cauchy 応力との関係 $\tau = J\sigma$ より、Kirchhoff 応力で表した硬化関数に硬化モデルを用いているにも拘わらず、図-4のつり合い経路は軟化挙動を示していることが分かる。

本解析で求めた構成式応答は、有限要素法による境界値問題の増分解析の結果として得られた構成式応答であり、速度型構成式を厳密な意味で（解析的に）時間積分した結果ではない。しかしながら、今回の数値解析で用いたアルゴリズムはステップサイズ依存性が少なく、また、厳密に降伏面上にのった応力状態を追跡可能

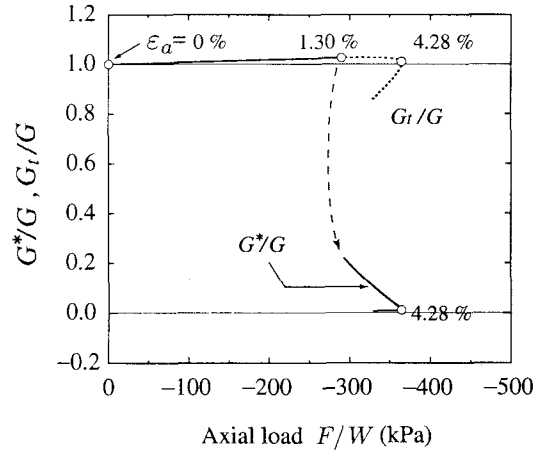


図-6 変形の進展に伴う G^* および G_t の変化

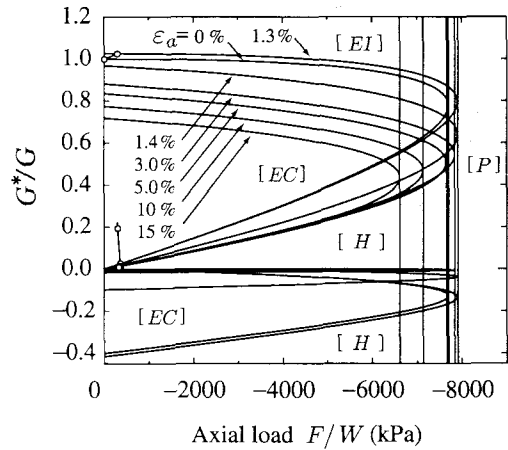


図-7 供試体の変形に伴う支配方程式の解の領域境界の変化

である^{12),17)}。こうして得られた各ステップの応力状態から、分岐解析に必要な構成パラメータ $G^*, \kappa, \alpha, \delta, G_t$ を求める。その具体的な定式化は付録 I で示す。

4.2 現状態 ($\sigma_{22}, G^*/G$) と支配方程式の解の領域

図-6は乗算分解型超弾性-塑性材料に基づく45度せん断剛性 G^* とその瞬間的なせん断剛性 G_t に対する応力・変形状態との関係を示している。実線は45度せん断剛性に関する変化 G^*/G 、破線はせん断剛性係数に関する変化 G_t/G である。(○)は軸ひずみ ε_a が図中に示した値の時の現状態の点 ($\sigma_{22}, G^*/G$) である。図-6の縦軸では、 G^* と G_t の比較を行うために、Hencky 超弾性モデルのせん断弾性定数 $G (= \mu)$ で正規化を行っている。以後は応力 σ_{22} と G^*/G の関係において、ある瞬間の状態を表す点を現状態 ($\sigma_{22}, G^*/G$) とする。

乗算分解型超弾性-塑性材料から導かれる45度せん断剛性 G^* の変化について考える。軸ひずみ $\varepsilon_a = 1.30\%$ 付近で初期降伏点を過ぎて塑性領域に入ると G^*/G は、 $G^*/G = 0.2$ 付近までジャンプする。これは式 (I.6)~(I.9) における塑性変形に関する項が影響を及ぼすためである。降伏後の G^*/G は荷重極大点に至るまで急速に減少する。そして、荷重極大点 $\varepsilon_a = 4.28\%$ 以降は応力 σ_{22} の絶対値の低下（軟化）は見られるが、 G^*/G 自体の値の変動はあまり見られず、 $G^*/G < 0$

になることもない。同様の現象は、Jaumann 応力速度を用いた速度型弾性－塑性材料に関する Hill and Hutchinson¹⁾で論じられている。

乗算分解型超弾－塑性材料から導かれるせん断剛性 G_t は、式 (I.16) で示されるように、現応力状態での主応力や弾性主ストレッチに依存する瞬間せん断剛性であり、一定値ではない。そのため、 G_t/G の挙動は、弾性領域では解析開始直後から $G_t/G \geq 1.0$ となる。このとき、 G^* と G_t は同じ値を示している。初期降伏点を通過すると、 G_t/G は図-5 で示されている体積変化率 J の増大に伴い小さくなっていく。そして、荷重極大点 $\varepsilon_a = 4.28\%$ 付近から $G_t/G \leq 1.0$ となり、その後も減少していく。さらに、 G_t/G は応力や主ストレッチの影響によっても変化すると考えられる。応力や主ストレッチの影響によって材料に生じるせん断剛性が刻々と変化することは、乗算分解型超弾性－塑性材料における Hencky 超弾性モデルの非線形性によるものである。

図-3 に示した支配方程式の領域は、構成パラメータ $\kappa, \alpha, \delta, G_t$ をある一定値として表したものである。図-3 では、Chau and Rudnicki⁴⁾にあるパラメータの一例として用いられている値を用いたが、これらは何らかの境界値問題を解いて得られた値ではないため、実際の境界値問題では生じ得ない応力の範囲となっている可能性がある。そこで、図-7 では第 4 節において 1 要素解析から各ステップで求められた構成パラメータ κ, α, δ および瞬間せん断剛性 G_t を固定値として支配方程式 (33) の領域の変化と図-6 で示す現状態との関係について調べることにする。弾性変形中の解の領域は、現状態の増加に伴い EC 領域自体も徐々に大きくなっていく。 $\varepsilon_a = 1.3\%$ の降伏点を過ぎると、現状態は EC 領域内に入り、 $\varepsilon_a = 4.28\%$ の荷重極大点に至るまで急速に小さくなる。このときの EC 領域は現状態と共に小さくなっていく。その後は、P 領域との境界線が左に大きくシフトするようになる。図-6 における横軸の大きさについて、1 要素解析から得られる現状態と支配方程式 (33) の解の領域を比較すると、現状態の示す範囲が極端に狭いことが分かる。この横軸に関する応力の差は、Hencky 超弾性モデルにおけるせん断弾性係数 μ と材料の初期降伏応力 $\hat{\tau}_{y0}$ の大きさによって決まるものである。このことから、摩擦性材料における常識的な範囲での材料定数を用いた場合、現状態が P 領域に達することが非現実な現象であることが分かる。

4.3 拡散型分岐の発生

第 3 節で述べたように、拡散型分岐モードの発生には、拡散型分岐発生時の変形形状（変形モード）や境界条件を用いて分岐に関する支配方程式 (33) の解を求める必要がある。それに対する解は、第 3.3～3.6 節において示した 4 つの各領域の拡散型分岐条件式から求められる。本研究では、1 要素解析の各ステップ毎に式 (34)～(36) を用いて現状態における支配方程式の領域を求め、それに対応した拡散型分岐条件式における残差 $R_{bif} = (\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 0$ となる瞬間を拡散型分岐発生点として考えた。図-8 中の左図において軸荷重 F/W に対する分岐条件式の残差 R_{bif} を示し、拡散型

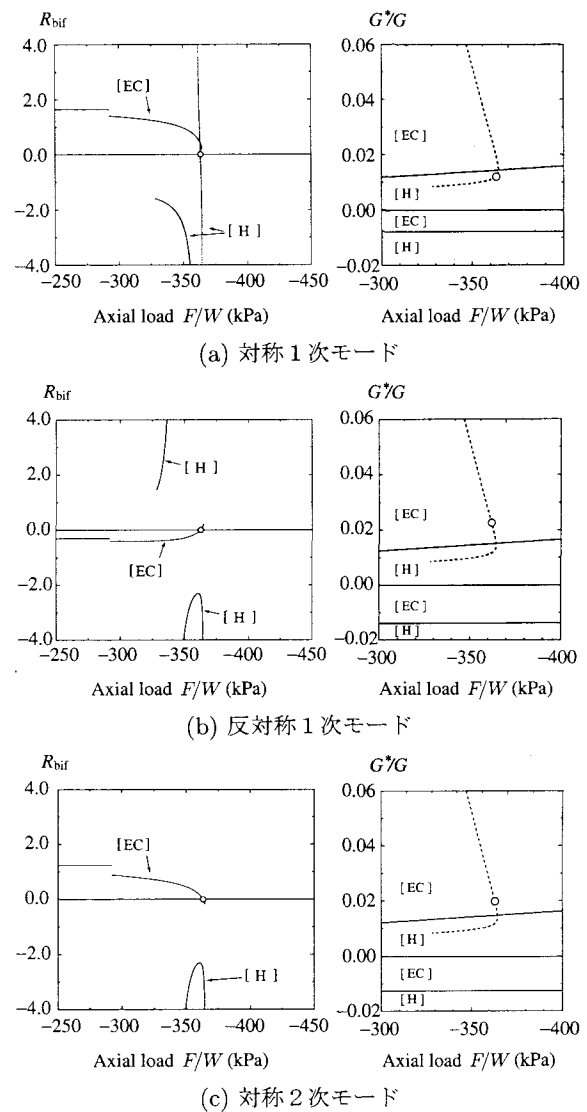


図-8 分岐条件式の残差と分岐発生時の現応力状態

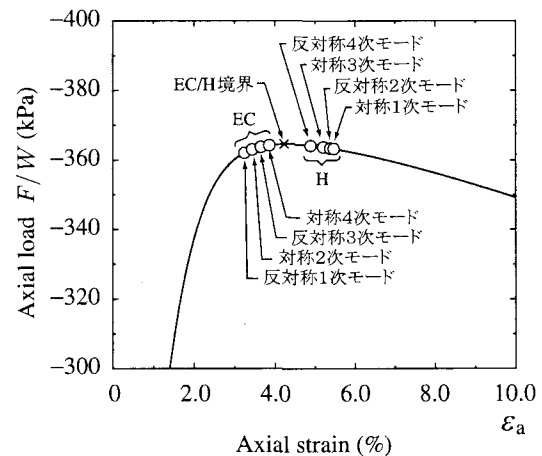


図-9 つり合い経路上の分岐発生点

分岐発生時の現状態を (○) で示した。図-8 中の左図では、 $F/W = 280$ kPa 付近で塑性域に達したあと、ある応力状態における R_{bif} が EC 領域を示しながら、応力の増大に伴い徐々に $R_{bif} = 0$ に近づくことが分かる。このとき、図-8 中の (b) 反対称 1 次モードおよび (c)

対称2次モードでは、支配方程式の解がEC領域を示す間に $R_{bif} = 0$ となる点に達した。しかしながら、(a) 対称1次モードではEC領域中では拡散型分岐が発生せずに、H領域に移ったあとで $R_{bif} = 0$ となった。また、図-8中の右図では、各変形モードにおける分岐点での軸荷重 $F/W - G^*/G$ 関係を示しており、拡散型分岐発生時の現状態を(○)で示した。そして、同様な方法で反対称4次モードまでの分岐点を求めた。図-9には、以上の結果から得られる拡散型分岐点を(○)印で示し、EC/Hの変化が生じるひずみレベル $\varepsilon_a = 4.22\%$ の点を(x)印で示した。また、そのときの応力状態(分岐発生時の解の領域、分岐荷重、軸ひずみ)を表-1中の「理論解法で用いられる分岐条件の解」で示した。

図-9で示すように、反対称1次モードが最も早く発生し、それ以後は、様々な変形モードの分岐点がEC/H境界を中心に多数集積して発生した。このようなことは、Hill and Hutchinson¹⁾においても指摘されている。分岐の発生する順序に関して、EC領域内では変形が進むにつれて低次のモードから高次のモードが現れ、H領域内では高次から低次のモードが現れることが分かる。そして、高次のモードについて調べた場合、その分岐点はEC/H境界 $\varepsilon_a = 4.22\%$ (または荷重極大点 $\varepsilon_a = 4.28\%$) 付近に集積することが分かった。また、各分岐点に対して軸荷重 F/W に対する変化は殆ど見られないが、軸ひずみ ε_a に対してはおおよそ2%程の範囲内での変化が見られた。そのため、分岐発生時の応力状態は、非常に僅かな影響を受けて様々な変形モードが現れる可能性を示している。

5. 数値解法による分岐解析

5.1 数値分岐解析における分岐発生条件

数値分岐解析において用いる分岐条件について述べる。弾塑性境界値問題における解の唯一性の十分条件は、Hill²⁾により議論されている。この弾塑性分岐条件を速度形式の現配置表記で表すと、

$$\int_{\varphi_t(B)} \left[\mathbf{l}^* : \frac{1}{J} \mathbf{c}^{\text{ep}} : \mathbf{l}^* + \boldsymbol{\sigma} : [\mathbf{l}^{*T} \cdot \mathbf{l}^*] \right] dv = 0 \quad (58)$$

である。ここで、 $\mathbf{c}^{\text{ep}}$ は弾塑性接線係数、 $\mathbf{l}$ は速度勾配、上付き添字(*)は基本経路と分岐経路にそれぞれ対応する変位速度場の相違なる2つの解の差であることを示す。変位速度 $\mathbf{v}^*$ を変位増分 $\Delta \mathbf{u}^*$ に置き換え、式(58)を有限要素離散化すると、 $\Delta \mathbf{u}^* \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^* = 0$ となる。接線剛性マトリックス $\mathbf{K}$ が特異性条件

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (59)$$

を満たすときに非自明解 $\Delta \mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$ が存在する。従って、式(59)を判定することにより、拡散型分岐モードの分岐点(あるいは荷重極大点)を求めることができ、ゼロ固有値に対応する固有ベクトル $\Delta \mathbf{u}^*$ が分岐モードとなる。そのため、各つり合い点において接線剛性マトリックス $\mathbf{K}$ の固有値を求め、ゼロ固有値が発生する点を分岐点として考える。基本経路から分岐経路への切り替えに関する数値解析上の手続きは、山川ら¹⁵⁾、Ikeda et al.¹⁷⁾示されている方法に従った。

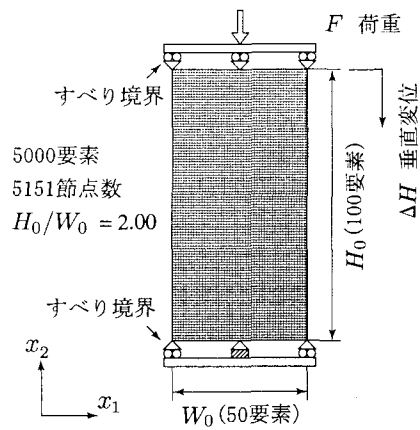


図-10 有限要素供試体モデル

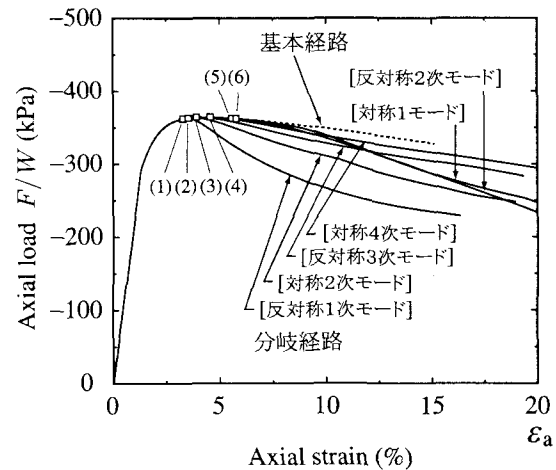


図-11 数値解法におけるつり合い経路上の分岐点と分岐後のつり合い経路

5.2 解析モデルと境界条件

解析モデルは、第4.1節と同一の条件とし、図-10に示す通りとした。有限要素メッシュは均等分割の4節点アイソパラメトリック要素を用いた。平面ひずみ状態を仮定し、供試体の上端に一樣なy方向下向きの変位が与えられるものとする。上下端面の拘束条件については、剛体移動を止めるために下面中央部の1点のみを拘束して、それ以外はx方向の変位を自由とし、端面摩擦の無い境界とした。また、一樣変形の過程における応力状態を理論解法の時と同一とするため、全ての材料定数は第4節の1要素解析で用いた値と同一とした。

5.3 つり合い経路と分岐モード

上述の解析条件において弾塑性有限要素分岐解析を行った。図-11には基本経路上に発生した分岐点を(□)で、基本経路を破線で、各分岐モードに対する分岐経路を実線でそれぞれ示している。図中の括弧付きの数字は分岐点の番号である。ここで分岐点番号とは、基本経路上の解析過程で分岐点を確認された順とする。この解析の結果、一樣変形が持続している基本つり合い経路上に6個の単純分岐点を確認された。これらの分岐点は非常に近い分岐荷重で近接して発生しているこ

表-1 分岐点における応力状態

分岐モード	理論解法で用いられる分岐条件の解			FEM で求められた数値分岐解			軸ひずみの差 (%) (数値解 - 理論解)
	分岐発生時の 解の領域	分岐荷重 (kPa)	軸ひずみ ϵ_a (%)	分岐 番号	分岐荷重 (kPa)	軸ひずみ ϵ_a (%)	
反対称 1 次	EC 領域	362.2	3.24	1	362.3	3.26	0.02
対称 2 次	EC 領域	363.2	3.43	2	363.6	3.52	0.09
反対称 3 次	EC 領域	363.9	3.65	3	364.5	3.90	0.25
対称 4 次	EC 領域	364.3	3.85	4	364.6	4.55	0.72
反対称 4 次	H 領域	364.2	4.88	—	—	—	—
対称 3 次	H 領域	363.8	5.20	—	—	—	—
反対称 2 次	H 領域	363.5	5.37	6	362.6	5.81	0.44
対称 1 次	H 領域	363.3	5.46	5	363.1	5.55	0.09

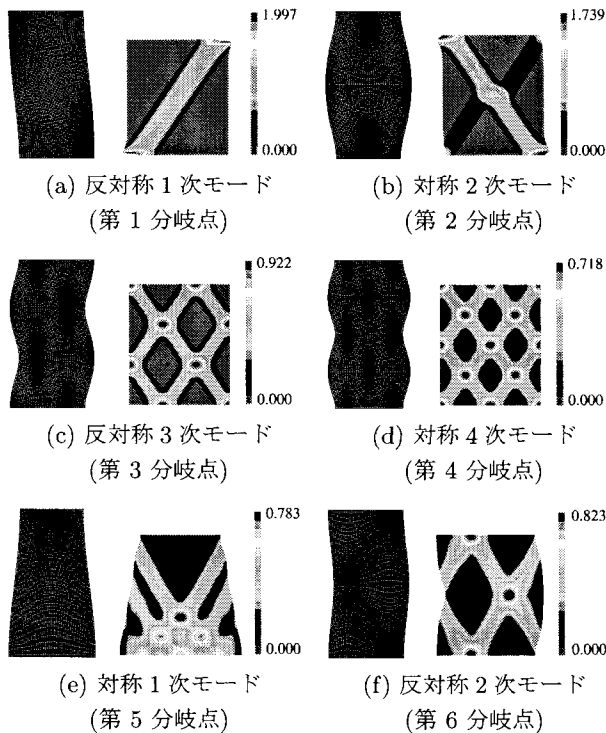


図-12 分岐モードと偏差ひずみの分布

とが分かる。基本経路と分岐発生後の分岐経路に関して見ると、軸荷重 F/W の低下の度合いは、図で見る限りでは低次の分岐経路ほど度合いが大きい傾向がある。さらに、分岐後の経路における荷重は、いずれも基本経路よりも低くなっていることが分かる。また、数値分岐解析により求められた各分岐モードに対する分岐発生点での応力・ひずみを表-1 中の「FEM で求められた数値分岐解」の部分で示した。図-12 は、各図 (a)~(f) の左側に各分岐点における分岐モードを、右側に軸ひずみ $\epsilon_a = 15\%$ 付近となったときの変形の様子と偏差ひずみの分布を分岐点番号順に示したものである。ここで、各図中左側の分岐モードは y 軸に関して対称あるいは反対称の拡散型分岐モードであり、変形モードが分かり易いようにスケールしてある。また、せん断ひずみは対数ひずみの偏差成分ノルムで示してある。

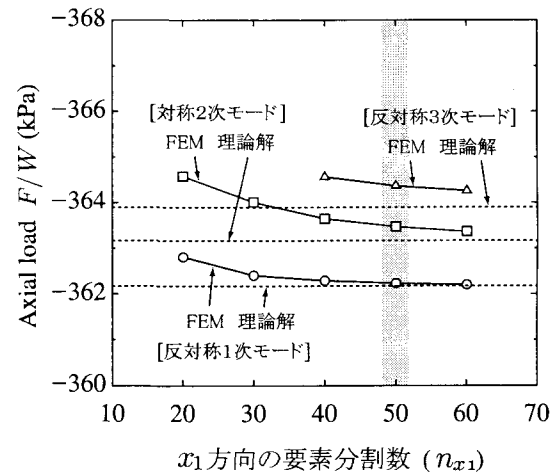


図-13 FEM による要素分割数毎の分岐荷重と解析解による分岐荷重

表-1 に示すように本研究における数値分岐解析では、対称 3 次モードおよび反対称 4 次モードに対する分岐モードが現れなかった。そのため、より高次の分岐モードを検知するためには、さらに多くの要素数が必要となると考えられる。しかしながら、砂の三軸試験で現実に観察されるような変形モード^{18),20)}を対象とする場合、本解析で用いた程度の要素数で現実に生じる全ての分岐点を十分に検知できると考えられる。

さらに、数値分岐解析における拡散型分岐発生点と要素数の関係について図-13 で示した。ここで、縦軸は拡散型分岐発生時の軸荷重であり、横軸は図-10 で示す x_1 方向の要素数 n_{x1} である。前述の数値分岐解析で用いた解析結果は $n_{x1} = 50$ の場合であり、グレーのメッシュ部分で示した。また、第 4 節での理論解法を用いた分岐条件式の解を破線で示した。これにより、数値分岐解析で求められた拡散型分岐点は、要素数が多くなるほど全変形モードにおいて理論解へ漸近していることが分かる。ただし、反対称 3 次モードのような高次のモードにおける数値解析の解と理論解との差は、反対称 1 次モードのそれよりも大きくなっている。しかしながら、この場合も要素数を多くすることで理論解に近づくものと考えられ、数値分岐解析での解の精度に関しても低次の変形モードを対象とする場合、本

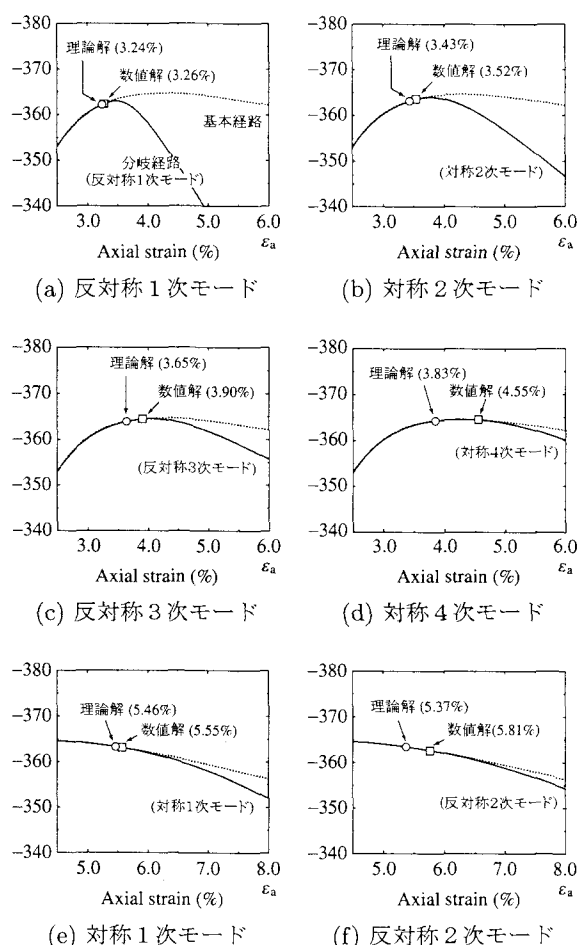


図-14 理論解と数値解に関する拡散型分岐発生時の現状

解析で用いた程度の要素数で十分であると考えられる。

6. 拡散型分岐条件に関する理論解法と数値解法との比較

第1節で述べたように、理論解法による拡散型分岐モードの分岐条件と数値解法による分岐条件とは全く異なっており、理論解法を直接的に方法で求めた分岐点発生点に着目し、理論解法を用いた拡散型分岐条件の解と数値分岐解析との精度検証を行うこととした。

図-14では、拡散型分岐モード毎のつり合い経路とその分岐点を示している。基本経路は破線で、分岐経路は実線でそれぞれ示した。また、理論解法により求められた分岐点を(○)、数値解法により求めた分岐点を(□)で示し、括弧内の数値は分岐発生時の軸ひずみ ε_a を表している。表-1の右端に、分岐点における軸ひずみについて、理論解と数値解の差を示した。

図-14および表-1から分かるように、全ての变形モードにおいて数値解が理論解にやや遅れて分岐点が発生している。しかし、低次の分岐モードほど数値解と理論解の差は小さい。特に、図-14中の(a), (b)で示される反対称1次モードと対称2次モードに関しては、良好な精度で数値解が得られたと考えられる。しかしながら、高次の分岐モードになるほど、理論解と数値解との差が大きくなっている。この原因の一つと

して、数値解法においてゼロ固有値に対応する固有ベクトルから求められる分岐モードは、理論解法で想定している分岐モード(式(20), (21))と必ずしも完全に一致するとは限らないことが挙げられる。また前述のように、要素数が分岐モードを正確に表現しう程度に満たない場合、数値解法による分岐点は理論解法のそれよりも遅れて検出される事も考えられる。本解析でも高次の分岐モードになるほど理論解の分岐点の位置とのズレが大きくなっているが、これも同様の原因によるものと考えられる。しかしながら、現実的な供試体の挙動としては、高次の分岐モードよりも、主に1次、2次モードなど比較的低次の分岐モードが現れる場合ははるかに多く、こうした現実的な分岐挙動の解析において数値解法は良好な精度を示すことが分かった。

以上のように、数値解法による分岐解析では、要素数の影響など有限要素法特有の問題点が少なからず含まれており、全ての分岐モードが解析可能とは限らない。また、分岐モードの波数に対して要素数が少ない場合には、分岐点の位置に若干の誤差があることが分かった。このような問題点はあるが、比較的低次の分岐モードについては良好な精度を与え、また、数値分岐解析は分岐後の変形挙動を追跡できるという大きな利点を有することが言える。

7. まとめ

本研究では、平面ひずみ条件下での弾塑性材料の分岐解析を行った。著者らは、従来の多くの解析で対象とされてきた非圧縮変形(地盤材料試験では非排水条件に相当)に限定せず、圧縮変形を含む変形(排水試験に相当)も検討可能な一般化された定式化が構築することを目的とし、Chau and Rudnicki⁴⁾にならって、材料モデルとして有限ひずみに対応した乗算分解型超弾性-塑性材料を用い、速度型構成式における瞬間接線係数の具体的形式を導出した。はじめに、解析的理論解法による分岐解析の定式化を示し、分岐条件式を導出した。この際、分岐発生時点の体積変化を含む変形を表現できる関数形を用いて、分岐モードの変位速度場を表した。

次に、場のつり合いに関する支配方程式としての偏微分方程式の解の特性を調べ、平面ひずみ圧縮の応力経路上の拡散型分岐点について理論解法を用いた分岐条件式により拡散型分岐モードの分岐発生応力を計算した。従来の理論解法による分岐解析では、弾性部分にHooke則を仮定し、Jaumann速度を用いた亜弾性-塑性材料が用いられているが、これとの比較も行った。

最後に、有限要素法を用いた数値分岐解析を行い、数値解法により求められた分岐点と理論解を用いた分岐条件から得られる解との比較を行った。その結果、比較的低次の分岐モードについては、数値解は理論解と良好な一致を示し、砂の三軸試験などの現実的な分岐挙動に対する数値分岐解析の有用性が確認された。

付録 I 構成パラメータの定式化

ここでは、変形勾配の乗算分解

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (\text{I.1})$$

と超弾性構成式に基づく有限変形弾塑性材料の定式化を示す。Hencky 超弾性モデルと Drucker-Prager の降伏基準を用いた材料について、速度型構成式 (1), (2), (3) 中の構成パラメータ $\alpha, \delta, \kappa, G^*, G_t$ を具体的に示す。ここでは、弾性・塑性応答共に等方性を仮定し、また、塑性スピンの影響は考慮しない。

構成パラメータ $G^*, \kappa, \alpha, \delta$ は、それぞれ、

$$G^* = \frac{1}{2J} \left(A_1 - \frac{A_2 A_3}{A_4} \right), \quad (\text{I.2})$$

$$\kappa = \frac{A_4}{A_1}, \quad (\text{I.3})$$

$$\alpha = -\frac{A_3}{A_1}, \quad (\text{I.4})$$

$$\delta = -\frac{A_2}{A_4} \quad (\text{I.5})$$

で与えられる。ここで、係数 $A_1 \sim A_4$ は、

$$A_1 = 2\mu \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \mu P_2^2 \right) + \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2), \quad (\text{I.6})$$

$$A_2 = -\frac{1}{\Lambda} 2\mu P_2 \left\{ \mu P_1 + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_f \right\} + \frac{1}{2} (\chi_1 - \chi_2), \quad (\text{I.7})$$

$$A_3 = -\frac{1}{\Lambda} 2\mu P_2 \left\{ \mu P_1 + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_g \right\} + \frac{1}{2} (\chi_1 - \chi_2), \quad (\text{I.8})$$

$$A_4 = 2 \left[\lambda + \mu - \frac{1}{\Lambda} \left\{ \mu P_1 + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_f \right\} \times \left\{ \mu P_1 + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_g \right\} \right] + \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2) \quad (\text{I.9})$$

と表される。 $P_1 = (\hat{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{22}) / \|\hat{\tau}\|$, $P_2 = (\hat{\tau}_{11} - \hat{\tau}_{22}) / \|\hat{\tau}\|$ であり、 $\hat{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] \mathbf{I}$ は Kirchhoff 応力の偏差成分である。また、 λ, μ は Lamé 定数、 β_f, β_g はそれぞれ内部摩擦角およびダイレイタンシー角に関わる定数である。 Λ は、

$$\begin{aligned} \Lambda = & 2\mu + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_f \beta_g \\ & - 2 \left\{ 2\mu \varepsilon_1^e + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] - \tau_{11} \right\} \\ & \times \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \\ & + \left\{ 2\mu \varepsilon_2^e + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] - \tau_{22} \right\} \\ & \times \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \\ & + \left\{ 2\mu \varepsilon_3^e + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] - \tau_{33} \right\} \\ & \times \left(\frac{\hat{\tau}_{33}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \left(\frac{\hat{\tau}_{33}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \Big] \\ & + 2H(\xi) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

である。ここで、塑性硬化関数として、例えば、式 (57) の形式を用いると、塑性硬化係数 $H(\xi)$ は、

$$H(\xi) = -\frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\hat{\tau}_{y0}}{\varepsilon_{y0}} m \left(1 + \frac{\xi}{\varepsilon_{y0}} \right)^{m-1} \quad (\text{I.11})$$

となる。さらに、 χ_1, χ_2 は、

$$\begin{aligned} \chi_1 = & -2 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_1^e \right\} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \left[2 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_1^e - \tau_{11} \right\} \right. \\ & \times \left\{ \frac{2\mu}{\|\hat{\tau}\|} \hat{\tau}_{11} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_g \right\} \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \\ & + 2 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_1^e - \tau_{11} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{2\mu}{\|\hat{\tau}\|} \hat{\tau}_{11} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_f \right\} \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \\ & \left. - 4 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_1^e - \tau_{11} \right\}^2 \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \left(\frac{\hat{\tau}_{11}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \right], \quad (\text{I.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 = & -2 \left\{ 2\mu \varepsilon_2^e + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] \right\} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \left[2 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_2^e - \tau_{22} \right\} \right. \\ & \times \left\{ \frac{2\mu}{\|\hat{\tau}\|} \hat{\tau}_{22} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_g \right\} \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \\ & + 2 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_2^e - \tau_{22} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{2\mu}{\|\hat{\tau}\|} \hat{\tau}_{22} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \beta_f \right\} \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \\ & \left. - 4 \left\{ \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] + 2\mu \varepsilon_2^e - \tau_{22} \right\}^2 \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_f \right) \left(\frac{\hat{\tau}_{22}}{\|\hat{\tau}\|} + \frac{1}{3} \beta_g \right) \right] \quad (\text{I.13}) \end{aligned}$$

のように整理できる。ここで、 ε_A^e ($A = 1, 2, 3$) は弾性対数主ひずみである。Jaumann 速度を用いた速度型型超弾性-塑性材料の場合、式 (I.6)~(I.9) の係数 $A_1 \sim A_4$ は、各式の右边第 1 項のみで表され、Durban and Papanastasiou¹⁰⁾ の定式化に一致する。一方、乗算分解型超弾性-塑性材料の場合、各式の右边第 2 項のように現応力および弾性ひずみに依存する項 (χ_1, χ_2 を含む項) が現れる。この項は、弾性部分に線形 Hooke 則ではなく、超弾性構成式を用いたために現れたものである。つまり、 $A_1 \sim A_4$ は弾性対数主ひずみや現応力に依存することから、式 (I.2)~(I.5) の構成パラメータは、定数ではなく応力・変形状態に応じて変化する瞬間剛性である。このことから、本研究で用いた乗算分解型超弾性-塑性材料モデルは、Rudnicki and Rice⁵⁾ が用いたような尖り点効果や接線塑性などと同様に、応力・変形状態に応じたせん断剛性の変化を表現することができる。このようなせん断剛性の変化が分岐の発生に大きく影響を及ぼすことは、Rudnicki and Rice⁵⁾ などによって論じられている。

せん断応力とせん断ひずみに関する弾塑性構成式 (3) について考える。このとき、弾塑性接線係数 c_{1212}^{ep} は、

$$c_{1212}^{\text{ep}} = \frac{\tau_1 (\lambda_2^e)^2 - \tau_2 (\lambda_1^e)^2}{(\lambda_1^e)^2 - (\lambda_2^e)^2} \quad (\text{I.14})$$

で表されることから,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{12} &= 2\frac{1}{J}c_{1212}^{\text{ep}}d_{12} \\ &= 2G_t d_{12}\end{aligned}\quad (\text{I.15})$$

となる. ここで, G_t は瞬間せん断剛性であり, 弾性主ストレッチ λ_A^e , Kirchhoff 主応力 τ_A ($A = 1, 2, 3$) および体積変化率 J を用いて

$$G_t = \frac{1}{J} \frac{\tau_1(\lambda_2^e)^2 - \tau_2(\lambda_1^e)^2}{(\lambda_1^e)^2 - (\lambda_2^e)^2} = \frac{\sigma_1(\lambda_2^e)^2 - \sigma_2(\lambda_1^e)^2}{(\lambda_1^e)^2 - (\lambda_2^e)^2} \quad (\text{I.16})$$

となる. このように, Hencky 超弾性モデルを用いた乗算分解型超弾性-塑性材料の瞬間せん断剛性 G_t は, 応力・変形状態に依存する.

参考文献

- 1) Hill, R. and Hutchinson, J.W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 2) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
- 3) Needleman, A.: Non-normality and bifurcation in plane strain tension and compression. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 27 pp. 231-254, 1979.
- 4) Chau, K.-T. and Rudnicki, J.W.: Bifurcations of compressible pressure-sensitive materials in plane strain tension and compression. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 38, No. 6, pp. 875-898, 1990.
- 5) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 6) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-Clay model. *Soils and Foundations*, Vol. 29, pp. 41-53, 1989.
- 7) 志比 利秀, 矢富 盟祥, 亀井 健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響. 土木学会論文集, III-53, pp. 181-192, 2000.
- 8) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect. *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, pp. 1651-1677, 2003.
- 9) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials. *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Ses. 9, Murayama, S. and Schofield, A.N. Eds.)*, Tokyo, JSSMFE, pp. 73-82, 1977.
- 10) Durban, D. and Papanastasiou, P.: Elastoplastic Response of Pressure Sensitive Solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, pp. 423-441, 1997.
- 11) Simo, J.C.: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, pp. 61-112, 1992.
- 12) Simo, J.C. and Taylor, R.L.: Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 85, pp. 273-310, 1991.
- 13) Wang, X., Wang, L.B. and Xu, L.M.: Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models. *Computers and Geotechnics*, Vol. 31, pp. 315-338, 2004.
- 14) Ekh, M. and Runesson, K.: Modeling and numerical issues in hyperelasto-plasticity with anisotropy. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 9461-9478, 2001.
- 15) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性帯の分岐解析とパスジャンプ挙動. 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 73-86, 2002.
- 16) 佐藤 啓介, 山川 優樹, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 分岐解析によるひずみ局所化現象における供試体形状比と境界条件の影響に関する検討. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 5, pp. 329-338, 2002.
- 17) Ikeda, K., Yamakawa, Y. and Tsutsumi, S.: Simulation and interpretation of diffuse mode bifurcation of elastoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1649-1673, 2003.
- 18) 山川 優樹: 地盤材料のせん断帯形成における分岐現象と材料不安定性. 東北大学博士論文, 2003.
- 19) 山川 優樹, 池田 清宏, 寺田 賢二郎, 佐藤 啓介, 鳥居 邦夫: せん断帯分岐モードと強不連続変形の有限変形解析. 土木学会論文集, No. 743/III-64, pp. 59-76, 2003.
- 20) 山川 優樹, 池田 清宏, 須藤 良清, 寺井 信夫, 鳥居 邦夫: 砂の三軸試験供試体の分岐変形モードと寸法・形状効果. 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 357-371, 2002.

(2005 年 4 月 15 日 受付)