

陰解法リターンマップ手法を用いた圧縮荷重下における

亀裂先端近傍応力場の弾塑性 X-FEM 解析

X-FEM Analysis of stress fields near a crack tip under compressive loads using the implicit return mapping algorithm in an elastic-plastic material

李 炳奇*, 矢富盟祥**

Li Bingqi, Chikayoshi Yatomi

*博士 (工学) 金沢大学 21 世紀 COE プログラムポストドクター (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

**正会員 Ph. D. 金沢大学大学院自然科学研究科教授 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

Using a simple X-FEM, in which only the four-node quadrilateral isoperimetric elements in the fractured element are employed without the enrichment by the near-tip asymptotic solution, we analyze the stress distributions near a crack tip for an elastic-plastic material in a rectangular plate with a centered crack under two axial compressive loads. The friction forces assumed to follow the Coulomb law with a slip criterion is analyzed in the context of an implicit return mapping algorithm. The elastic-plastic material is also analyzed by the implicit return mapping algorithm. Thus the contact problem and the elastic-plastic material become a simultaneous combining incremental and iterative method of the same implicit scheme of the Newton-Raphson method. This makes the algorithm very simple. The stress distributions near the crack tip obtained by the simple X-FEM agree well with the exact solution in the elastic material and with the classical FEM solution in the elastic-plastic material.

Key Words: X-FEM, Elastic-plastic material, Coulomb law, Implicit return mapping algorithm

1. はじめに

破壊力学における有限要素法解析では、亀裂のような変位不連続面は、通常、要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって表現されている。したがって、特別な場合を除き、亀裂の進展形状は、あらかじめ設定された要素の形状や配置に限定された、ジグザグしたものとなる。この時、亀裂の進展形状を決定するためには、その方向を決定する破壊基準が必要である。それが例えば、汎用されている最大周応力破壊基準のように、亀裂先端近傍の応力が用いられた破壊基準を採用した場合、亀裂先端近傍の形状が要素の形状や配置に限定された、実際現象と大きく異なるジグザグしたものであれば、その近傍の応力もまた実際現象と大きく異なり、結局得られた亀裂形状は全く信頼出来ないものとなる。この欠点を避けるため、まず考えられたのが、亀裂が微小進展するごとに、亀裂が出来るだけ多くの方向に進めるように、亀裂先端近傍要素を逐次リメッシュする方法が考案された。しかし、解析コードの煩雑化や計算コストの膨大化のみならず、物体が弾塑

性体になれば、亀裂が進展した時、リメッシュ前後の同一点の応力の決定は不可能に近い。

このような背景の下で、最近になって、面倒な要素のリメッシュを避けるため、Simo ら¹⁾、Oliver²⁾ や Larsson ら³⁾ によって要素内に不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法や有限被覆法⁴⁾などが提案されている。前者の手法により荷重-荷重点変位関係などの解の要素依存性が大幅に軽減し、損傷モデルや弾塑性体などの亀裂進展解析が数多く報告されている。しかし、この手法によると、不連続な形状関数の作成が非常に複雑となる。特に注意すべき事は、この研究で汎用されている階段関数から1次の三角形形状関数を引くことにより作成された不連続な形状関数を用いた強不連続解析手法では、不連続面両側の全ひずみ成分が常に同一となってしまう。実際には、特別な場合を除き、不連続面に沿う方向のひずみは異なったものになる。これが同一に限定される事は、亀裂の進展挙動を捉える上で致命的な欠点である。この不連続面に沿う方向のひずみないし応力の違いが亀裂が直進しない現象の主要因であるからである。なお、有限被覆法では、物理被覆に加え数学被覆を用いるなど解析理論の複雑さはあるが、初期の亀裂面発生からその進展までを総合的に扱うことが可能であり、今後

の研究に期待する。

一方、最近になって物理的意味が分かり易い線形弾性体における簡便な手法として、拡張有限要素法

(X-FEM: eXtended Finite Element Method) と呼ばれる解析手法が Belytschko ら⁵⁾ や Moes ら⁶⁾ によって提案されている。この手法は、亀裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、その不連続量を単に要素節点に新たな自由度として付加することにより亀裂面の変位の不連続を表現できるようにしたものである。X-FEM は、未知量の増加により計算時間は多少増加するが、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易にプログラムを作成することが可能である。X-FEM では、線形弾性体内の亀裂の先端近傍の解をより精度の良いものとするために、変位の不連続を表す自由度だけでなく、メッシュフリー法でも使用された亀裂先端近傍の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度をも節点に付加することを提案している。しかし、この付加自由度によって、未知数が大幅に増加するだけでなく、物体が線形弾性体でなく、例えば、一般の非線形弾性体や弾塑性体の場合では、亀裂先端近傍の応力ないしひずみの特性は、特別な場合を除き未知であるため、亀裂先端近傍が小規模降伏状態になるような場合を除き精度の向上は望めない。最近、応力の $-1/2$ 特異性をもつ線形弾性体の変位分布の自由度を節点に付加する手法の弾塑性体への応用が長嶋ら⁷⁾ によって報告されている。

そこで、著者らの研究目的のひとつに、地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などの弾塑性体挙動する物体の破壊過程の解明にあるため、あえて、上記の応力の $-1/2$ 特異性を持つような変位分布の自由度を導入せず、強不連続解析の場合と同様に、変位の不連続量を表わす自由度のみ考慮し、亀裂先端を常に要素辺上に設定した簡便な X-FEM の手法を採用した研究を行ってきた。既報⁸⁾ では、この X-FEM 手法を用いて、無限板中央に亀裂があり、それを、亀裂と垂直な方向に一軸引っ張り荷重を作用させた場合において、亀裂の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を計算し、C.H. Wu⁹⁾ による半理論解との比較を行う事によりこの手法の精度の検証を行ない本 X-FEM 手法の有効性を確認した。

また、周知のように、地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などの破壊現象は、既報⁸⁾ のような引っ張り荷重下にある場合でなく、多くの場合、圧縮荷重下で生じる。そこで、既報¹⁰⁾ では、線形等方弾性体中の亀裂面が圧縮荷重下にある、亀裂面上に摩擦力が発生する問題への X-FEM 手法の応用を試みた。その中では、D. Perić ら¹¹⁾ が提案した、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換えるペナルティ法に基

づく摩擦モデルを採用した。そしてその解法には、以前から汎用されている陽解法増分法に比べて、最近、弾塑性解析手法として世界的に注目を浴びている増分・反復結合法であり、精度が良く計算時間も早い、ニュートン・ラフソン法を用いた陰解法リターンマップ手法¹²⁾ による弾塑性解析を行なった。著者らは、この新しく開発した X-FEM 解析手法により、一軸及び二軸圧縮荷重下にある亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を補ひずみエネルギー積分公式¹³⁾ を使用して解析した。亀裂が直進する場合には、理論式との比較を行い、亀裂が折れ曲がる場合は、従来 FEM の結果¹³⁾ との特性と比較検討を行う事により提案した摩擦を考慮した X-FEM 解析手法は、非常に精度の良いものであることを確認した。

そこで、本論文では、亀裂面が圧縮荷重下にある、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体自身も弾塑性体である場合への X-FEM の応用を試みた。物体が弾塑性体の場合への応用は、初めてのことであり、弾塑性体モデルには、比較的簡単な Drucker-Prager 弾塑性モデルを仮定した。この弾塑性体の解法アルゴリズムも、前記した亀裂面上に摩擦力が発生する問題同様、ニュートン・ラフソン法を用いた陰解法リターンマップ手法による弾塑性解析を行なった。したがって、亀裂面上に発生する摩擦問題(接触問題)と物体の弾塑性問題が全く同一手法による連立増分・反復結合法となるため、アルゴリズムが非常に簡単になる利点を有している。

なお本論文では、二軸圧縮荷重下での弾塑性体内に存在する亀裂先端近傍の、特に、応力分布について考察した。弾性体の場合には、理論式との比較を行い、弾塑性体の場合には、従来の FEM 解析による結果¹⁴⁾ との比較検討を行なった。

2. X-FEM 解析

この節では、不連続変位場を有する物体の支配方程式の弱形式を離散化して解く X-FEM 手法の概説をする。ここでは、説明を簡単にするため、変形は微小であるとし、慣性項や物体力の無い準静的二次元場を仮定して議論する。

2. 1 支配方程式と境界条件

図-1 に示すような二次元物体 Ω を考える。亀裂とその先端における接線を延長した線(図-1 中の破線)により分割される2つの領域を、それぞれ Ω^+ 、 Ω^- とする。図-1 には、 Ω^+ は灰色で塗りつぶしてある。 Γ は物体

の全境界を表し、変位 $\mathbf{u}$ が既知である Γ_u 、表面力 $\mathbf{t}$ が既知である Γ_t 、および亀裂の両面 Γ_c を合わせたものである。

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_c \quad (1)$$

釣り合い式と境界条件は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{on } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{on } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c &= \mathbf{f} & \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 ∇ はナブラ演算子、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy の応力テンソル、 $\mathbf{n}$ は全境界 Γ の外向き単位法線ベクトル、 $\mathbf{n}_c$ は、 Γ_c の Ω^+ 側向き単位法線ベクトルであり、 $\mathbf{f}$ は Γ_c 上の表面力を表している。(・) はテンソルとベクトルの内積を示している。また上線の (・) は既知量であることを示す。ひずみは変位より以下のように示される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^s \quad (4)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソルを表し、 $\otimes$ はテンソル積である。上式の右肩の s は (・) 内部の量の対称部分であることを表す。

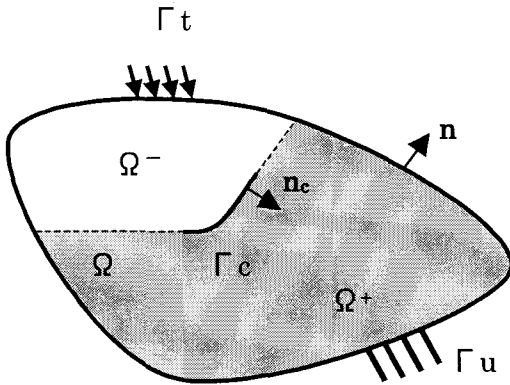


図-1 物体の領域と境界

弾塑性物体 Ω 内の全ひずみを $\boldsymbol{\varepsilon}$ とし、 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ をそれぞれ、全ひずみの弾性成分および塑性成分とすると、応力とひずみの関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{C}^e$ は弾性構成テンソルで、本論文では、等方線形弾性構成テンソルと仮定する。(・) は 4 階のテンソルと 2 階のテンソルの内積を示す。

なお、物体 Ω は、次式のような降伏関数をもった Drucker-Prager 型の弾塑性体と仮定する。

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + H \bar{e}^p) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{S}$ は偏差応力、 p は平均応力である。 β は弾塑性体の降伏値が偏差応力のみでなく平均応力にも線形に依存することを示す比例物質定数であり、 σ_Y は降伏応力である。また、 H は硬化・軟化係数であり、 $\bar{e}^p$ は相当塑性ひずみである。

一方、流れ則は次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (7)$$

ここで、 γ は、塑性 consistency パラメタである。

上記の構成式 (5)、降伏関数 (6) 及び流れ則 (7) を用いると、次式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{C}^{ep}$ は Continuum 弾塑性構成テンソルであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{ep} &= \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \\ &\quad \frac{(2\mu \hat{\mathbf{n}} - \beta \lambda \mathbf{1}) \otimes (2\mu \hat{\mathbf{n}} - \beta \lambda \mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2 \lambda + \frac{2}{3} H \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 λ 、 μ はラメの定数であり、 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{S} / \|\mathbf{S}\|$ である。

2. 2 弱形式化

式(2)を弱形式化するため、次のような Γ_c 上で不連続となる試験関数 $\boldsymbol{\eta}$ を考える。

$$\boldsymbol{\eta} := \left\{ \boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow R^2 \mid \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (10)$$

この試験関数を式(2)の両辺に掛け、物体の領域 Ω 全体で積分し Gauss の発散定理と境界条件(3)を用いると次式となる。

$$\int_{\Gamma_t + \Gamma_c} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}) d\Omega \quad (11)$$

2. 3 不連続変位の定式化

近年、弾塑性体の解析手法として全体の非線形連立方程式をニュートン・ラフソン法に整合するような Consistent 接線剛性テンソルを用い、反復値が解に近付くと誤差が2次収束することが保証された陰解法リターンマッピング手法が提案されている¹²⁾。本論文では、Drucker-Prager 弾塑性物体内の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体問題に置き換えることにより、亀裂面上の接触問題と物体の弾塑性問題、両方に陰解法リターンマッピング計算アルゴリズムを適用する。これによって、数値計算のアルゴリズムが非常に簡単になる。まず、式(11)を連続変位と不連続変位を用いた式に離散化する。一般に、有限要素法では変位は連続と仮定され、この連続節点変位 $\mathbf{a}$ のみを未知量として計算を行うが、X-FEM では亀裂面の不連続性を表すために、通常の連続節点変位 $\mathbf{a}$ に、付加的な自由度として不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を節点に付加する。以下、これらの付加的な自由度を、亀裂を含む要素の不連続節点変位 $\mathbf{b}$ と呼ぶ。これらの付加項を加える点は図-2 の○で示してある。要素⑧内の亀裂先端では、変位が閉じていることを保証するため、△で示される点では、不連続節点変位 $\mathbf{b}$ は付加しない。

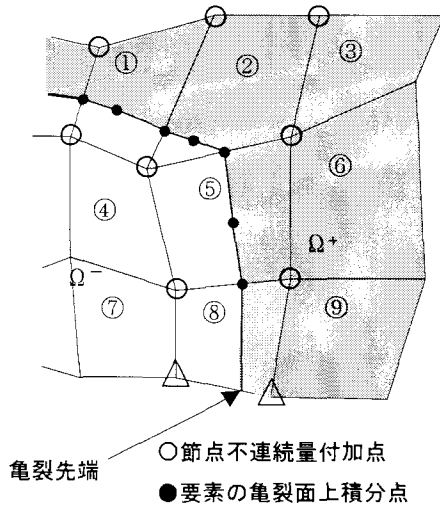


図-2 X-FEMによる解析の要素と節点

連続節点変位 $\mathbf{a}$ 、不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を用いて亀裂面 Γ_c で変位 $\mathbf{u}$ が不連続となるように離散化された変位 $\mathbf{u}$ は次式のように表せる、

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\mathbf{b}\} \quad (12)$$

ただし、第2項は亀裂が存在する要素の節点に(図-2中、①、②、⑤、⑧要素)のみ付加される。ここで、 $[\mathbf{N}]$ は節点変位 $\mathbf{a}$ に対する標準的な形状関数行列、 $\{\mathbf{a}\}$ は連続節点変位ベクトル、 $\{\mathbf{b}\}$ は不連続節点変位ベクトル、 $H(\mathbf{x})$ は亀裂面により分割された Ω^+ 、 Ω^- に対して以下のような値を持つ階段関数である。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (13)$$

ひずみは式(12)を微分して、次式のように表せる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\mathbf{b}\} \quad (14)$$

ここで、 $[\mathbf{B}]$ は、 $[\mathbf{N}]$ の各成分を座標で微分した通常のBマトリクスである。

試験関数 η に関しても変位と同様な離散化を行うと、

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (15)$$

のように表せる。また、 $\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}$ も、次式のようにになる。

$$\{\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (16)$$

この試験関数も、変位と同じく第2項は亀裂が存在する要素にのみ付加される。式(15)、式(16)を式(11)に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (17)$$

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (18)$$

以下、説明の便宜上、式(17)、(18)の両辺を次のようにおく。

$$\mathbf{F}_{\text{int},a} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^e) d\Omega$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},a} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int},b} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^e) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Gamma$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},b} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}$ とおいた。また、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は Γ_c 上の相

対変位である。 $\mathbf{f}$ は亀裂上の表面力で、比例载荷の場合は、相対変位 $\tilde{\mathbf{u}}$ の関数となる。

この時、式(17)と式(18)は、次式のように節点における離散化された連続節点変位 $\mathbf{a}$ と不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を未知数とする非線形連立方程式に帰着される。

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{\text{int},a} - \mathbf{F}_{\text{ext},a} = \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{\text{int},b} - \mathbf{F}_{\text{ext},b} = \mathbf{0} \quad (22)$$

次に、式(21)と式(22)の連続節点変位 $\mathbf{a}$ と不連続節点変位 $\mathbf{b}$ に関する非線形連立方程式にニュートン・ラフソン法を適用するため、Taylor 展開を行い、その第1階微分項だけ残すと次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} \cdot \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_{\text{ext},a} - \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{u}^e) \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} \cdot \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_{\text{ext},b} - \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{u}^e) \quad (24)$$

$$\text{ここで、} \Delta \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{Bmatrix}$$

結局、式(23)、式(24)より、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},a} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},a} \\ \mathbf{F}_{\text{int},b} \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで、上式の4個の $\mathbf{K}$ は、以下のように定義されたものである。

$$\mathbf{K}_{aa} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \quad (26)$$

3. 陰解法による X-FEM 弾塑性解析アルゴリズム

上式中の表面力 $\mathbf{f}$ と相対変位 $\tilde{\mathbf{u}}$ の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体問題に置き換えたモデルの場合の陰解法リターンマッピング計算アルゴリズム手法に関しては、既報¹⁰⁾で詳細に説明したので、ここでは割愛する。

本論文では、物体のモデルである Drucker-Prager 弾塑性体に関わる陰解法リターンマッピング計算アルゴリズムに関して詳述する。

3.1 陰解法リターンマッピング

陰解法リターンマッピングのアルゴリズムは Kuhn-Tucker 条件により以下のように行う¹²⁾。ここで、境界で与えられた表面力ベクトルや変位を n 等分して、 n 個のステップ (増分) に分け、各ステップでの表面力ベクトルや変位における応力やひずみの近似解は、次節で詳述するニュートン・ラフソン法を用いた反復解析によって求める。以下の下付きの n は、ステップ回数であり、上付きの (k) は、ニュートン・ラフソン法を用いた時の反復回数である。また、上付きの trial は、弾性体とみなした試行状態量であることを示す。

(1) Elastic Trial

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (27)$$

上式より試行平均応力及び試行偏差応力は

$$p_{n+1}^{\text{trial}} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}), \quad \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) \mathbf{1}, \quad (28)$$

と表される。

Check Yield function

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \beta p_{n+1}^{\text{trial}} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + H \bar{\varepsilon}_n^p) \quad (29)$$

if $f_{n+1}^{\text{trial}} < 0$ then Elastic step

$$\text{Set } (\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{\text{trial}} \text{ EXIT}$$

(2) Return Mapping(Plastic Corrector)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \lambda \text{tr} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) \mathbf{1} + \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} - \frac{\beta \lambda}{2\mu} \mathbf{1} \right) \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} - \frac{\beta}{3} \mathbf{1} \right) \quad (31)$$

ここで、簡単化のため次式のように置き変えている。

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \quad (32)$$

$$\Delta \gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{2\mu \left(1 + \frac{\beta^2 \lambda}{2\mu} + \frac{H}{3\mu} \right)} \quad (33)$$

3. 2 増分・反復アルゴリズム

各ステップでのひずみや応力の近似解を、図-3のようにニュートン・ラフソン法を用いた時の反復解析によって求める。

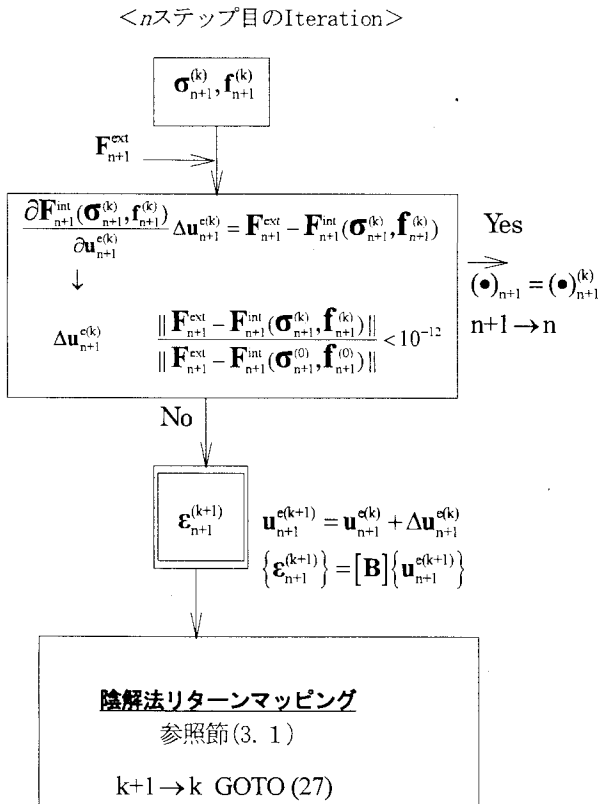


図-3 X-FEM弾塑性解析のアルゴリズム

また、式(26)中の $\bar{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ は、式(25)をニュートン・

ラフソン法で解く場合、それに整合した Consistent 弾塑性構成テンソルであり、構成式(5)、降伏関数(6)及び流れ則(7)を用いて次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{ep} = & \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \theta \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \\ & - 2\mu \bar{\theta} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} - \frac{(2\mu \hat{\mathbf{n}} - \lambda \beta \mathbf{1}) \otimes (2\mu \hat{\mathbf{n}} - \lambda \beta \mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2 \lambda + \frac{2}{3} H \right)} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\theta = 1 - \frac{2\mu \Delta \gamma}{\|\mathbf{S}^{\text{trial}}\|} \quad (35)$$

$$\bar{\theta} = -(1 - \theta)$$

$\Delta \gamma \rightarrow 0$ とすると $\bar{\mathbf{C}}^{ep}$ は式(9)の Continuum 弾塑性構成テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ に一致する。

4. 弾塑性 X-FEM 解析による亀裂先端近傍の応力解析

4. 1 解析モデル

本論文で提案した解析手法を検証するために、図-4に示すような中央に長さ $\ell = 4$ cm の亀裂が存在する長方形板を無限板中央に亀裂が存在する場合の近似モデルとした。無限遠方から一様な二軸圧縮分布応力 σ_1 と σ_3

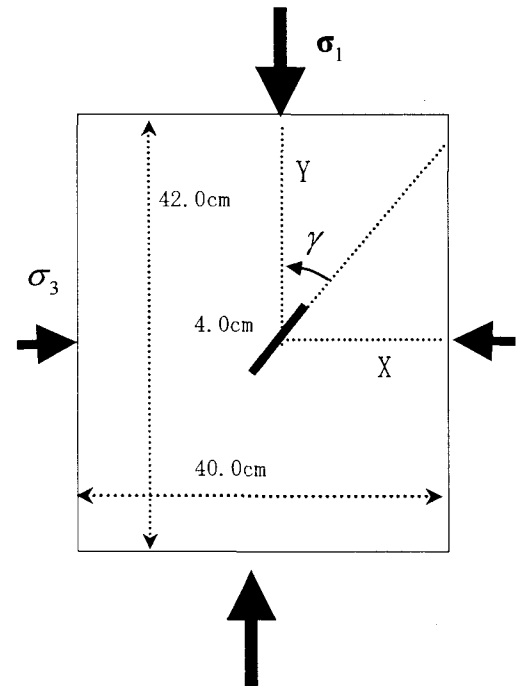


図-4 解析モデル

が比例付加された場合を考える。亀裂(変位不連続)は、最大圧縮主応力 σ_1 方向から、従来のFEM解析による結果と比較するため、 $\gamma=36^\circ$ 傾いているとした。弾塑性モデルの物質係数については後述するが、ヤング係数 $E=50\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。また、摩擦モデルにおけるペナルティ係数 α_t 、 α_n の値は既報¹⁰⁾と同じくヤング係数 E と同じ値とした。

なお、図-4のような状態でX-FEM解析モデルを作成すると、亀裂の角度 γ を変化させるたびに、要素の配置や形状を変更することが必要になり非常に面倒である。本論文では、(紙面の都合上、角度 $\gamma=36^\circ$ の場合の結果しか報告しないが)図-4と無限板モデルとしては、ほぼ等価である図-5のような解析モデルを作成し、下式(36)のように境界の全応力成分を変換することによって、主応力と亀裂角度の変化を考えた。

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \gamma + \sigma_3 \sin^2 \gamma \\ \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma \\ \tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma \end{cases} \quad (36)$$

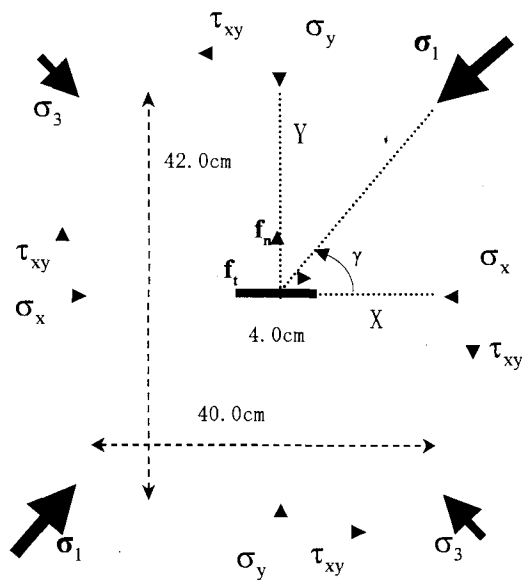


図-5 X-FEM 解析モデル

解析モデルのメッシュ分割を図-6に示す。なお、亀裂は、中央線の一つ下の要素内の中央に沿って存在している。亀裂先端の変位をゼロとするため、亀裂先端は、亀裂を含む要素辺中央上に設置し、その節点を含む要素辺の上下の節点には、不連続節点変位 b は付加しない。この図では、亀裂から約上下6.5cm程度離れた部分に三角形要素があるが、既報⁸⁾のように3角形の一つの頂点を二つに分離して、4節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を採用しているため、近似モデルの要素は、全て4節点アイソパラメトリック要素であり、合計1960節点2024要素に分割している。なお、物体の剛体変位を取り除くため、長方形モデル中央左端の要素の左上の節点変位は、X、Y両方向を固定し、左下の節点変位は、Y方向の変位のみを固定した。

素に変換する方法を採用しているため、近似モデルの要素は、全て4節点アイソパラメトリック要素であり、合計1960節点2024要素に分割している。なお、物体の剛体変位を取り除くため、長方形モデル中央左端の要素の左上の節点変位は、X、Y両方向を固定し、左下の節点変位は、Y方向の変位のみを固定した。

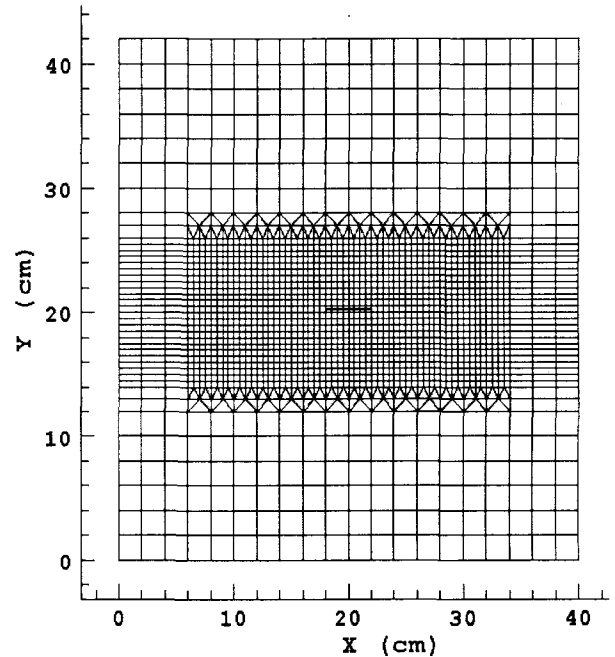


図-6 解析モデルのメッシュ図

4.2 亀裂先端近傍の応力計算方法

図-7は亀裂先端近傍の要素、ガウス点及び計算点であるが、亀裂先端から (r, θ) の箇所のある丸印○を付けた点で応力を評価した。この点での応力は隣接している要素の最近接(もしくは一致)している4個のガウス点から形状関数を作成し、次式によって求めた。

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \sigma_i \quad (37)$$

ここで、 σ_i はガウス点の応力であり、 $\bar{N}_i$ は形状関数である。

まず、長方形板が弾性体の場合について、X-FEMによ

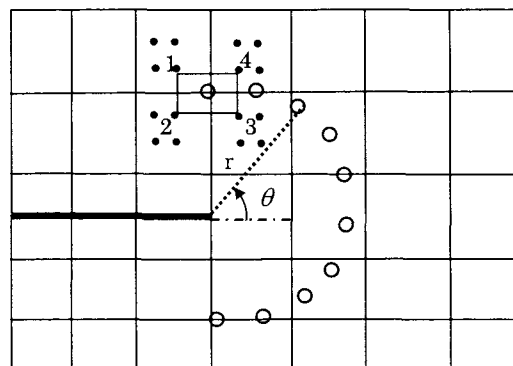


図-7 亀裂先端近傍応力の計算

る亀裂先端近傍の応力数値解の精度を検証する。図-8に示すような2次元板での平面ひずみ圧縮荷重下にある無限板内に存在する亀裂を考える。この場合の応力場は、図-8のように無限遠から与えられる応力による一様応力場と、亀裂面上での垂直応力および摩擦力により発生したせん断応力場の重ね合わせである。ここで σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ はそれぞれ無限遠での、亀裂面に水平、垂直、せん断方向の応力である。また、 σ_0 , τ_0 は亀裂面上の反力、摩擦力である。この時 μ を摩擦係数としたクーロンの摩擦則を使用すれば下記の関係が得られる。

$\sigma_y^\infty < 0$ の時：

if $|\tau_{xy}^\infty| + \mu\sigma_y^\infty \geq 0$ then $\tau_0 = \pm\mu\sigma_y^\infty$

for $\tau_{xy}^\infty \geq 0$, respectively. (38)

if $|\tau_{xy}^\infty| + \mu\sigma_y^\infty < 0$ then $\tau_0 = \tau_{xy}^\infty$. (39)

ここで、式(38)の場合には亀裂面は相対的な変位を生じる。式(39)の場合は、亀裂面は固着したままである。

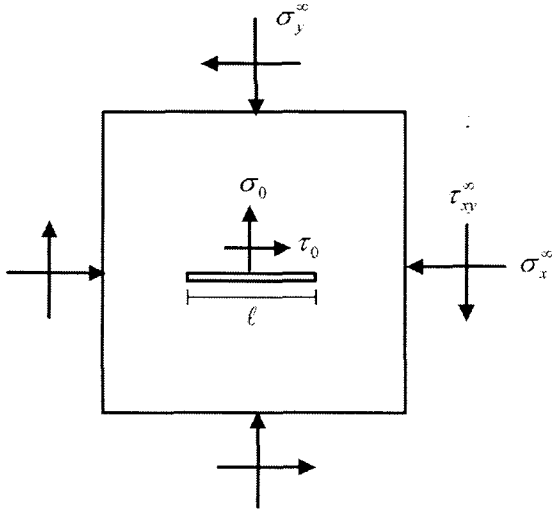


図-8 圧縮荷重下にある2次元無限板内の亀裂

この時、図-9で表すような極座標系における応力の、 r の $-1/2$ の特異性のオーダーをもつモードIIの場合の第1項(特異項)は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\frac{5}{4}\sin(\theta/2) + \frac{3}{4}\sin(3\theta/2) \\ -\frac{3}{4}\sin(\theta/2) - \frac{3}{4}\sin(3\theta/2) \\ \frac{1}{4}\cos(\theta/2) + \frac{3}{4}\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix}$$

(40)

また第2項(定数項)は次式となる。

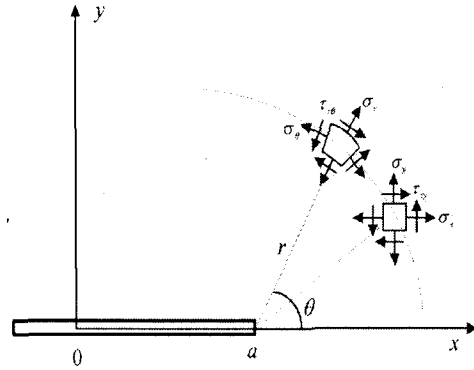


図-9 亀裂先端近傍の極座標による応力

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^\infty \cos^2 \theta + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta + 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_x^\infty \sin^2 \theta + \sigma_y^\infty \cos^2 \theta - 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}^\infty (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{Bmatrix}$$

(41)

なお、圧縮荷重下での上式中の K_{II} は、式(38)の条件が成立し、亀裂面に相対的な変位を生じる場合は次式となり、

$$K_{II} = (\tau_{xy}^\infty \pm \mu\sigma_y^\infty) \sqrt{\pi a} \quad \text{for } \tau_{xy}^\infty \geq 0, \text{ respectively.}$$

(42)

式(39)の条件が成立し、亀裂面が固着した状態では、

$$K_{II} = 0$$

(43)

となる。なお、以後 $a = l/2$ と記す。

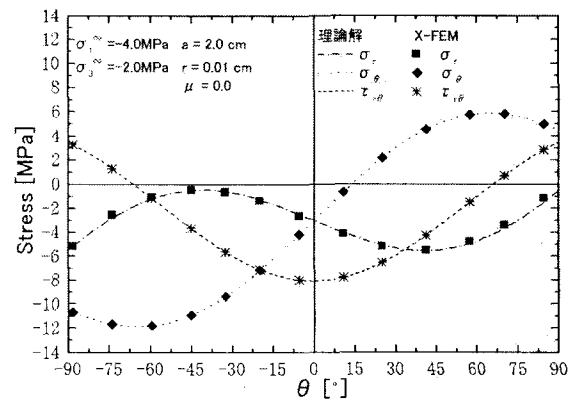


図-10 摩擦係数 0.0 の場合 X-FEM 弾性解析結果

そこで、解析モデル図-4の物体全体を弾性体としてX-FEM解析を行い、式(40)と式(41)の和である応力の漸近理論解と比較する。図-10、図-11には、横軸は亀裂先端からの角度 θ であり、縦軸は極座標で表した亀裂先端近傍の各応力 σ_r 、 σ_θ 、 $\tau_{r\theta}$ である。図中、■、◆、*はそれぞれX-FEM解析結果 σ_r 、 σ_θ 、 $\tau_{r\theta}$ の分布である。図-10は亀裂面上の摩擦係数 μ が0.0の場合であり、図-11は摩擦係数 μ が0.3の場合である。両図に示すように弾性体の場合では摩擦のある無しに関わらず、本X-FEMによる弾塑性解析手法は精度が非常に良いことが分かる。

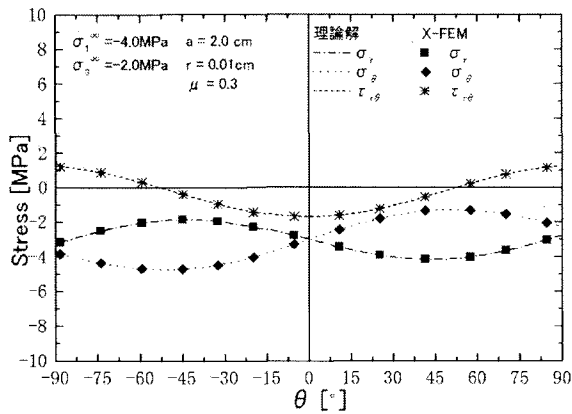


図-11 摩擦係数0.3の場合X-FEM弾性解析結果

次に、弾塑性体内にある亀裂先端近傍のX-FEMで求めた応力分布の検証を行なう。しかしながら、弾塑性体内に存在する静止亀裂の場合、簡単なVon MisesやDrucker-Pragerモデルの場合であっても、その亀裂先端近傍の平面応力場の理論解でも存在しない。非常に興味ある問題ではあるが、ましてや、その亀裂が準静的に進展する場合における平面問題の理論解などは完全に未解決問題である。FEM等による数値解析は数多く行なわれているが、ほとんどが陽解法増分法による弾塑性解析であるため、亀裂先端近傍の応力の精度は非常に悪い。そこで、最近、著者の1人等が、本論文と同じモデルの場合において、陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた解を得ているので、その解と比較検討する。ただし、この手法による亀裂の変位不連続性は、従来から汎用されている要素辺上に沿った要素節点を分離する事によって表現されたものである。この手法による応力の評価に関しては、文献¹⁴⁾を参照されたい。

図-12は、最大圧縮主応力 σ_1 が-10MPaであり、主応力比が0.6、亀裂面上の摩擦係数は0.0の場合である。降伏応力 $\sigma_y = 5$ MPa、硬化・軟化係数 $H = 0.0$ MPa、すなわち完全塑性の場合である。物質係数 β は、土質の場合によく使用される次式(44)を使って $\phi = 30^\circ$ と仮定した。

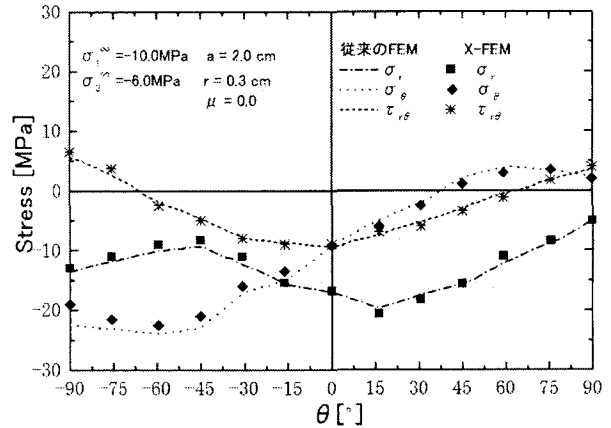


図-12 摩擦係数0.0の場合X-FEM弾塑性解析結果

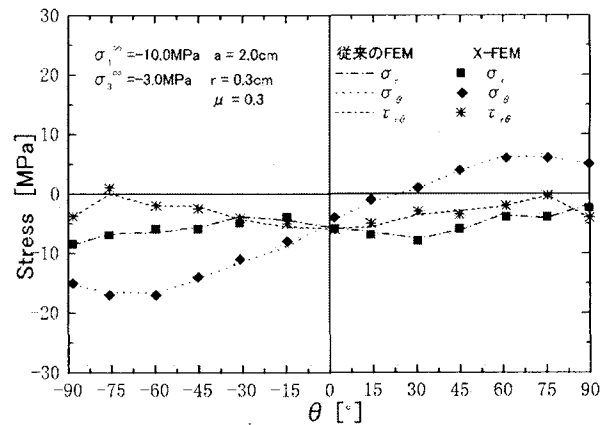


図-13 摩擦係数0.3の場合X-FEM弾塑性解析結果

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (44)$$

図-13は、最大圧縮主応力 σ_1 が-10MPaであり、主応力比が0.3、亀裂面上の摩擦係数は0.3である。降伏応力 $\sigma_y = 5$ MPa、内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ 、硬化・軟化係数 $H = 1000.0$ MPaの場合である。いずれの場合も図中の連続点線が、上記の従来による陰解法弾塑性計算による結果であり、■、◆、*らは、それぞれ本X-FEM解析結果 σ_r 、 σ_θ 、 $\tau_{r\theta}$ の分布である。これらの結果から、本X-FEMによる(Drucker-Prager)弾塑性体内の亀裂先端近傍の応力は、比較的精度の良いものと判断できる。

5. 結論

本論文では、亀裂面が二軸圧縮荷重下にあり、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体がDrucker-Prager弾塑性体

である場合への X-FEM 解析を行い亀裂先端近傍の応力分布について考察した。この弾塑性体の解法アルゴリズムには、亀裂面上に発生する摩擦問題（接触問題）と物体の弾塑性問題いずれも、精度が良く、計算速度が速く、近年、精力的に使用されているニュートン・ラフソン法を用いた陰解法リターンマップ手法による弾塑性解析が行なえる新しい手法を開発した。亀裂先端近傍の応力分布に関する解析結果は、弾性体の場合には、理論式との比較を行い、弾塑性体の場合には、従来の陰解法弾塑性 FEM 解析による結果¹⁴⁾との比較検討を行なった結果、非常に精度の良いものであることが分かった。今後は、X-FEM では、任意方向の亀裂進展解析が可能であるというメリットを生かし、何らかの亀裂進展方向を決定する破壊基準を採用し、弾塑性体内の亀裂の進展解析を行なう予定である。

参考文献

- 1) Simo, J.C., J. Oliver and F. Armero: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, *Computational Mech.*, 12, pp.277-296, 1993.
- 2) Oliver, J.: Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 39, pp.3601-3623, 1996.
- 3) Larsson, R. and K. Runesson: Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity, *J. of Eng. Mech.*, pp.402-411, 1996.
- 4) 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法による不連続面進展解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp.193-200, 2003.
- 5) Belytschko, T. and T. Black: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 45, pp.601-620, 1999.
- 6) Moes, N., J. Dolbow, and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 46, pp.131-150, 1999.
- 7) 長嶋利夫, 田中貴章: X-FEMの弾塑性破壊力学への適用, *計算工学講演会論文集*, Vol.9, pp.89-90, 2004.
- 8) 矢富盟祥, 李 炳奇: X-FEMによる亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp.19-26, 2003.
- 9) Wu, C.H.: Explicit asymptotic solution for the Maximum Energy Release Rate problem, *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, pp.561-566, 1983.
- 10) 李 炳奇, 矢富盟祥: 圧縮荷重下における亀裂進展時のエネルギー解放率のX-FEM解析, *応用力学論文集*, Vol.7, pp.643-653, 2004.
- 11) Perić, D. and D.R.J. Owen: Computational Model for 3-D Contact Problems With Friction Based on the Penalty Method, *Int. J. for Num. Meth. In Engng.*, Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- 12) Simo, J.C. and T.J.R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- 13) 矢富盟祥, 鱸 洋一: 圧縮荷重下にある進展亀裂のE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, *土木学会論文集*, No.612/I-46, pp.251-263, 1999.
- 14) 鱸 洋一, 矢富盟祥: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた圧縮荷重下に存在するき裂先端近傍応力場の有限要素解析, *応用力学論文集*, Vol.7, pp.597-606, 2004.

(2005年4月15日 受付)