応用力学論文集 Vol.8, pp.377-384 （2005年8月） 土木学会

損傷の発展則を含む複合材料の平均化を用いた弾塑性有限要素

Elasto-Plastic Averaging Finite Element of Composites with Evolution Law of Micro Damages

黒木誠一郎*，中沢正利**，岩熊哲夫***
Seiichiro KUROKI, Masatoshi NAKAZAWA, Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修士（工） 株式会社間組（〒460-0003 名古屋市中区錦2-4-16）
**正会員 工博 東北学院大学工学部環境土木工学科（〒985-8537 多賀城市中央1-13-1）
***正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06）

When materials deform plastically, damages accumulate. A theory called 'void damage theory', where damages are replaced by voids, can express degradation of stiffness. However most models by this theory neglect stiffness of particles which in reality exist in materials and are one cause of further damage. Since debonding along such particles creates new damage, it is important to take into account the characteristics of such particles. In this study, the stiffness of particles or inclusions are included by an analytical averaging method, and the results are compared with experimental data to show eligibility of the method.

Key Words : *void damage theory, degradation of stiffness, averaging method*

1. はじめに

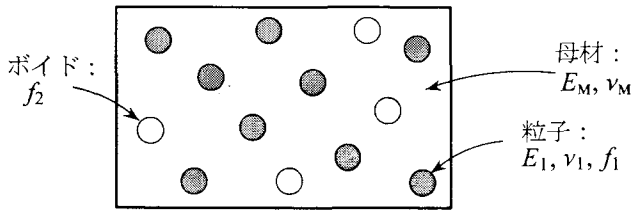
亀裂の無い鋼材等の延性破壊においては，不純物や介在物の粒界の剥離や，そういった粒子自体の破壊が生じ，それはさらに塑性ひずみの増大と共に成長する．このような材料内部に蓄積していく損傷を，材料内部で増加していくボイドとみなして，材料全体の剛性低下をモデル化した理論にボイド損傷理論がある．この理論はGurson[1]によって提案され，Tvergaardをはじめとする多くの研究者によって理論的な改訂が行われ，ボイド損傷理論に基づく材料の延性破壊の数値解析研究[2),3)]が行われいる．こういった研究は主に金属材料の延性破壊を対象としているが，ボイド損傷理論を脆性材料のコンクリートに適用した研究[4)]もある．

しかし，初期のボイド損傷理論では，損傷が進行した後の弾性剛性の低下を考慮していなかった．そのため，繰り返し載荷のような現象の解析にボイド損傷理論を用いると，解析対象の応答を過大評価してしまう恐れがあった．このような不具合を克服するために，損傷による弾性剛性の低下をVoigt的に組み込んだモデルがまず用いられ，その後，森・田中の平均場理論[5)]とEshelbyの等価介在物法[6)]とを利用して，ボイドを含んでいる材料全体の平均弾性剛性を求める研究[7),8),9)]へと発達してきた．

一方，ボイド損傷理論とは別のアプローチの中には，複合材料中の介在物の割れや母材界面での剥離などの微視的挙動を直接モデル化して扱う研究がある．こういった研究の中には，ある破壊規準に達したときに割れや剥離が生じ，それ以降は剥離が生じた介在物の耐荷力を無視し，それをボイドと置き換えて材料全体の剛性の低下をモデル化する初歩的な研究[10)]がある．あるいは剥離を完全剥離として扱うのではなく，載荷軸方向にのみ耐荷力を失わせるといった部分的に進行していく剥離を表現する研究[11)]も進められてきている．そこでは，Zhao and Wengの提案した界面剥離モデル[12)]に従って，ある向きにのみ応力を伝えないような介在物でボイドをモデル化している．しかし，対象が1軸状態の無限体であり，ボイドの生成が発展則ではなく確率分布で与えられている点で，実現象をうまくモデル化できていないと考えられる．

ボイド損傷理論におけるボイドは，実際には材料中に含まれる不純物や介在物といった粒子の割れや界面剥離によって生じるはずである．例えば実験的研究[13)]では，材料中のボイドの発生が介在物と母材の界面剥離によるものだと指摘している．しかし，文献[7),8),9)]も含めてボイド損傷理論に基づいた既往の研究では，この粒子を単なる損傷パラメータとして扱っており，粒子を物理的な存在としてその剛性を考慮することはしない．つまり，ボイドが母材中に突然発生するものとして扱われている．したがって，剥離や破壊が生じる前後の粒子の剛性の寄与の変化で，材料全体の平均的な剛性が変化する効果は，組み込まれていない．

そこで本研究では，既往の研究では考慮されていなかったボイドの発生源としての粒子の剛性を考慮し，文献[7),8),9)]と同様の平均化手法を用いて，損傷が蓄積していく材料全体の平均挙動を求める．3相問題にモデル化する点はJu and Lee[11)]の手法と同じではあるが，初期のボイド生成をNeedleman and Rice[14)]の発展則で与えていることや，ボイドを完全な空隙としていること，また有限要素に組み込むことで任意の応力状態に対応でき



図–1 損傷が蓄積した材料のモデル化

る点がその改良点である．ただし，一旦剥離してボイドになった粒子の付着は無視するような定式化になっており，繰り返し載荷で再度粒子が剛性を発揮するような状況には対応できない．こうして構築したモデルを用いて数値解析を行い，実験結果と比較することで本手法の有用性を検討する．なお本手法でも，Tvergaard 型のボイド損傷理論に基づき，ボイドの進展や結合のモデルは既存のモデルをそのまま用いる．

2. 構成モデルと有限要素

2.1 損傷を受けた材料モデル

図–1 は，ボイドが存在する母材中に，さらに界面剥離によってボイドになるかもしれない粒子を含む，3 相から成る材料を示したものである．母材のヤング率とポアソン比を E_M, ν_M とし，粒子のヤング率とポアソン比とその体積比率をそれぞれ E_1, ν_1, f_1 とする．また初期から存在したり，粒子が破壊・界面剥離を起こして発生したボイドの体積比率を f_2 とする．以下，諸量の添え字が $(\cdot)_M$ のものは母材の量であることを示し，添え字 $(\cdot)_1$ が粒子のものを，添え字 $(\cdot)_2$ がボイドの量を表すものとする．

2.2 平均弾性係数テンソルの算出

このように損傷が蓄積している材料を，母材と粒子およびボイドの 3 相複合材料として捉え，森・田中の平均場理論と Eshelby の等価介在物法に基づく平均化手法を用いて平均弾性剛性を求める．この平均化手法は楕円体介在物を対象とする場合には，どのような形であっても介在物の影響を陽に算定できるが，ここで併用するボイド損傷理論は球形ボイドを仮定しているので，ここでもボイドは剛性ゼロの球形介在物とする．また簡単のため，ここではボイドの発生源の粒子の形状も球形と仮定する．また母材と粒子は弾性的には等方で Hooke の法則に従い，例えば母材の弾性テンソルは

$$(C_M)_{ijkl} = 3\kappa_M \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu_M \left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right\} \tag{1}$$

となるものとする．ここに κ_M, μ_M はそれぞれ母材の体積弾性係数とせん断弾性係数であり，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．

森・田中理論を用いると，3 相複合材料の平均弾性係数テンソル $\overline{\boldsymbol{C}}$ は

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} \tag{2}$$

と書くことができる．ここに $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{C}_M + \sum_{i=1}^{2} f_i \boldsymbol{C}_M (\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I}) \{\boldsymbol{C}_M - (\boldsymbol{C}_M - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{S}_i\}^{-1} (\boldsymbol{C}_M - \boldsymbol{C}_i) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{2} f_i \boldsymbol{S}_i \{\boldsymbol{C}_M - (\boldsymbol{C}_M - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{S}_i\}^{-1} (\boldsymbol{C}_M - \boldsymbol{C}_i) \tag{4}$$

と定義した．$\boldsymbol{C}_M$ が母材の弾性係数テンソル，f_i, $\boldsymbol{C}_i$, $\boldsymbol{S}_i$ $(i = 1, 2)$ はそれぞれ 2 種類の介在物の体積比率と弾性係数テンソルおよび Eshelby のテンソルである．

ここではボイドも介在物も球形としているので，$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$ であり，等方弾性体中に球形介在物が含まれている場合の Eshelby のテンソル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$ の具体形は

$$S_{ijkl} = \chi\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + \psi\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right\} \tag{5}$$

と表される．ここに

$$\chi \equiv \frac{1+\nu_M}{3(1-\nu_M)}, \qquad \psi \equiv \frac{2(4-5\nu_M)}{15(1-\nu_M)} \tag{6}$$

と定義した．これを式 (2) ～式 (4) に代入すると平均体積弾性係数 $\overline{\kappa}$ と平均せん断弾性係数 $\overline{\mu}$ が

$$\overline{\kappa} = \kappa_M\left[1 - \frac{\zeta f_2 + (1-\chi)(\kappa_M - \kappa_1) f_1}{\zeta\{(1-\chi)(1-f_1) + \chi f_2\} + (1-\chi) f_1 \kappa_M}\right] \tag{7}$$

$$\overline{\mu} = \mu_M\left[1 - \frac{\eta f_2 + (1-\psi)(\mu_M - \mu_1) f_1}{\eta\{(1-\psi)(1-f_1) + \psi f_2\} + (1-\psi) f_1 \mu_M}\right] \tag{8}$$

と求められる．ここに ζ と η は

$$\zeta \equiv \kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\chi, \quad \eta \equiv \mu_M - (\mu_M - \mu_1)\psi \tag{9}$$

と定義した．もちろん $\kappa_2 = 0, \mu_2 = 0$ と置いてある．

2.3 降伏関数

本研究では，他の研究での構成則の与え方との整合を取るために，塑性特性は粒子とボイドと母材全体の平均的なボイド損傷理論モデルで与えられるものとする．我々はこれまでの研究[15]で，多相材料の弾塑性挙動を森・田中の手法を用いて計算してきたが，相の数が増えるに従って，特に初期降伏後の挙動を同手法で追跡するのが困難になることがわかっている．そのため，ここでは，複合材料全体の構成モデルとして塑性に関する部分を与えることにした．以下，この節では，母材にはボイドになる粒子も含めている．

降伏関数は Gurson によって提案され Tvergaard によって改訂された

$$\phi = \frac{\overline{\sigma}_e^2}{\sigma_f^2} + 2 q_1 f_2 \cosh\left(\frac{q_2 \overline{\sigma}_{kk}}{2\sigma_f}\right) - \left(1 + q_3 f_2^2\right) \tag{10}$$

を用いる．ここに，f_2 はボイド体積比率で，$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ と $\overline{\sigma}_e$ はそれぞれ平均応力と相当応力であるが，いずれも母材の応力とボイド内の零応力の体積平均としての応力を用いて算定されるものであることに注意する．σ_f は母材の相当流れ応力，そして q_1, q_2, q_3 は Tvergaard によって導入された調整パラメータである．Gurson モデルではこの 3 つはすべて 1 であるが，本研究ではこのパラメータに Tvergaard の提案，$q_1 = 1.5, q_2 = 1.0, q_3 = q_1^2$ を用いる．

2.4 損傷の進展に伴うボイドと粒子の体積比率の変化

(1) 粒子の破壊・界面剥離 — ボイド発生

既往のボイド損傷理論では，粒子の割れや剥離によってボイドが発生するものとしており，その発生則の代表的なモデルには Needleman and Rice[14]によって提案された規準が用いられることがある．本研究でも，界面剥離や破壊によって減少する粒子の体積比率の変化 $\dot{f}_1$ の法則として，Needleman and Rice の規準を用い

$$\dot{f}_1 = -\frac{f_1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s}\right)^2\right\}\dot{\varepsilon}_M^p \qquad (11)$$

を満足すると仮定する．これは，ある塑性ひずみの量に関連した確率分布で粒子が減少してくというだけのモデルである．f_1 は粒子の現変形状態での体積比率である．ε_M^p が母材の相当塑性ひずみで，s と ε_N はボイドが発生する現象を単なる確率過程とみなしたときの確率分布の標準偏差と平均値であり，材料定数とここでは考えている．式 (11) が負であるのは，図–2 のように力の伝達能力を持つ粒子の体積比率が徐々に減少していくからである．

(2) ボイドの進展

式 (11) の粒子の消失分は，次に，進展するボイドの一部として捉えることになる．つまり図–3 のように，界面剥離した粒子をボイドとして扱う．したがって，ボイド体積比率の進展則には，既存のボイドの成長および合体に加えて，消失粒子分の和として与えられることになる．本研究では，成長と合体については既往の研究[2]と同じモデルを用いる．したがって，ボイド体積比率の進展則 $\dot{f}_2$ は

$$\dot{f}_2 = (1 - f_2)\dot{\bar{\varepsilon}}_{kk}^p + \frac{f_U - f_C}{\Delta\varepsilon}\dot{\varepsilon}_M^p - (\dot{f}_1) \qquad (12)$$

となる．ここに，$\dot{\bar{\varepsilon}}_{kk}^p$ はボイドを含んだ母材の平均的な塑性ひずみ増分の負の静水圧成分で，f_U は材料が破壊する直前のボイド体積比率，f_C はボイド同士の合体が始まる直前のボイド体積比率で，いずれも材料定数と考える．また $\Delta\varepsilon$ も材料パラメータであり，ここでは Tvergaard の設定に従って常に $\Delta\varepsilon = 0.4$ としている．式 (12) の右辺第 3 項が，粒子が壊れることによって生じたボイド分の増分量に相当し，負の符号が付いているのは，$\dot{f}_1$ が減少量（負）だからである．

2.5 弾塑性構成則

$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ をボイドを含む母材の応力とし，同様に $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ をボイドを含む母材の適合ひずみとしたとき，粒子を除く，ボイドと母材の平均的な弾塑性構成則を

$$\dot{\overline{\sigma}}_{ij} = \overline{C}_{ijkl}^{ep}\dot{\overline{\varepsilon}}_{kl} \qquad (13)$$

と記す．$\overline{C}_{ijkl}^{ep}$ の具体形は，

$$\overline{C}_{ijkl}^{ep} \equiv \overline{C}_{ijkl}^{e} - \frac{\sigma_f^2}{H\sigma_f^2 + 9\overline{\mu}\overline{J}_2 + 9\overline{\kappa}\alpha^2\sigma_f^2} \times\left(\frac{3\overline{\mu}\,\overline{s}_{ij}}{\sigma_f} + 3\overline{\kappa}\alpha\delta_{ij}\right)\left(\frac{3\overline{\mu}\,\overline{s}_{kl}}{\sigma_f} + 3\overline{\kappa}\alpha\delta_{kl}\right) \qquad (14)$$

となる．$\overline{C}_{ijkl}^{e}$ の具体形は式 (1) と同様であり，$\overline{\boldsymbol{s}}$ はボイドを含んだ母材の応力の偏差成分，$\overline{J}_2$ は $\overline{\boldsymbol{s}}$ の第 2 不変量，そして α は

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} f_2 q_1 q_2 \sinh\left\{\frac{q_2}{2}\frac{\overline{\sigma}_{kk}}{\sigma_f}\right\} \qquad (15)$$

と定義されており，H は硬化係数で

$$H \equiv \frac{H'}{1 - f_2}\left(\frac{\overline{\sigma}_e^2}{\sigma_f^2} + \alpha\frac{\overline{\sigma}_{kk}}{\sigma_f}\right) \times\left\{\left(\frac{\overline{\sigma}_e^2}{\sigma_f^2} + \alpha\frac{\overline{\sigma}_{kk}}{\sigma_f}\right) - \frac{\sigma_f}{2}\frac{\partial\phi}{\partial f}\left(A + \frac{f_U - f_C}{H'\Delta\varepsilon}\right)\right\} - 3\alpha\frac{\partial\phi}{\partial f}(1 - f_2)\frac{\sigma_f}{2} \qquad (16)$$

と定義される．また H' は母材の塑性接線係数であり，A は

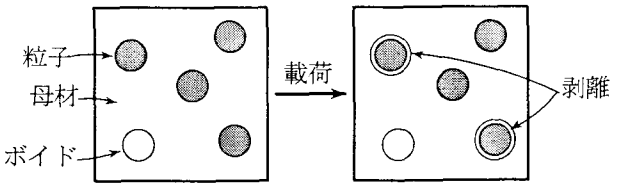
$$A \equiv \frac{1}{H'}\frac{f_1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s}\right)^2\right\} \qquad (17)$$

と定義される．

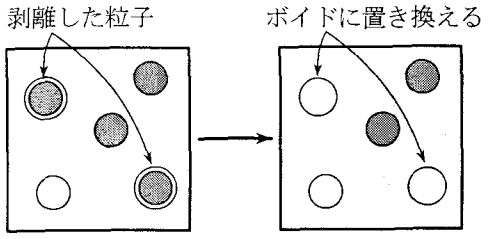
2.6 対応する有限要素

弾塑性構成則は増分形式で与えられているため，各増分ステップ毎に算出された値を足し合わせていく必要がある．本研究では微小変形理論の枠組み内に限定し，各増分ステップ毎の繰り返し計算の無い単純な重ね合わせの増分解析を行う．そのため，増分ステップは十分小さく設定しなければならないが，この増分ステップは解析対象の要素分割数等にも影響されるので，何通りかの数値解析結果を踏まえて適切な増分ステップ量をその都度決定する．解析に用いる有限要素は，2 次元平面ひずみ問題の場合は 4 節点アイソパラメトリック 4 辺形要素，3 次元問題では 8 節点アイソパラメトリック立体要素を用いる．

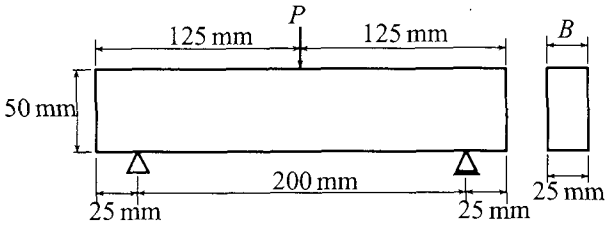
要素接線剛性マトリクス $\boldsymbol{K}$ は，式 (14) の $\overline{\boldsymbol{C}}$ を材料係数として標準的な有限要素定式化をすれば得られる．また，降伏判定は，式 (10) の Tvergaard の降伏関数 ϕ で行う．この降伏判定では，一度の増分計算で最も零に近い ϕ を持つ要素だけが降伏するように，増分ステップを r_{min} 法で調整した．



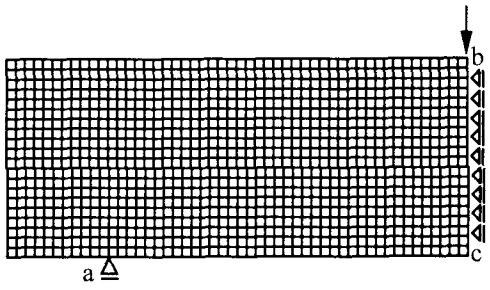
図–2 剥離発生のイメージ



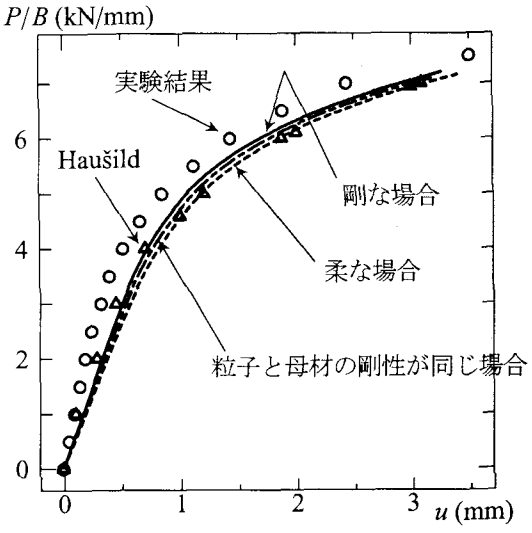
図–3 ボイドへの置換のイメージ



図–4 単純梁の試験片の外観および寸法



図–5 平面ひずみ要素のメッシュ分割図



図–6 粒子の剛性の違いによる挙動の変化

3. 実験結果との比較

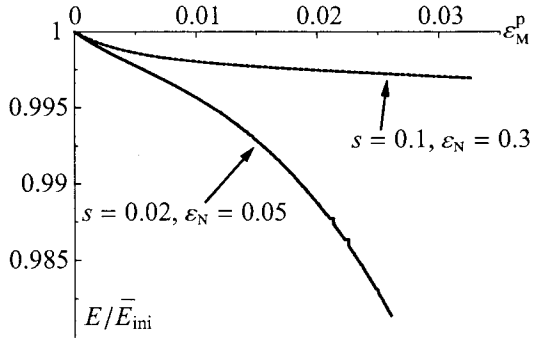
3.1 単純梁の3点曲げ試験の比較

文献[16]に示されている単純梁の3点曲げ試験の実験結果と本手法の数値解析結果の比較を行う．図–4がその試験片を示している．数値解析は平面ひずみ状態と3次元状態の両方で行うが，ここではまず有限要素の基本的な要素として平面ひずみ要素を定式化する．平面ひずみの場合のボイドは奥行き方向に無限に長い円柱介在物として取り扱う必要があるが，ここでは簡単のために球形介在物の諸量を用いている．比較する実験値は，文献[16]に示されている実験結果の荷重の値を試験片の厚さで除した値 P/B (kN/mm) を用いる．解析対象の対称性から，左半分にのみ着目して図–5のようにメッシュ分割を行う．境界条件は，支点aの節点を鉛直方向に拘束し，辺bc上にある節点を水平方向に対して拘束する．載荷は，辺bc上にある全節点を鉛直方向に強制変位させることによって与える．試験片の母材の材料定数は文献[16]と同様に初期降伏応力 σ_Y = 339 MPa，母材の相当流れ応力－相当塑性ひずみの関係をべき乗則で $\sigma_f = \sigma_Y + k\left(\varepsilon_M^p\right)^n$ と設定する．硬化パラメータは k = 1531 MPa, n = 0.258 とする．文献[16]には弾性係数とポアソン比が示されていないが，材料が鋼なので，弾性係数を E_M = 206 GPa，ポアソン比を ν_M = 0.3 とした．初期ボイド体積比率の値も示されていなかったが，試験片を“欠陥なし”としているので初期ボイド体積比率は0%とし，発生則と合体則のパラメータは f_I = 0.04, s = 0.1, ε_N = 0.3, f_C = 0.15, f_U = 2/3 と設定した．ボイドを発生させる粒子の弾性係数は母材の1/10倍の場合と10倍の場合の，E_I = 20.6 GPa か，2060 GPa とし，ポアソン比は ν_I = 0.3 とした．

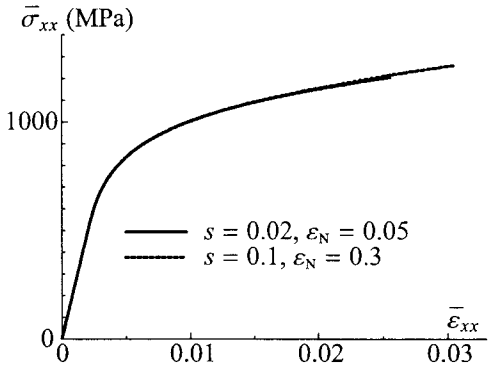
(1) 粒子の剛性による挙動の違い

図–6の実線は粒子の剛性が母材の剛性よりも高い場合の結果，破線は粒子の剛性が母材の剛性よりも低い場合の結果である．また○印は実験結果で，△印は文献[16]の解析結果である．さらに，比較として粒子の剛性が母材の剛性と同じ場合の結果を一点鎖線で示した．

粒子の剛性と母材の剛性の大小に拘わらず，得られた平均挙動については文献[16]の場合とほぼ同様であった．これはボイドが4%程度しか存在しないため，その差が顕著にはならなかったとも考えられるが，これについては次節の結果も見た上で再度考察したい．また実験値との差が大きいが，文献には母材の正確な材料定数が与えられていなかったことが原因ではある．ただし，ここでは粒子の存在の有無による違いに着目して検討することが目的であるため，敢えて実験値と合わせることはしなかった．なお，図–6の3本の解析値は途切れているが，それは，ここでのパラメータの設定のもとでは，数値解析の過程で巨視的な硬化係数の式(16)が負になったため



図–7 平均弾性係数の低下



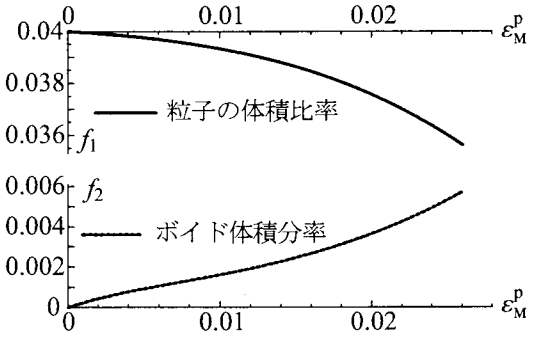
図–8 発生パラメータの変化による挙動の違い

で，その時点で単純な r_{min} 法が使えなくなったためである．すなわち，Tvergaard らが用いているパラメータの値が，本解析のように弾性剛性の平均化も含めた場合には，一般的には適切ではないことを意味している．このように，ここの設定に限定すれば，本解析のようなボイドになる可能性のある粒子を考慮するか否かが及ぼす巨視的な挙動への影響はそれ程顕著ではなかった．

(2) 平均弾性剛性の低下

これに対し，本モデルの意味を明らかにするために，もう少し微視的に観察する．そこで，試験片下面中央の要素 c に着目し，その要素の弾性係数の低下の様子を図–7 に示した．縦軸は平均弾性係数 $\bar{E}$ を損傷が生じる前の状態の平均弾性係数 $\bar{E}_{ini}$ で除して示した．横軸は着目している要素の母材の相当塑性ひずみである．上方の点線（数珠線）がその結果であり，平均弾性係数が減少していることがわかる．ただし，縦軸の数値からも明らかなように，その変化は小さい．そこで，ボイドをもっと発生し易くするために $s = 0.02$, $\varepsilon_N = 0.05$ に変更したのが下方の実線である．この場合には，この要素の弾性係数の低下が 2% 程度まで生じることがわかる．ただし，巨視的な平均応力・平均ひずみ関係は，図–8 に示したように，ほとんど重なってしまい，s や ε_N が巨視的挙動に及ぼす影響は小さいと考えられる．

ここではさらに，ある材料部分に着目し，ボイドが発生し易く $s = 0.02$, $\varepsilon_N = 0.05$ とした場合の，変形の進行に伴う粒子の体積比率 f_1 とボイド体積比率 f_2 の変化を図–9 に示した．上の図の曲線が粒子の体積比率の変化で，下図の曲線がボイド体積比率の変化を示している．



図–9 変形の進行に伴う f_1, f_2 の変化

横軸は共に着目要素の母材の相当塑性ひずみである．初期に 4% あった粒子が破壊し，徐々にボイドになる．例えば横軸が $\varepsilon_M^p = 0.024$ 程度の状態では，上の図から粒子は 0.4% 程減少している．これに対し，下の図からはボイドが増加して 0.5% 程度までに成長している．この差 0.1% が，ボイドの成長と合体分である．ちなみにボイド損傷理論に基づく従来の手法では，図–9 のような変化の進行を捕らえることはできない．

3.2 介在物が多く含まれる複合材料への適用

前節では，ボイドの発生源である粒子の体積比率が 4% と小さいために，巨視的な挙動に対しては本モデルでも最初から空隙があるモデルでも差異が生じないような結果となった．ただし，微視的な挙動はより現実的なものになっていると考えられる．次に，もう少し多く介在物が含まれる複合材料に対して，実験結果と本手法の 3 次元数値解析結果との比較を行う．

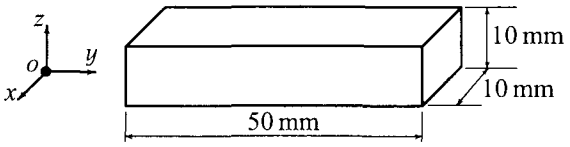
(1) 一軸引張試験の荷重－変位関係の比較

ここでは Ju and Lee[11]が検討した例を用い，球形介在物を含む SiC/Al-Cu 複合材料に対する一軸引張試験を対象とする．まえがきにも書いたように，この文献の手法では，当初存在した粒子が破壊してボイドになるモデルの部分で，その粒子の剛性は考慮されてはいるが，その生成体積比率が式 (11) のような発展則ではなく，載荷 1 軸荷重レベルで一意に定まる Weibull 分布で

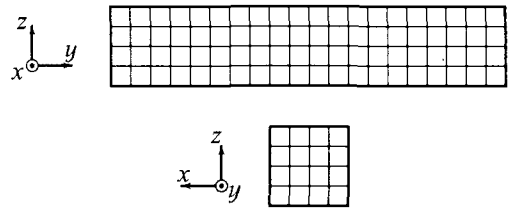
$$f_2 = (f_2)_{ini}\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{(\bar{\sigma}_{11})_1}{S_0}\right)^M\right]\right\} \qquad (18)$$

のように与えられている．ここに，$(\bar{\sigma}_{11})_1$ は粒子の中の引張方向の応力成分で，M, S_0 はパラメータである．これは，塑性モデルのひとつの全ひずみ理論と同様，除荷に対する挙動を考慮できない等，物理的には不都合がある．これに対し本解析では，この部分を式 (11) の発展則で与えてあり，さらにこの式は多軸応力状態に対しても対応できている点で汎用性がある．

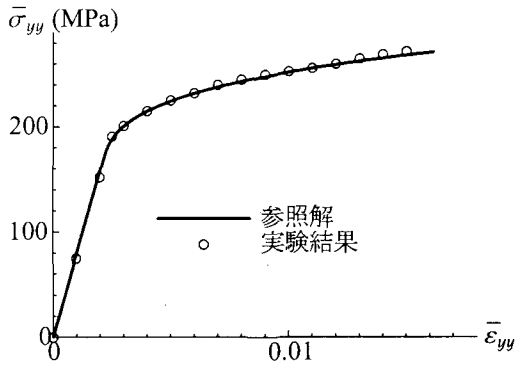
さて Ju and Lee[11]の解析は一般的な無限体を扱っているが，ここでは解析対象を図–10 と設定し，メッシュ分割は図–11 のように行い，これを長手方向に単純に引



図–10 試験片の外観および形状



図–11 メッシュ分割図



図–12 6% の実験結果で材料定数を同定する

張った．材料定数はその文献[11]と同じく，母材の弾性係数を $E_M = 71.8\,\mathrm{GPa}$，ポアソン比を $\nu_M = 0.33$，介在物の弾性係数を $E_I = 450\,\mathrm{GPa}$，ポアソン比を $\nu_I = 0.17$ とする．介在物の体積比率も同文献[11]の例と同じく，$f_I = 0.06$ と 0.13 の 2 パターンに対して数値解析を行う．ここでも，ボイドの発生と合体に関するパラメータは既往の研究[14]で用いられている $s = 0.1$, $\varepsilon_N = 0.3$, $f_C = 0.15$, $f_U = 2/3$ とした．ところが Ju and Lee[11]は，塑性特性については各相毎には定義しておらず，複合材料全体の平均初期降伏応力と平均硬化パラメータのみを用いて解析している．それは，平均初期降伏応力が $\bar{\sigma}_Y = 169\,\mathrm{MPa}$，材料全体の相当流れ応力－相当塑性ひずみの関係を $\bar{\sigma}_f = \bar{\sigma}_Y + \bar{h}(\bar{\varepsilon}^p)^{\bar{q}}$ とし，平均硬化パラメータを $\bar{h} = 463.24\,\mathrm{MPa}$, $\bar{q} = 0.393$ としている．

ところで，このような弾性介在物の付加によって材料全体の挙動としては，母材のみの材料よりも弾性剛性と初期強度および終局強度が向上することが文献[13]でも指摘されている．ここでも補強材として介在物が導入されることを考えれば，最も単純な Voigt の関係を用いた場合には，初期降伏応力は

$$\bar{\sigma}_Y = (1 - f_I)\,\sigma_Y^M + f_I\,\sigma_Y^I \qquad (19)$$

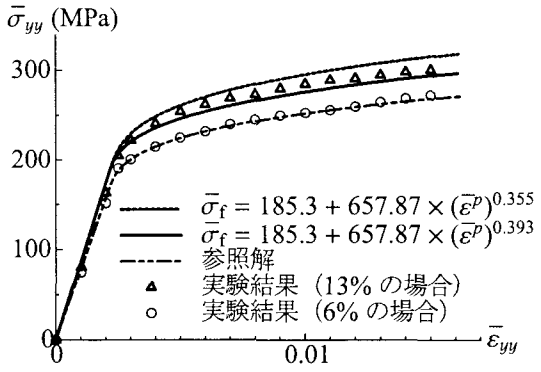
のようになるはず[17]である．ここで σ_Y^M，σ_Y^I はそれぞれ，母材と介在物の初期降伏応力である．しかし不思議なことに Ju and Lee[11]ではそのような設定をしていない．このままでは同文献[11]に示されている平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの値を直接本解析に用いることは出来ない．そこで本研究では，介在物が 6% 含まれる場合の実験結果に合うように，各相の初期降伏応力と硬化パラメータを同定する．そのようにして得られた相当応力－相当塑性ひずみの関係を用いて得られる解析結果を「参照解」と呼ぶことにする．そしてこの参照解を元にして，介在物が 13% 含まれる複合材料の挙動の予測を行う．

最初に 6% の介在物を含む材料の引張り挙動の実測値に合うパラメータを探すために，何通りかの相当応力－相当塑性ひずみ関係を用意して数値解析を行ったところ，$\sigma_f = 169 + 600 \times (\bar{\varepsilon}^p)^{0.393}$ の場合に，**図–12** に示されているように実験結果と良く一致することがわかった．つまり，$\bar{\sigma}_Y$ と $\bar{q}$ は文献の指定通りとするが，硬化パラメータを $\bar{h} = 600\,\mathrm{MPa}$ に変更する．

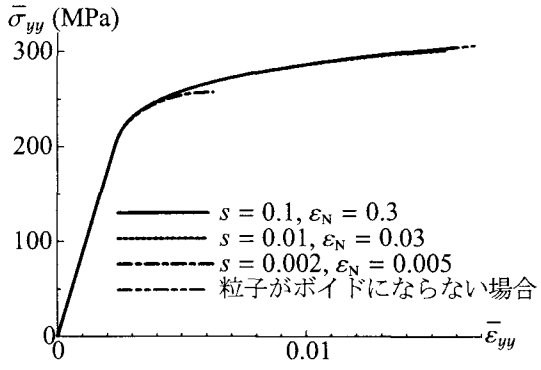
また，各相の初期降伏応力も提示されていないので，式 (19) を用いて，平均初期降伏応力が $\bar{\sigma}_Y = 169\mathrm{MPa}$ になるように ($\sigma_Y^M = 155\mathrm{MPa}$, $\sigma_Y^I = 388.3\mathrm{MPa}$) という組み合わせを設定する．この組み合わせは無限には存在するが，無作為に一例として適当に決めただけである．これを用いて，介在物が 13% 含まれる材料に対する平均初期降伏応力を求めると，体積比率 $f_I = 0.13$ を式 (19) に代入して，平均初期降伏応力は，$\bar{\sigma}_Y = 185.3\,\mathrm{MPa}$ となる．これは相対的に 9.6% 増加したことに相当する．

一方，当然硬化パラメータも介在物が増えると大きくなるはずだが，Ju and Lee[11]はそれを一定としている．ここでは，極めて乱暴な算定ではあるが，平均初期降伏応力の増加分と同じだけ，硬化パラメータも増やすことにする．つまり，硬化パラメータ $\bar{h}$ も 9.6% 増加させると，平均相当流れ応力と平均相当塑性ひずみの関係は，$\bar{\sigma}_f = 185.3 + 657.87 \times (\bar{\varepsilon}^p)^{0.393}$ となる．また，べき乗の部分も 9.6% だけ変化（減少）させると，相当応力－相当塑性ひずみ関係は $\bar{\sigma}_f = 185.3 + 657.87 \times (\bar{\varepsilon}^p)^{0.355}$ となる．これを平均的な塑性特性として用いてみる．ちなみに，上記のような平均初期降伏応力の算定では，変形に伴って増加するボイドの影響は無視されていることに注意する必要がある．実際には，硬化パラメータも，ボイドの発生や進展に伴って変化するべきものではあるが，既往の研究でも，ここでも，それは無視している．

図–13 が，この 2 種類の想定に対する解であり，6% のときの参照解と実験値を併せて示した．実線が平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの $\bar{h}$ だけを改訂した場合，破線は平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの $\bar{h}, \bar{q}$ 両方を改訂した場合である．上述の平均初期降伏応力と平均硬化パラメータを求める算定は極めて乱暴であり，また，ボイドの成長に伴う変化も考慮していないが，実線と破線は定量的にも比較的良く実験結果を予測している．若干，この 13% のときの実験値が，変形



図–13 平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの変更による挙動の変化



図–14 発生パラメータの変更による挙動の変化

と共に勾配が小さくなるのは，ここで無視せざるを得なかった，ボイドの成長等の影響も含むものと予想される．

(2) 剥離による材料全体の挙動の変化

最後に，介在物の破壊や界面剥離によるボイド化の有無による違いと，ボイド生成のパラメータの影響について検討する．**図–13** に示した 13% の介在物が含まれている場合に，式 (11) の発生速度のパラメータ，標準偏差 s と平均値 ε_N が，ここまでの場合の (s = 0.1, ε_N = 0.3) の場合に対し，(s = 0.01, ε_N = 0.03) にした場合と，(s = 0.002, ε_N = 0.005) にした場合に加えて，一切ボイド生成が無い場合を解析して比べてみる．

図–14 にその結果を示したが，s と ε_N が共に小さくなり，介在物の崩壊つまりボイド生成が生じ易くなると，剛性は変形の早い段階で小さくなるはずである．しかしながら，(s = 0.002, ε_N = 0.005) にした場合を除けば，変形特性にほとんど違いがなく，曲線は重なっている．最もボイド生成がし易い設定でのみ，$\bar{\varepsilon}_{yy}$ が 0.007 あたりで軟化が生じてしまい，解析を打ち切った．この場合も，塑性変形がある程度進んでからボイド生成の影響が現れている．

さてこのように，介在物が多くても微視的な材料パラメータに対する全体の挙動の変化が小さい．これは，実際の材料の試験において，こういった微視的な材料パラメータを同定することが難しいことを示唆している．ボイド損傷理論のような考え方は，簡便でかつ微視的な挙動を入れられるものではあるが，実は，そのパラメータの同定には困難がありそうな結論になった．

4. おわりに

本研究では，介在物の破壊や界面剥離によるボイド生成を含み，かつ，その生成の発展則を用いた場合の，延性挙動の数値解析を試みた．ボイド損傷理論は，厳密にボイドと母材の 2 相材料を扱うよりも簡便であることから，強度や耐久性をこういった数値解析で予測できるのは望ましいと考えた．最終的に，本有限要素解析結果と実験結果を比較して，次のような知見を得た．

- ボイドの発生源である粒子を具体的に考慮する解析手法を示すことができた．
- 巨視的には，そのような粒子の存在とボイドの生成はあまり影響は与えないが，微視的な挙動は，より現実的にモデル化できたと考えている．
- ボイドになる可能性のある粒子の考慮の有無や，ボイドの発生パラメータの効果が，巨視的な荷重変位関係に及ぼす影響は小さいため，こういった微視的な力学パラメータを実測することの困難さを示すことになってしまった．
- ただし，塑性状態での各相毎の応力算定に適切な（例えば森・田中理論による）平均化手法を用いていないが，次の点も含めてやはり多相材料としての取り扱いが必須かもしれない．
- 塑性部分の構成関係では母材と介在物・ボイドを一緒に扱っており，ボイドの増加に伴う材料パラメータの変化を無視している．これも，多相材料として今後扱うことを検討したい．

参考文献

1) Gurson, A.L.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Mater. Technol.*, Vol.99, pp.2-15, 1977.
2) Tvergaard, V.: Material failure void coalescence in localized shear bands, *Int. J. Solids Structures*, Vol.18, pp.659-672, 1982.
3) Tvergaard, V.: Material failure by void growth to coalescence, *Advances Appl. Mech.*, Vol.27, pp.83-147, 1990.
4) Burlion, N., Gatuingt, F., Pijaudier-Cabot, G. and Daudeville, L.: Compaction and tensile damage in concrete, constitutive modelling and application to dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.183, pp.291-308, 2000.
5) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
6) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an elastic field of and ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
7) Colantonio, L. and Stainier, L.: Numerical integration of

visoplastic constitutive equations for porous materials, *Numerical Methods in Engineering 96,* (eds. J.-A. Desideri et al.), Wiley Pubs., pp. 28-34, 1996.

8) Yeh, H.-Y. and Cheng, J.-H.: NDE of metal damage: ultrasonics with a damage mechanics model, *Int. J. Solids Structures,* Vol.40, pp.728-7298, 2003.
9) Pijnenburg, K.G.W. and Van der Giessen, E.: Macroscopic yield in cavitated polymer blends, *Int. J. Solids Structures,* Vol.38, pp.3575-3598, 2001.
10) Hu, G.K., Guo, G. and Baptiste, D.: A micromechanical model of influence of particle fracture and particle cluster on mechanical properties of metal matrix composites, *Comput. Mater. Sci.,* Vol.9, pp.420-430, 1998.
11) Ju, J.W. and Lee, H.K.: A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of partially debonded ductile matrix composites, *Int. J. Solids Structures,* Vol.38, pp.6307-6332, 2001.
12) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Transversely isotropic moduli of two partitially debonded composites, *Int. J. Solids Structures,* Vol.34, pp.493-507, 1997.
13) Christman, T., Needleman, A., Nutt, S. and Suresh, S.: On microstructural evolution and micromechanical modelling of deformation of a whisker-reinforced metal-matrix composite, *Mater. Sci. Eng.,* Vol.A107, pp.49-61, 1989.
14) Needleman, A. and Rice, J.R.: Limits to ductility set by plastic flow localization, *Mechanics of Sheet Metal Forming,* (eds. D. P. Koistinen et al.), pp.237-267, 1978.
15) 湯本健寛，岩熊哲夫: 複合材料の平均的初期降伏関数の陽な近似表現，応用力学論文集，土木学会，Vol.7, pp.515-525, 2004.
16) Haušild, P., Berdin, C., Bompard, P. and Verdière, N.: Ductile fracture of duplex stainless steel with casting defects, *Int. J. Pres. Ves. & Piping,* Vol.78, pp.607-616, 2001.
17) Lin, S.C., Yang, C.C., Mura, T. and Iwakuma, T.: Average elastic-plastic behavior of composite materials, *Int. J. Solids Structures,* Vol.29, pp.1859-1872, 1992.

(2005 年 4 月 15 日 受付)