

界面剥離モデルを組み込んだ複合材料有限要素

Finite Element of Composite Materials with Partial Debonding along Boundary

樋口耕平*, 岩熊哲夫**

Kohei HIGUCHI, Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修士(工) JFE エンジニアリング(株)

**正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-06)

Damages in composite materials are mostly governed by interfacial debonding. In order to take this into account, we employ an analytical model considering partial debonding along interface, and formulate a finite element. The model utilizes a concept where a moduli of an inclusion is replaced by an equivalent one of debonded inclusions. By several examples, eligibility of the model is shown. As an application, excavation analysis of a tunnel in jointed rock mass is carried out, and the results are compared with other observations.

Key Words : composites, partial debonding, Mori-Tanaka theory, finite element

1. はじめに

FRP, FRC のような複合材料が社会基盤構造にも用いられるようになってきている。その複合材料は内部の微視構造によって巨視的な材料特性が支配される。このような微視構造を具体的に有限要素でモデル化して、巨視・微視のマルチ・スケール解析をする高精度な均質化法¹⁾は、この材料特性の把握とその境界値問題への適用には非常に有効である。しかし一方で、複合材料の配合設計や成分の最適設計のような材料開発段階では実験による確認が不可欠であるが、実験で設定する材料配合や組み合わせの範囲を狭めるのに役立つ、簡便で精度の高い解析手法も必要である。我々はその目的のために、近代かつ解析的平均化手法を有限要素の構成関係に用いた複合材料要素を提案²⁾し、弾性範囲でのその有用性を示してきた。その後、3次元化や最適化問題への適用^{3),4)}も行い、強度特性予測に対する利用の可能性も検討しつつある。

解析的手法を用いるのは、内部の微視構造の変化を、有限要素メッシュの変更ではなくパラメトリックにできるからであり、それは微視構造や適材箇所の最適化と感度解析を容易にするためである。そのような解析的均質化手法はこれまでに多く提案されている。2相材料の場合には、古くは Voigt や Reuss のモデルがあり、それらは平均剛性の上下界を与えることが知られているが、介在物の形状や向きを考慮できない。本研究で用いる森・田中理論⁵⁾を用いた均質化の場合には、Eshelby の研究成果⁶⁾を基にして等価介在物法⁷⁾と組み合わせることによって平均場を算定している。そのため、Eshelby のテンソルを通して介在物の形状や向きを考慮できるという利点がある。また等方弾性体中に楕円体介在物がある場

合には、その平均剛性を介在物の形状や体積比率といったパラメータで陽に表現できる。さらに介在物形状が球か円柱の場合には、森・田中理論による解が Hashin-Shtrikman⁸⁾の上下界のどちらか一方に等しいこともわかっている。

一方で、複合材料は介在物界面での剥離現象が問題となる場合がある。界面では製造方法などによっては様々な析出物が溜まり易くなるなど、本来結合力が弱い個所である。さらに力学的には、異種材料界面に生じる応力集中の観点からも、このような界面での剥離が優先的に発生し、最終的な複合材料の破壊へと進展していく可能性がある。このように、複合材料の破壊において界面剥離は非常に重要な現象であるが、既往の解析的研究の多くは界面を完全付着としているため、強度予測の観点からは望ましくない。

この界面剥離の影響に着目した研究もいくつかは行われているが、本研究ではその中の Zhao and Weng の提案した界面剥離モデル⁹⁾に着目する。界面剥離が発生した介在物では、その剥離に対応したひとつの方向には応力を伝達しなくなる。その性質を利用し、このモデルでは、その応力伝達の無い方向の剛性を零とする直交異方的な介在物によって、剥離した介在物を表現している。これをここでは「剥離介在物」と呼ぶことにする。このモデルの利点は、従来の任意の平均化手法と近似的に組み合わせることができ、取り扱いが簡便であるということである。この界面剥離モデルは、例えば界面の損傷を考慮した複合材料の弾塑性挙動予測など、多くの応用研究^{10),11)}にも用いられている。また詳細な有限要素解析との比較研究¹²⁾により、その精度に関してもある程度は確認されている。

本研究では、この Zhao and Weng の界面剥離モデル

を、解析的平均化手法を用いた有限要素に導入することによって、界面剥離を考慮した複合材料の解析手法を提案する。また解析的平均化手法としての森・田中理論を、増分型の J_2 流れ理論を厳密に組み込んだモデルに拡張し、微視的な剥離を伴う弾塑性挙動を近似的に解析する。いくつかの数値解析で、剥離の発生についての定性的な予測の妥当性を示し、土木構造への応用の一つとして岩盤掘削時の節理開口の解析を試みる。

2. 界面剥離モデルと剥離基準

2.1 剥離介在物の直交異方弾性係数

剥離介在物の直交異方性の導出方法はいくつかの文献^{11),12)}に詳しいので、ここではその概要を述べる。元々の文献では Hill の short-hand format¹³⁾を用いて定式化しているが、ここではより一般的なテンソル成分の行列表記で説明する。介在物は等方弾性体であるとし、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) において x_1 方向を法線方向とする介在物表面に剥離が生じた場合を例に考える。完全付着、つまり界面剥離がまだ発生していない場合の介在物の弾性テンソルを C_i とし、 C_{ijkl} の成分を持つものとする。介在物内の応力とひずみテンソルをそれぞれ σ, ϵ とする。この節だけでは簡単のために、下添え字 I をとるところで省略している。完全付着の場合の介在物内部の応力ひずみ関係は、 C_{ijkl} を Voigt 表記すれば

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{21}\epsilon_{11} + C_{22}\epsilon_{22} + C_{23}\epsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{31}\epsilon_{11} + C_{32}\epsilon_{22} + C_{33}\epsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= C_{44}\epsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = C_{55}\epsilon_{31}, \quad \sigma_{12} = C_{66}\epsilon_{12}\end{aligned}\quad (1)$$

のように表される。ここで介在物表面が剥離した場合に、介在物はその x_1 方向には表面力の伝達は無いため

$$\sigma_{11} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 \quad (2)$$

の条件を満足する。したがって、剥離した介在物の仮想的な構成方程式 (1) は式 (2) を満たせばいい。すると、剥離介在物の構成則が

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 0 \\ \sigma_{22} &= \left(C_{22} - \frac{C_{21}C_{12}}{C_{11}}\right)\epsilon_{22} + \left(C_{23} - \frac{C_{21}C_{13}}{C_{11}}\right)\epsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= \left(C_{32} - \frac{C_{31}C_{12}}{C_{11}}\right)\epsilon_{22} + \left(C_{33} - \frac{C_{31}C_{13}}{C_{11}}\right)\epsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= C_{44}\epsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{12} = 0\end{aligned}\quad (3)$$

を満たすことになる。この応力ひずみ関係を

$$\sigma = C_I^d \epsilon \quad (4)$$

と置くことにする。つまり界面剥離が生じた介在物は、この式を満足する C_I^d を材料特性とする剥離介在物で置き換えられる。

例えば解析的平均化手法の一つである森・田中理論を用いる場合には、上式の C_I^d を弾性係数とする剥離介在物が存在する場合を通常の方法で求めることによって、剥離した介在物を持つ平均場を算定できる。ただし、剥離介在物の材料特性は直交異方性になっていることから、厳密には Eshelby テンソルが定数にはならない等の問題点はあるが、等価介在物法によって近似された第一次近似としては、工学的には有用な結果を与える^{10),11)}と考えられている。なお、ここでは母材は弾性的には等方とする。

2.2 剥離規準の設定

Zhao and Weng は界面剥離が発生した場合の複合材料の平均剛性を近似する方法を提案しているが、その界面剥離が徐々に発生する条件については言及していない。本研究では増分的な有限要素法を用いることにより、段階的に発生する界面剥離に伴って、複合材料全体が進行的に破壊する境界値問題を近似的に解析するのが目的である。したがって、任意の応力状態における界面剥離の発生条件を設定する必要がある。ただし本研究では、平面ひずみ状態の有限要素で定式化しているので、介在物形状は奥行き方向には無限に長い円柱が楕円柱である。

複合材料の界面剥離に関する実験的研究では様々なアプローチがなされているが、その中に円柱形ファイバーの長軸直角方向の界面強度に注目した研究¹⁴⁾がある。その研究では、円断面の法線方向の応力、つまり界面上の主引張応力が界面剥離に対して最も支配的な要因であると結論付けている。この結論は直感的にも理解しやすく妥当であると判断できるので、本研究でも円形介在物の場合の界面剥離規準を次のように設定することにした。

まず、初期状態での介在物は母材に完全付着しているものとする。したがって当然、その界面上の母材側の応力と介在物のそれは連続している。剥離を生ぜしめる応力は介在物表面のすぐ外側の母材の応力であるが、そこでの連続条件が成立するので、介在物内部における界面法線方向の応力は母材側の応力と同じ値である。さらに介在物は楕円体で近似されており、その結果 Eshelby の解から介在物内部の応力は様になっている。したがって、特に円柱介在物の場合、介在物中の第一主（引張）応力の向きが、その円柱介在物の界面上の剥離の位置と方向を決定する。ここでは、界面の法線方向の応力がある限界値に達したときに剥離が発生する規準を設定することになると、結局は、介在物内部の第一主（引張）応力がその限界値に達したときに界面剥離が発生することになる。この限界値を簡単のために剥離応力と呼ぶことにする。ただし、界面剥離は引張り応力のみで発生し、圧縮応力では発生しないこととする。

一方、介在物が楕円形の場合には少し考えにくい。楕円形の場合、たとえ楕円長軸方向に界面剥離が発生したとしても、短軸方向とほぼ同じ法線を有する長い側面に

沿っては、介在物は母材と完全付着を維持して、まだ十分に応力を伝達することができることは容易に想像できる。これは Zhao and Weng も言及していることである。したがって楕円柱介在物の場合には、界面剥離の発生は楕円短軸方向のみにしか生じないものとする。よって発生規準は、楕円短軸方向の法線応力、つまり介在物中の一様な応力のうちの短軸方向の直応力が剥離応力に達したときに生じるものとする。この場合も楕円体で近似的に介在物を扱うことによって、応力が一様になり、剥離規準も算定し易くなっているのも本手法の利点の一つである。

3. 二相複合材料の弾塑性構成関係と有限要素法への適用

3.1 森・田中理論に基づく二相弾塑性複合材料の各増分量の関係

本研究では、森・田中理論に増分型の J_2 流れ理論を組み込んだ複合材料の弾塑性モデルを用いる。そのモデルの定式化は文献¹⁵⁾に詳しいので、ここではその結果のみを列挙する。ただし本研究では簡単のために、母材のみが弾塑性体であるとするが、それは介在物が補強材として用いられている場合に対応している。介在物が降伏するような場合にも同様の解析は可能であり、文献¹⁵⁾ではそのような定式化がなされている。

母材部分と介在物部分の応力増分および巨視的ひずみ増分は、次のような平均値同士の関係になる。

$$\dot{\sigma}_M = A\dot{\bar{\sigma}} + D\dot{\epsilon}_M^p \quad (5a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B\dot{\bar{\sigma}} - E\dot{\epsilon}_M^p \quad (5b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1}\dot{\bar{\sigma}} + F\dot{\epsilon}_M^p \quad (5c)$$

ここに、 $\dot{\sigma}_M$ と $\dot{\sigma}_I$ はそれぞれ、母材部分と介在物部分の平均応力増分であり、 $\dot{\bar{\sigma}}$ 、 $\dot{\bar{\epsilon}}$ が巨視的な平均応力増分と巨視的な平均ひずみ増分である。 $\dot{\epsilon}_M^p$ は母材の平均的な塑性ひずみ成分で、 $\bar{C}$ が平均弾性係数で

$$\bar{C}^{-1} = \left[I + fS\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}(C_M - C_I) \right] \left[C_M + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}(C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (6)$$

と表現される。ここで C_M は母材の弾性テンソル、 C_I は介在物の弾性テンソル、 S は母材のポアソン比と介在物の形状比と向きで与えられる Eshelby のテンソル、 I は単位テンソル、 f は介在物の体積比率である。さらに、4 階のテンソル A, B, D, E, F は

$$A \equiv \left[I + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}(C_M - C_I)C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (7a)$$

$$B \equiv \left[I + C_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right]$$

$$\left[(C_M - C_I)C_M^{-1} \right] \left[I + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right] (C_M - C_I)C_M^{-1} \quad (7b)$$

$$D \equiv \left[I + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right] (C_M - C_I)C_M^{-1} \quad (7c)$$

$$E \equiv \left[C_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}C_I \right] - \left[I + C_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right] (C_M - C_I)C_M^{-1} \left[I + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right] (C_M - C_I)C_M^{-1} \quad (7d)$$

$$F \equiv I - \left[fS\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}C_I \right] + \left[I + fS\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}(C_M - C_I) \right] \left[C_M + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right]^{-1} (C_M - C_I) \left[fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1}C_I \right] \quad (7e)$$

と定義した。

界面剥離が発生した場合は、上式中の介在物の弾性テンソル C_I を、式 (4) の剥離介在物の弾性テンソル C_I^d で置き換えることになる。なお、式 (7) のテンソル計算の実行では、すべてが等方テンソルなら容易に解析的に算定できるが、ここでは必ずしも等方ではないので、文献¹⁶⁾にある手法を用いて行列計算で求めている。

3.2 降伏条件と流れ則

母材は von Mises の降伏条件に従うものとし、その降伏関数を

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - F_M(\epsilon_M^p) \quad (8)$$

とする。ここに $\sqrt{(J_2)_M}$ は母材の相当応力で

$$\sqrt{(J_2)_M} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\sigma'_M : \sigma'_M} \quad (9)$$

と定義される。プライムは偏差成分を意味する。また ϵ_M^p は母材の平均塑性ひずみである。降伏曲面の半径に相当する硬化関数については、比較的よく用いられるべき乗則を用いて次のよう与える。

$$F_M = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_M^Y + h_M(\epsilon_M^{eq})^{n_M} \quad (10)$$

ここに σ_M^Y は母材の単軸引張り初期降伏応力、 h_M と n_M は硬化パラメータを表し、材料の標準的な単軸引張り実験などから求めるものである。また相当塑性ひずみは

$$\epsilon_M^{eq} \equiv \sqrt{2\epsilon_M^p : \epsilon_M^p} \quad (11)$$

と定義される。

次に流れ則については、塑性ポテンシャルを降伏関数と同じにした関連流れ則で与える。したがって母材部分の塑性ひずみ増分は次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M \quad (12)$$

ここに H_M は硬化係数で

$$H_M \equiv - \frac{\partial F_M}{\partial \sigma_M} \frac{\partial F_M}{\partial \epsilon_M^p} \quad (13)$$

と定義した。ここでは式(10)のべき乗則に従うとしているから、式(10)を式(13)に代入すると

$$H_M = \frac{2^{(n_M/2)-1} n_M h_M}{\sqrt{3}(J_2)_M} (\epsilon_M^p : \epsilon_M^p)^{(n_M/2)-1} (\sigma'_M : \epsilon_M^p) \quad (14)$$

という具体的な表現を求めることができる。

3.3 二相複合材料の弾塑性構成関係

増分型の有限要素解析のためには、巨視的な応力ひずみ関係が必要になる。そのため、まず式(12)に式(5a)を代入すると

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} + \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \dot{\epsilon}_M^p \quad (15)$$

となり、母材部分の塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_M^p = \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (16)$$

と表される。これを式(5c)に代入すると

$$\dot{\epsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (17)$$

となり、最終的に巨視的な応力ひずみ関係が

$$\dot{\sigma} = \left[\bar{C}^{-1} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \right]^{-1} \dot{\epsilon} \quad (18)$$

となる。この関係を簡単のために

$$\dot{\sigma} = X \dot{\epsilon} \quad (19)$$

と表すことにより、右辺の係数 X を有限要素法における要素接線剛性行列を作成する際に用いなければならない。

3.4 有限要素法への適用

本研究では複合材料の構成式(19)を有限要素の要素接線剛性に用いる。前節で示したように二相材料モデルを用いているので、一つの有限要素内には一種類の介在物しか許容できないが、要素数を増やして個々の要素に異なる介在物を入れることによって、近似的にはランダム

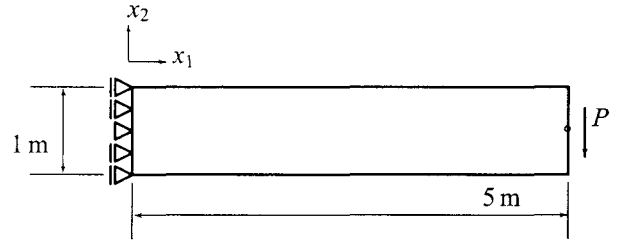


図-1 解析対象の片持ち梁

な介在物分布も扱う²⁾ことはできる。また界面剥離についても同様で、一つの要素は剥離した介在物かそうでない完全付着介在物しか含まれていないことに注意する。なお文献¹⁰⁾では、剥離した介在物の体積比率を増加させていくことによって、界面剥離が徐々に進行するのを表現できるモデルを提案しているが、それよりは本手法の方が実現象には近いモデルだと考えられる。

このように、標準的な有限要素定式化における材料構成則を変更すればいい。ここでは4節点アイソパラメトリック四辺形要素を、増分型に改訂したものを用いる。したがって、要素 e の要素接線剛性方程式は次のように表される。

$$K_e \dot{d}_e = \dot{F}_e \quad (20)$$

ここに、 $\dot{d}_e$ は節点変位ベクトル増分、 $\dot{F}_e$ は節点荷重ベクトル増分である。 K_e が要素接線剛性行列で

$$K_e = \int_{\Omega_e} (\partial N_e)^T \bar{X} (\partial N_e) dA \quad (21)$$

で算定される。 N_e は形状関数、 ∂ は適切な微分演算子からなる行列である。ここで用いている $\bar{X}$ は、式(19)の接線係数テンソル X を、適切に並べ替えて作った接線係数行列である。増分計算では繰り返す計算をせず、剥離が生じた介在物は、次の増分ステップから剥離方向への応力伝達が無くなるという近似を行っている。

4. 解析例

4.1 片持ち梁の曲げ

(1) 要素と材料の設定

界面剥離を伴う問題を、実験値との比較を用いて定量的に扱った文献を見出すことができなかったので、最初は直感的に解の特性を考察できるように、最も簡単な構造部材である片持ち梁を例に解析を行う。解析対象は図-1に示したように、桁高1m、スパン5mの片持ち梁である。メッシュ分割は図のスパン方向に100等分割、桁高方向に20等分割とし、合計2000要素を用いた。変位境界条件は、左辺の節点を全て水平方向に固定し、左辺中央の節点のみを鉛直方向にも固定した。荷重増分は梁先端断面中央の節点に十分小さいと考えられる増分量 3.0×10^{-3} MN/ステップで与えた。材料は文献¹⁷⁾の例を引用し、2124Al母材中に補強材としてSiC繊維を体積

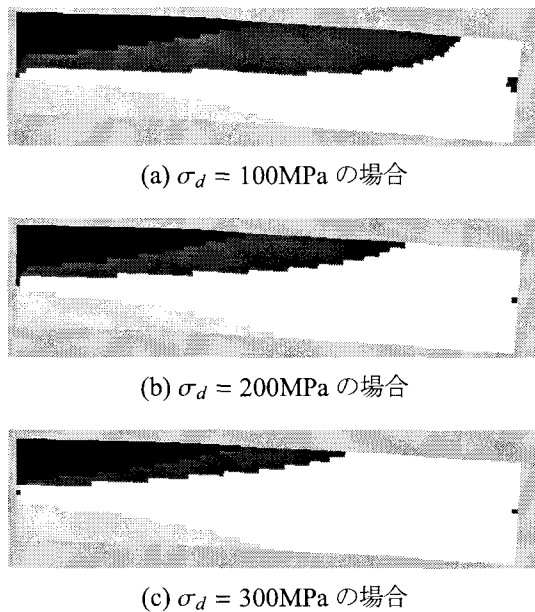


図-2 変形状態図 ($P = 24 \text{ MN}$)

比 20% 介在させた材料とした。2124Al の材料定数は、ヤング率が $E_M = 60 \text{ GPa}$ 、ポアソン比が $\nu_M = 0.3$ 、単軸初期引張り降伏応力が $\sigma_M^Y = 290 \text{ MPa}$ 、硬化パラメータが $h_M = 700 \text{ MPa}$ で $n_M = 0.55$ とした。また SiC 繊維は、ヤング率が $E_I = 450 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_I = 0.2$ とした。

ここで問題となるのが、界面強度を規定する剥離応力の値である。この値は例えば文献¹⁴⁾にあるように、構成材料ごとに実験を行い材料定数として与えられるべきだが、現段階では具体的な値を探し出すことができなかった。そこでここでは、いくつかの値を設定して解析を行うこととして、その影響も併せて検討項目とする。介在物の形状は円形（正確には奥行き方向に無限に長い円柱）とする場合と、半径比 1:5 の楕円形（正確には奥行き方向に無限に長い楕円柱）とする。楕円の主軸の向きについては、各節でその設定を提示する。

(2) 剥離応力の影響

まず界面強度の違いによる影響を検討するために、介在物形状は最も基本的な形状である円形とし、剥離応力が $\sigma_d = 100, 200, 300 \text{ MPa}$ の 3 通りで解析を行う。載荷荷重が $P = 24.0 \text{ MN}$ のときの変形状態図を図-2 に示す。変形状態図中の各要素は 3 種類の灰色と白色で色分けされており、真黒の部分が界面剥離が生じて母材部分も降伏した状態で、濃い灰の部分が母材は降伏していないが界面剥離が生じている状態である。薄い灰の部分は界面剥離は生じていないが母材が降伏した状態で、白い部分は界面剥離も生じておらず母材も弾性である状態を示している。

剥離応力が $\sigma_d = 100, 200, 300 \text{ MPa}$ のいずれの場合も、片持ち梁の上辺側の引張り領域にのみ、剥離領域が左端から広がり始めており、母材の降伏領域は、片持

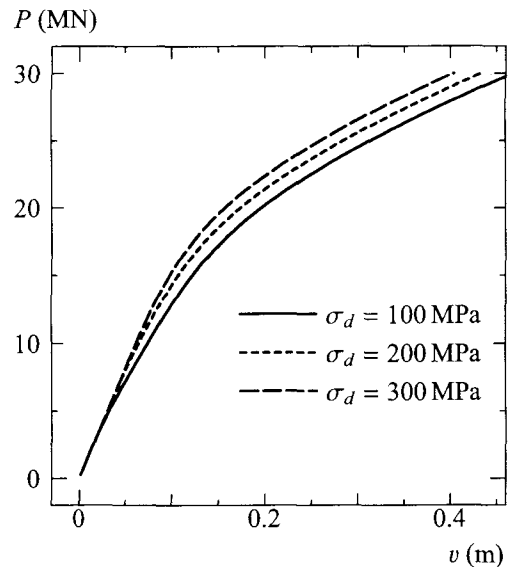


図-3 荷重変位関係

ち梁の圧縮側である下辺左端と引張り側の上辺左端の両方から広がっている。剥離応力の $\sigma_d = 100 \text{ MPa}$ というレベルは、母材の単軸初期引張り降伏応力の $\sigma_M^Y = 290 \text{ MPa}$ よりもかなり小さく設定してあるため、剥離領域の広がりが優先し、それがかなり大きく広がった後に母材の降伏が始まっているのが特徴である。それに対して剥離応力 $\sigma_d = 300 \text{ MPa}$ の場合は剥離応力と降伏応力が同じレベルなので、引張り側の母材が降伏した領域が、剥離領域の広がりをすぐに追いかけるように広がっている。剥離応力 $\sigma_d = 100, 200, 300 \text{ MPa}$ の 3 通りの結果を、片持ち梁右端での荷重変位関係で表示したのが図-3 である。 $P < 5 \text{ MN}$ 程度までは弾性変形しか生じないので、それぞれに差は無い。その後、剥離が生じ易い順に接線剛性は小さくなるが、 $P > 20 \text{ MN}$ では、固定端側が全断面塑性してヒンジになりつつあるために、巨視的な接線係数は、剥離応力とは無関係にほぼ同じになっている。

(3) 介在物の形状と向きの影響

現実の材料の場合、介在物の形状が円形であることは稀で、むしろ楕円形で近似できる場合の方が多いだろう。実際、ここで例として用いた SiC 繊維も文献¹⁷⁾では半径比 1:1.5 のフットボール型の介在物としてモデル化され、比較的良好に挙動予測をしている。よってここでは、介在物形状を半径比 1:5 の楕円形とすることによって、少しだけ現実に近い材料を想定して解析をする。平面ひずみ状態の解析なので、実際の繊維をモデル化できてはいないが、介在物の形状と向きの影響をこの例で考察したい。なお剥離応力は $\sigma_d = 200 \text{ MPa}$ とする。

まず実際の材料を念頭に置き、楕円形介在物がランダムな向きに配置されている場合を対象とする。前述のように、本解析手法では一つの要素には一種類の介在物のみしか介在させることはできない。そこで一つ一つの要素毎に乱数を用いて異なる向きを持った介在物を配置さ

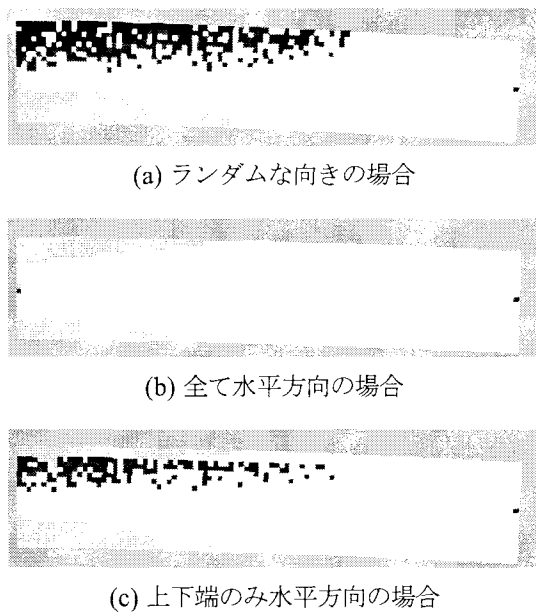


図-4 変形状態図 ($P = 24 \text{ MN}$)

せて、巨視的にはランダムな向きを持った材料を近似する。

解析で得られた変形状態を図-4(a)に示す。載荷荷重は先程と同様に $P = 24 \text{ MN}$ である。第2.2節でも述べたように、楕円形介在物の場合には、界面剥離は楕円短軸法線方向にのみ発生するとしている。ここでも円形の場合と同様に随所に界面剥離が発生しているが、その剥離領域は円の場合よりは疎に分布している。これは、ランダム性を近似するために、ある剥離し易い方向の介在物の数が絶対的に少ないからである。したがって、図-5にも示したように、円形の場合よりも剛性も高くなっている。補強のために介在物を導入しているので、母材の降伏領域は円形の場合の図-2(b)の場合とほぼ同様であり、介在物の向きが降伏に及ぼす影響はそれほど大きいものではない。

次に、楕円形介在物の長軸が全て水平方向を向いている場合¹⁾の結果を図-4(b)に示した。梁の応力状態を考えれば当然であるが、上下辺での界面剥離は全く発生していない。ただし、降伏領域は図-4(a)とほぼ同様である。

またサンドウィッチ板のように、層ごとに繊維の向きを変えた材料を念頭に置き、2000要素の桁高方向の20層のうちの上下表面側2層のみの計4層だけで、楕円形介在物を水平方向に分布させた。それ以外の要素には上述のようにランダムな方向に分布させてある。その結果を図-4(c)に示す。介在物を水平方向に分布させた上端2層の直下左端付近から界面剥離が発生している。これは、上端2層では介在物の向きと主応力の向きの関係で

¹⁾ 介在物の向きは一般にはランダムであるが、高流動コンクリートに繊維を混入した場合には、流動方向に依存した配置になり易いこともあると言われている。また繊維補強の積層板は、ある程度繊維の方向が制御されて製造されている。

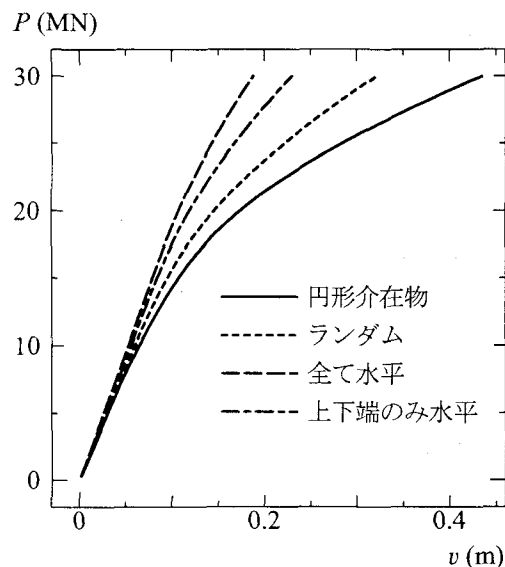


図-5 荷重変位関係

界面剥離の発生が抑制されているため、それに挟まれた内側の材料でしか剥離が生じないからである。また、降伏領域は前の例と同様、円の場合ともほぼ同様になっており、繊維の向きはあまり影響を及ぼさない。

以上の結果の荷重変位関係を図-5に示す。円形介在物の場合の結果も比較のために描いた。ほぼ剥離の程度に逆比例して剛性が高くなることがわかる。つまり、ランダムな向きに分布している場合よりも、全て水平方向に分布している場合の方が剛性が高い。もちろん上下端のみを水平方向に分布させた場合も、ランダムに分布させた場合よりはかなり剛性が改善されている。このように、本解析手法では比較的簡単な計算で介在物の形状や向きによる剥離への改善効果と平均剛性の違いが検討できた。

4.2 円孔のある板

次に、剥離と降伏の広がりや、コンクリートに存在する鈍な亀裂先端の破壊プロセス領域の考察を念頭に置いた例として、円孔のある板の単純引張を検討する。

(1) 介在物形状が円形の場合

材料は文献¹⁸⁾のものを例として用い、2024Alを体積比率34%のボロンファイバーで補強したものを想定する。2024Alの材料定数はヤング率を $E_M = 55 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_M = 0.32$ とし、単軸初期引張り降伏応力を $\sigma_M^Y = 80 \text{ MPa}$ 、硬化パラメータを $h_M = 827 \text{ MPa}$ 、 $n_M = 0.60$ とした。またボロンファイバーの材料定数はヤング率が $E_f = 380 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_f = 0.2$ とする。剥離応力は、片持ち梁のときと同様 $\sigma_d = 50, 100, 150 \text{ MPa}$ の3通りで解析を行ったが、剥離が降伏を追いかける場合を代表例として示すために、ここには $\sigma_d = 150 \text{ MPa}$ の場合を示す。また、介在物の形状も円形の場合と、半径比1:5の楕円形がランダムに分布する場合の二通りと

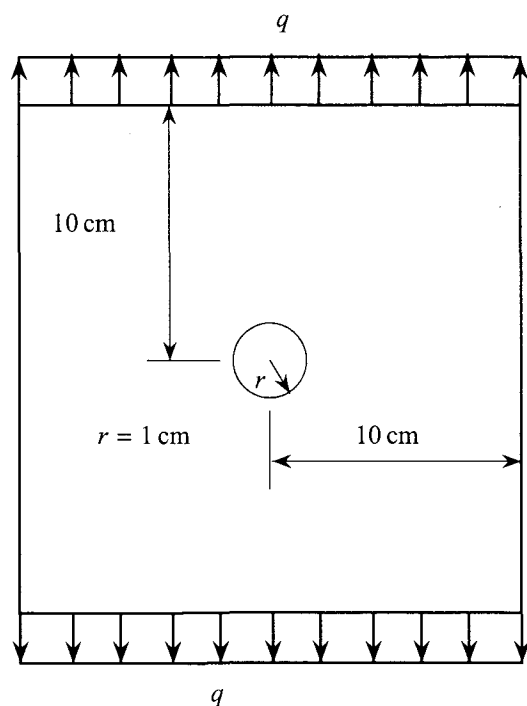


図-6 円孔のある板の単純引張

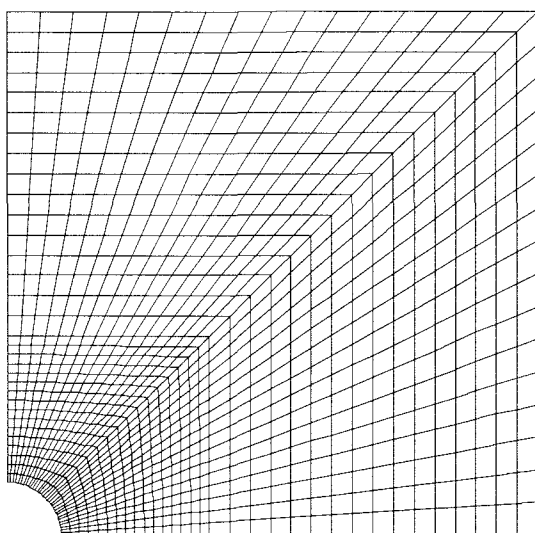


図-7 メッシュ分割図 (要素数 1024)

する。

ここでは図-6に示したように、20 cm×20 cmの正方形平板中央に半径1 cmの円孔が空いているものを、鉛直方向に分布外力 q で引張った場合を対象にする。対称性を利用して、右上の四分の一の領域を1024要素にメッシュ分割したのが図-7である。変位境界条件は、左辺を水平方向に、下辺を鉛直方向に固定する。荷重は上辺に等分布荷重増分を $q = 0.016 \text{ MN/m/ステップ}$ で与えた。

介在物形状は円形として、剥離応力が $\sigma_d = 150 \text{ MPa}$ の場合の結果を図-8に示した。それぞれ載荷荷重が $q = 48, 64, 80, 104 \text{ MN/m}$ のレベルでの、降伏域と剥離が生じた領域を示したものである。薄い灰色と黒い部分で

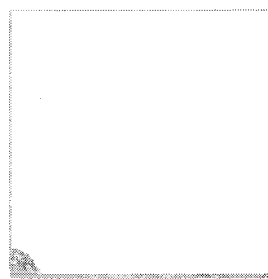


図-8-a $q = 48 \text{ MN/m}$

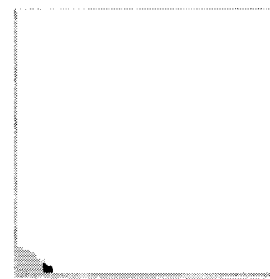


図-8-b $q = 64 \text{ MN/m}$

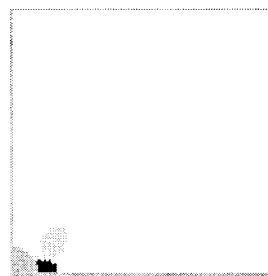


図-8-c $q = 80 \text{ MN/m}$

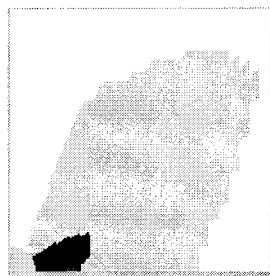


図-8-d $q = 104 \text{ MN/m}$

図-8 円柱介在物の場合

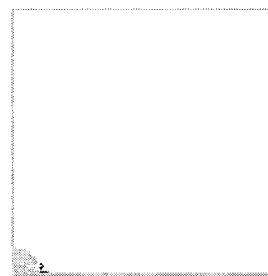


図-9-a $q = 48 \text{ MN/m}$

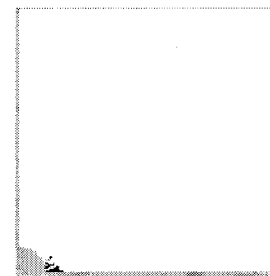


図-9-b $q = 64 \text{ MN/m}$

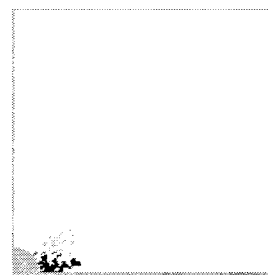


図-9-c $q = 80 \text{ MN/m}$

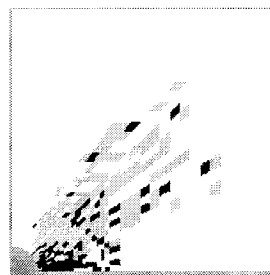


図-9-d $q = 96 \text{ MN/m}$

図-9 ランダムな向きを持った楕円柱介在物の場合

は母材が降伏しており、そのうちの黒い部分は介在物の剥離も生じている。 $q = 48 \text{ MN/m}$ のとき、剥離応力を大きめにしたので、円孔脇からまず母材の降伏が発生する。その後、 $q = 64 \text{ MN/m}$ に達すると、界面剥離も円孔脇から生じ始める。母材の降伏領域は右上方向に拡がり、剥離領域も右方向に拡がっていく。降伏域の広がり、亀裂先端の平面ひずみ状態の降伏域の広がりによく似た蝶の羽半分状になって斜め右上に発展している。界面剥離も、降伏域の広がりによって引張られて拡がっていくが、 $q = 80 \text{ MN/m}$ では真横に進展している。しかし、 $q = 104 \text{ MN/m}$ になると、剥離領域もやや斜め右上に拡

がることは興味深い。これは例えばコンクリート等の内部の鈍な亀裂先端の微視クラックのようなものが、亀裂面延長線方向ではなく、やや斜めに入ることを示唆している。

(2) 介在物形状が楕円形の場合

次に介在物の形状を半径比 1:5 の楕円形として、要素毎にランダムな向きを与えた場合の結果を示す。円形の場合と同様の結果を図-9 に示した。円の場合と同様、載荷荷重が $q = 48, 64 \text{ MN/m}$ くらいの状態で、円孔脇に界面剥離が発生している。ここで与えた介在物向きの場合には、円孔脇での母材の降伏が遅れている。さらに載荷荷重を大きくしていくと、円の場合とほぼ同様に、界面剥離領域は右方向へ、母材の降伏した領域は右上方向に広がっていく。

5. 節理が存在する岩盤における空洞掘削時の挙動解析への応用

最後に、剥離という現象で捉えるのは大胆かもしれないが、社会基盤構造として重要な構造である空洞を掘削する際の節理の影響の把握への可能性を試みたい。地下空洞を掘削する際には、支保工等により空洞の安定性を保つために、空洞周辺の岩盤の挙動を正確に予測し把握しておくことが必要である。しかし岩盤の挙動は、卓越した節理の存在や掘削に伴う地山応力解放等の強い異方性等により、非常に複雑である。主に節理性岩盤の場合には、空洞掘削時の応力解放による節理の開口が複雑な岩盤挙動の支配的要因であると考えられており、このような節理の影響を考慮できる解析手法が必要とされる。既往の研究では、例えばクラックテンソル理論を用いた手法¹⁹⁾やマイクロメカニクスに基づく連続体モデルによる解析 (MBC 解析)²⁰⁾等が挙げられ、各解析手法と実際の空洞掘削との比較検討²¹⁾においてもそれぞれが良い整合を示していることがわかっている。また近年では、空洞掘削後の重要な特性であるクリープ挙動までを追跡できる手法²²⁾なども提案されている。

ここでは、まだ開口していない節理を細長い介在物でモデル化し、その短軸方向の引張による剥離で節理の開口とみなし、岩盤の空洞掘削時の節理開口の分布の解析を試みる。したがって、節理面の凹凸および摩擦を考慮したせん断による開口は考慮できない。

5.1 問題の設定

対象とした空洞は、高さ 4 m、幅 4 m の馬蹄形 (円形部の半径が 2 m) で、この空洞が土被り 200 m 程度の深部に位置すると設定する。解析領域は、境界の影響を少なくするために、ある程度大きな $40 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ とした。解析対象と解析領域のメッシュ分割図を図-10 と図-11 に示した。有限要素数は 1680 である。変位拘束条件は、解析領域上下縁を鉛直方向固定、左右縁を水平

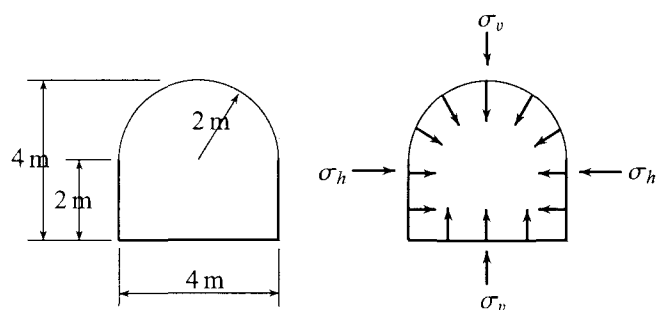


図-10 空洞断面の寸法と荷重条件

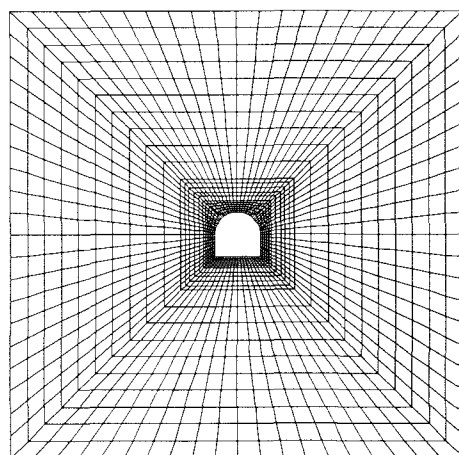


図-11 空洞掘削領域のメッシュ分割図

方向固定とする。空洞掘削による応力解放のみを考えるので、荷重は図-10 に示したように空洞壁面に掘削相当外力を与えることとする。ここでは開口つまり界面剥離のみに着目するので、母材の降伏は考えない。

5.2 一方向の節理が卓越して介在している場合

実際の岩盤中には、ある向きを持った二・三種類程度の卓越した節理群が存在していることがわかっているが、まず、その中の一種類の節理群が特に卓越している場合を考える。本手法を用いる場合は、開口していない節理を介在物でモデル化せざるを得ないので、母材と介在物は同じ材料でできているものとする。基質岩盤の弾性定数をヤング率が $E = 20 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu = 0.20$ とし、介在物も同じとする。介在物の形状は半径比 1:10 の楕円形で、その体積比率を 20% とする。次に界面の剥離応力、つまり節理の開口する応力は、ここでは岩盤の引張り強度を想定してそれより大きめの値として 2 MPa と設定した。荷重は、岩盤の単位体積重量を 2500 kg/m^3 とした上で、鉛直方向の応力解放を土被り圧にほぼ等しい $\sigma_v = 5 \text{ MPa}$ とする。水平方向の応力解放は、側圧係数を 0.8 と設定して $\sigma_h = 4 \text{ MPa}$ とする。

代表的な例として、節理の向きつまり介在物の向きが鉛直方向、60 度、30 度、水平方向である場合の結果を図-12 に示した。灰色のトンネル断面の外側に広がる黒い領域で、剥離が生じている。すべての図からわかるよ

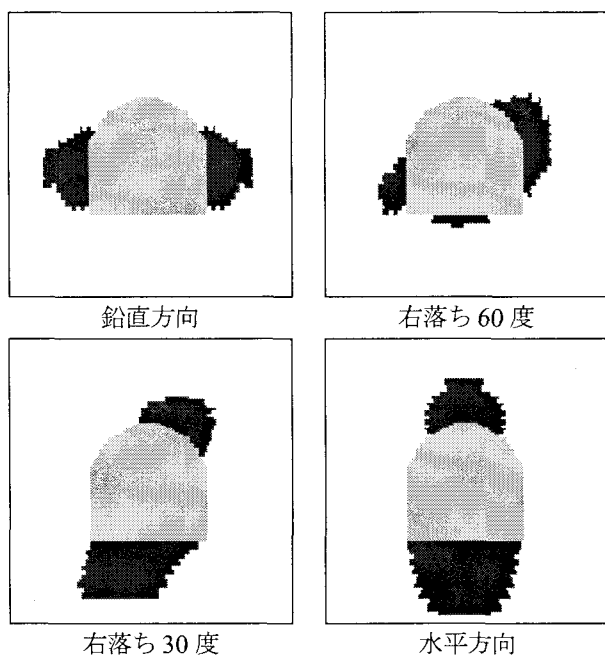


図-12 節理開口領域

うに、すべての節理開口領域は、節理の向きに対してほぼ垂直な方向に進展している。引っ張りで剥離が生じるとしていることから、当たり前の結果ではある。

5.3 二方向の節理が卓越して介在している場合

次に、同時に二方向の節理が卓越している場合を考え、吉田らの解析結果²²⁾との定性的な比較を行う。吉田らの解析手法はMBC解析と呼ばれるもので、マイクロメカニクスに基づいて岩盤中の節理を凹凸のある平面でモデル化し、そのすべり・開口挙動から巨視ひずみを算定することによって、平均剛性を算定して解析している。MBC解析の一つの特徴は、岩盤中の節理の開口変位量を算定できることである。ここでは、そのMBC解析による開口変位分布と本解析手法による剥離発生領域の広がり方との定性的な比較を行いたい。

ここでは、解析条件を吉田らのものと合わせて、水平方向応力と鉛直方向応力はともに30 MPaとし、また卓越する節理等を除いた基質岩盤部の弾性係数はヤング率を $E = 20 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu = 0.25$ とした。剥離応力つまり節理の開口が生じる応力は $\sigma_d = 15 \text{ MPa}$ とした。節理の向きは、吉田らの解析では右落ち60度と左落ち60度の二種類の節理が同時に介在している。本解析では一要素に一種類の節理しか考慮できないので、要素毎に右落ち60度か左落ち60度の節理のどちらかがランダムに分布しているとした。

吉田らの解析結果と本解析手法による開口分布の結果を図-13、14に示した。それぞれ右落ち60度、左落ち60度の節理を有する要素を別々に取り出して描いたものである。本手法では空洞の下部角の開口をうまく予測できていないが、右落ち60度の節理に対しては、空洞の右上部と左下部に節理の開口領域が発生しており、左

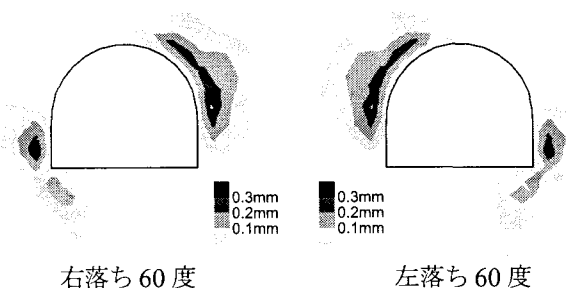


図-13 吉田らの解析による節理の開口変位分布（著者の許諾を得て著者からいただいた(2005/02/09)画像)

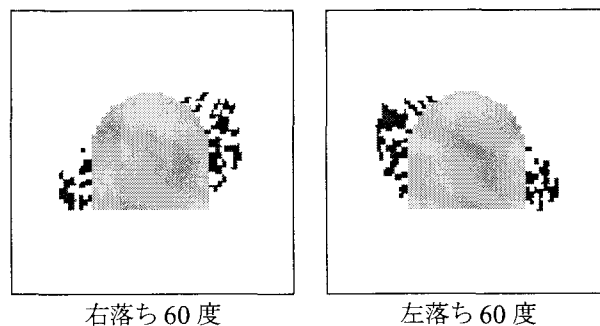


図-14 本解析による節理開口領域

落ち60度の節理に対しては、その逆となっているように、その主要な分布は定性的には吉田らの結果とよく一致している。

6. おわりに

解析的平均化手法と有限要素法とを組み合わせる解析手法に、さらに界面剥離モデルを導入することによって、界面剥離を考慮した複合材料の解析手法を提案した。本解析手法は、介在物の体積比率や形状等を直接入力パラメータとして扱えるので、配合や材料の設計、複合構造の設計の初期段階では有効な手法であろう。例題を通して界面剥離領域と母材の降伏領域の進展を解析した結果、以下のような知見を得た。

- 界面強度を規定する剥離応力は、構造全体の挙動に大きく影響する。
- 介在物の形状・向きの変化と、剥離領域や母材の降伏領域の広がり順番等の関係を予測することが可能である。

また、やや大胆なモデル化ではあるものの、節理を持つ岩盤中の空洞掘削時における変形挙動予測に本解析手法を応用した結果、節理の向きに依存した節理開口領域の進展を、定性的には示すことができた。

謝辞—この研究は、平成15、16年度科学研究費補助金基盤研究(C)（課題番号15560391）の補助を一部受けている。

参考文献

- 1) 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集, No.682/I-56, pp.335-346, 2001.
- 2) 樋口耕平, 岩熊哲夫, 京谷孝史, 寺田賢二郎: 解析的平均化手法を用いた複合材料の平面ひずみ要素, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.107-116, 2003.
- 3) 贅川拓, 河原佳武, 岩熊哲夫, 王峰: 解析的手法を利用した複合材料有限要素の確率有限要素法への応用と最適化の試行, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.107-116, 2003.
- 4) 王峰, 小山茂, 岩熊哲夫: 解析的均質化手法を用いた複合材料・構造の簡易解析と最適化, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.51A, pp.1387-1396, 2005.
- 5) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 6) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 7) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 8) Hashin, Z. and Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- 9) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.493-507, 1997.
- 10) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Plasticity of a two-phase composite with partially debonded inclusions, *Int. J. Plasticity*, Vol.12, pp.781-804, 1996.
- 11) Ju, J.W. and Lee, H.K.: Amicromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of partially debonded ductile matrix composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.307-332, 2001.
- 12) Zheng, S.F., Denda, M. and Weng, G.J.: Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite, *Mech. Mater.*, Vol.32, pp.695-709, 2000.
- 13) Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.89-101, 1965.
- 14) Tandon, G.P., Kim, R.Y. and Bechel, V.T.: Evaluation of interfacial normal strength in a SCS-0/epoxy composite with cruciform specimens, *Composites Sci. Tech.*, Vol.60, pp.2281-2295, 2000.
- 15) 岩崎智昭, 岩熊哲夫, 小山茂: 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.273-282, 2002.
- 16) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.
- 17) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- 18) Ju, J.W. and Zhang X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.
- 19) Oda, M., Yamabe, T., Ishizuka, Y., Kumasaka, H., Tada, H. and Kimura, K.: Elastic stress and strain in jointed rock masses by means of crack tensor analysis, *Rock Mech. Rock Eng.*, Vol.26, pp.89-112, 1993.
- 20) Yoshida, H. and Horii, H.: Micromechanics-based continuum model for a jointed rock mass and excavation analyses of a large-scale cavern, *Rock Mech. Mining Sci.*, Vol.41, pp.119-145, 2004.
- 21) 堀井秀之, 宇野晴彦, 吉田秀典, 芥川真一, 打田靖夫, 森川誠司, 山辺正, 多田浩幸, 京谷孝史, 伊藤文雄: 等価連続体解析手法による塩原発電所空洞掘削時挙動の比較検討, 土木学会論文集, No.659/III-52, pp.211-227, 2000.
- 22) 吉田秀典, 加藤和之, 久米田正邦: 掘削影響領域を考慮した岩盤のクリープ解析手法の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.607-616, 2004.

(2005年4月15日受付)