

すべり摩擦現象を考慮した圧密試験の土-水連成有限要素解析

Soil-Water Coupled Finite Element Analysis of Consolidation Test Considering Frictional Sliding Phenomenon

尾崎伸吾*, 岡安崇史**, 橋口公一***, 陳 玳 ****

Shingo Ozaki, Takashi Okayasu, Koichi Hashiguchi, Dai-Heng Chen

*農博, 東京理科大学助手, 工学部機械工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1丁目3)

**農博, 九州大学助教授, 農学研究院生産環境科学専攻 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6丁目10-1)

***工博, 農博, 九州大学学術特任教授, 農学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6丁目10-1)

****工博, 東京理科大学教授, 工学部機械工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1丁目3)

Deformation of soil skeleton and flow of pore water must be coupled for deformation analyses of saturated soil structures. On the other hand, a rational treatment for contact boundaries connecting each body is needed for analyses of engineering problems since friction and/or sliding are included in almost all technical applications. In this article, in order to strictly consider not only the deformation phenomenon but also the frictional sliding phenomenon, the soil-water coupled finite element program incorporating both the *subloading surface* and the *subloading friction models* is developed. Subsequently, simulations of consolidation test by a constant strain rate control are performed. It is revealed by the present program that the frictional sliding phenomenon of the contact boundary influences the deformation behavior as well as flow of pore water phenomenon in the specimen.

Key Words: *frictional sliding phenomenon, finite element method, subloading surface, soil-water coupling*

キーワード: 有限要素法, すべり摩擦現象, 下負荷面, 土-水連成

1. はじめに

地盤材料は土と間隙水の2相系で構成される場合が多く, 変形解析を行う際には, 土骨格の変形挙動と間隙水の流動現象を連成させて解く必要がある¹⁾⁵⁾. また, 実際の地盤材料は弾塑性体と見なし得るので, 荷重の大きさ・方向・載荷速度・履歴や, 地盤の透水性の差異により, 地盤の変形が異なってくる. そのため, 地盤の弾塑性挙動を適切に表現し得る下負荷面モデルを用いた土-水連成解析が, 近年, 盛んに行われるようになっている^{例えば, 6), 7)}.

他方, 工学上の具体的問題は, 通常, すべり摩擦現象を伴う接触境界を含んでおり, より高精度な解析を行うには, 接触境界に対する適切な力学的処理が不可欠となる. 接触問題の解析は, およそ四半世紀前から塑性加工分野で盛んに取り組まれはじめ, 現在までに, 種々の摩擦モデルや数値計算手法が提案されている^{例えば, 8), 9)}. 著者らもこれまでに, 非古典弾塑性論¹⁰⁾に属する下負荷面摩擦モデルを提案するとともに, 弾性体を対象に種々の境界値問題の解

析に取り組んでいる^{11), 12)}. また, 弾塑性体においては, 杭-砂地盤間の相互作用の解析を行い, 繰返し負荷時のすべり面内部でのすべり摩擦挙動の重要性を指摘している¹³⁾.

これらの数値計算手法の土-水2相系への応用として, 浅岡らは, 接触境界上の要素の変位速度場に角度, 方向および長さ不変の制約条件を課すことにより, 剛体と地盤の接触問題の土-水連成解析法を提案している^{7), 14)}. しかし, 本解析法においては, 接触境界の完全固着条件を前提としており, 接触面における相対変位の発生を厳密に考慮した土-水連成解析例は少ない.

本研究では, 地盤の弾塑性変形現象および接触境界におけるすべり摩擦現象を厳密に考慮するために, 土骨格の変形挙動を合理的に表現し得る下負荷面モデル^{15)~17)}と接触境界面の摩擦現象を現実的に予測し得る下負荷面摩擦モデルを導入した土-水連成有限要素解析プログラムの開発を行った. また, 開発した解析プログラムを用いて, 粘土供試体に対する定ひずみ速度圧密試験の解析を行い, すべり摩擦現象

が解析結果に与える影響について検討を行った。

2. 接触境界を含む土-水連成有限要素法

本章では、接触境界を考慮した土-水連成有限要素法について説明する。なお、本研究では、微小変形論に基づいて定式化を行う。

2.1 基礎関係式

速度形のつり合い式は次式で与えられる。

$$\int_V (\text{div } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T + \rho_w (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{b}) dV = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $(\cdot)$ は物質時間微分、 ρ_w は間隙水の密度、 $\mathbf{D}$ はひずみ速度、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトルである。また、 $\text{tr}(\cdot)$ および $(\cdot)^T$ は、対角和および転置を表している。また、土骨格および間隙水の連続条件は、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x} \quad (2)$$

$$(\int_V dV)^{\cdot} = \int_V \text{tr } \mathbf{D} dV = - \int_S \mathbf{v}_w \cdot \bar{\mathbf{n}} dS \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{L}$ は速度勾配、 $\mathbf{v}$ は物質点 $\mathbf{x}$ の速度ベクトルである。また、 $\mathbf{v}_w$ および $\bar{\mathbf{n}}$ は間隙水の流速ベクトルおよび注目物体上の外向き単位法線ベクトルである。

いま、図-1 に示すような2物体の接触を考える。

Analyzing body に作用する接触応力 $\mathbf{f}$ と external body に作用する接触応力 $\mathbf{F}$ のつり合いは、次式で与えられる。

$$\mathbf{F} = -\mathbf{f} \quad (4)$$

また、有効応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ および有効接触応力速度 $\dot{\mathbf{f}}'$ は、有効応力の原理に基づき次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{p}_w \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{f}}' = \dot{\mathbf{f}}' - \dot{p}_w \mathbf{n} \quad (5)$$

ここに、 $(\cdot)'$ 、 p_w 、 $\mathbf{I}$ および $\mathbf{n}$ は有効応力、間隙水圧（圧縮を正）、恒等テンソルおよび analyzing body 上の単位法線ベクトルを表している。なお、本研究では、土-水間で接線方向の摩擦は生じないと仮定している（すなわち、地盤材料に比して間隙水と物体間の摩擦係数は小さいと見なし得るので、ここでは無視する）。

式(4)および(5)をもとに、接触応力のつり合いは次式で与えられる。

$$\mathbf{F}' - B P_w \mathbf{N} = -(\mathbf{f}' - \beta p_w \mathbf{n}) \quad (6)$$

ここに、 P_w および $\mathbf{N}$ は external body の間隙水圧、および外向き単位法線ベクトルである。また、 $B(0 \leq B \leq 1)$ および $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ は、それぞれの物体の透水性を表すパラメータである。例えば、analyzing body を飽和土、external body を金属やコンクリートと仮定する場合、式(6)は次式のようになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' = -(\mathbf{f}' - p_w \mathbf{n}) \quad \text{for } B=0 \text{ and } \beta=1 \quad (7)$$

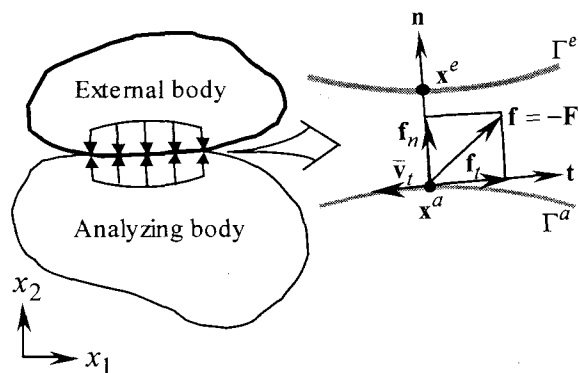


図-1 2物体間の接触

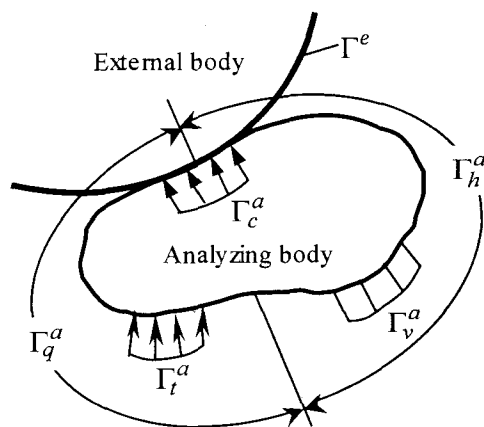


図-2 接触境界を考慮した土-水連成問題の境界条件

他方、external body をポーラーストーンのような透水性の高い物体と仮定する場合、式(6)は次式のようになる。

$$\mathbf{F}' - P_w \mathbf{N} = -(\mathbf{f}' - p_w \mathbf{n}) \quad \text{for } B=1 \text{ and } \beta=1 \quad (8)$$

以下では、圧密試験を想定し、接触境界（側面）では、式(7)の条件下で定式化を進める。

2.2 境界条件

図-2 に接触境界を考慮した土-水連成問題の境界条件を示す。ここに、 Γ^e および Γ^a は external および analyzing body の境界を示し、 Γ_t 、 Γ_v 、 Γ_c 、 Γ_h および Γ_q は、それぞれ表面力速度境界、変位速度境界、接触境界、全水頭境界、流量境界を示す。ここで、変形過程において Γ_c は変化するので、境界 Γ 上の任意の物質点においては接触判定が常に必要となる。接触条件は、analyzing body に作用する有効接触応力の法線成分 f'_n および2物体間の距離 g_n を用いて、次式で表される。

$$g_n \geq 0, \quad f'_n \geq 0, \quad f'_n g_n = 0 \quad (9)$$

または、

$$g_n \geq 0, \quad f_n + p_{wn} \geq 0, \quad (f_n + p_{wn}) g_n = 0 \quad (10)$$

ここに、

$$g_n \equiv (\mathbf{x}^e - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad f'_n - p_{wn} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, \quad p_{wn} = p_w \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

また, $\mathbf{x}^e$ は, analyzing body の表面上の物質点 $\mathbf{x}$ における $\mathbf{n}$ の方向に存在する external body の表面上の物質点である. なお, 2 物体が相対変位を生じつつ変形する場合の $\mathbf{x}^e$ の変位速度 $\mathbf{v}^e$, $\mathbf{x}$ の変位速度 $\mathbf{v}$ および相対速度 $\bar{\mathbf{v}}$ の関係は次式で与えられる.

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^e - \mathbf{v} \quad (12)$$

以上より, analyzing body の境界条件は次式のように整理される.

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_c &= \Gamma^a \cap \Gamma^e \\ \Gamma^a &= \Gamma_v^a \cup \Gamma_t^a \cup \Gamma_c^a = \Gamma_h^a \cup \Gamma_q^a \\ \Gamma_c &\in \Gamma_h^a \cup \Gamma_q^a \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \underline{\mathbf{v}} && \text{on } \Gamma_v^a \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= \underline{\dot{\mathbf{t}}} && \text{on } \Gamma_t^a \\ h &= \underline{h} && \text{on } \Gamma_h^a \\ \mathbf{v}_w &= \underline{\mathbf{v}}_w && \text{on } \Gamma_q^a \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{if } g_n > 0 \text{ and } f'_n = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= -\dot{\mathbf{f}} && \text{if } g_n = 0 \text{ and } f'_n > 0 \end{aligned} \right\} \text{on } \Gamma_c^a$$

ここに, h は全水頭を表しており, $(\underline{\quad})$ は既知量を意味する.

2.3 構成式

弾塑性変形およびすべり摩擦現象に関する構成式は, それぞれ次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C}^{ep} \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{f}}' = \mathbf{C}^f \bar{\mathbf{v}} \quad (15)$$

ここに, $\mathbf{C}^{ep}$ および $\mathbf{C}^f$ は, 後述する下負荷面モデルおよび下負荷面摩擦モデルに基づく剛性係数テンソルである.

間隙水の流速ベクトルは, 次式のダルシー則に従うとする.

$$\mathbf{v}_w = -k \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = -k \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(z + \frac{p_w}{\gamma_w} \right) \quad (16)$$

ここに, k , z および γ_w は, それぞれ透水係数, 位置水頭および間隙水の単位体積重量である.

2.4 仮想仕事の原理式

微小変形論に基づく仮想仕事の原理の線形化方程式は, 式(1)に部分積分およびガウスの発散定理を適用し, 式(14)を考慮するより次式で与えられる.

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}}' : \delta \mathbf{D} dV + \int_V \rho_w (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_V \dot{p}_w \mathbf{I} : \delta \mathbf{D} dV = \int_S \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (17)$$

ここに, $(:)$, $\delta(\quad)$ および $\dot{\mathbf{t}}$ は 2 階のテンソルの内積, 仮想的な量および表面力速度を表している.

他方, 接触応力による仮想仕事速度は, 式(4)およ

び(7)より, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \delta \dot{W}^c &= \int_S \dot{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{v}^e dS + \int_S \dot{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{v} dS \\ &= \int_S -\dot{\mathbf{f}} \cdot \delta \bar{\mathbf{v}} dS \\ &= - \int_S (\dot{\mathbf{f}}' - \dot{p}_w \mathbf{n}) \cdot \delta \bar{\mathbf{v}} dS \end{aligned} \quad (18)$$

式(17)および(18)より, 次式で表される異物体間の接触を考慮した全体の仮想仕事の原理式が得られる.

$$\begin{aligned} &\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}}' : \delta \mathbf{D} dV + \int_V \rho_w (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_V \dot{p}_w \mathbf{I} : \delta \mathbf{D} dV \\ &= \int_S \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_S (\dot{\mathbf{f}}' - \dot{p}_w \mathbf{n}) \cdot \delta \bar{\mathbf{v}} dS \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 有限要素離散化

以下では, $\{\quad\}$ および $[\quad]$ は, それぞれベクトルおよびマトリクスを表す.

要素内の任意の点における座標ベクトル $\{x\}$, 変位速度ベクトル $\{v\}$ および相対速度ベクトル $\{\bar{v}\}$ は, 形状関数 $[N]$ または $[\bar{N}]$ を用いて次式のように表される.

$$\{x\} = [N] \{x^n\}, \quad \{v\} = [N] \{v^n\}, \quad \{\bar{v}\} = [\bar{N}] \{\bar{v}^n\} \quad (20)$$

ここに, $\{x^n\}$, $\{v^n\}$ および $\{\bar{v}^n\}$ は要素の節点座標, 節点変位速度および節点相対変位速度ベクトルである. 式(20)とひずみ速度の定義を基に, 要素のひずみ速度ベクトル $\{D\}$ は次式で与えられる.

$$\{D\} = [B] \{v^n\} \quad (21)$$

ここに, $[B]$ はひずみ速度-節点変位速度マトリクスを表している. また, 式(20)および(21)と同様に次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \{\delta v\} &= [N] \{\delta v^n\}, \quad \{\delta D\} = [B] \{\delta v^n\}, \quad \text{tr} \{\delta D\} = [B_v] \{\delta v^n\}, \\ \{\delta \bar{v}\} &= [\bar{N}] \{\delta \bar{v}^n\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここに, $[B_v]$ は体積変化速度-節点変位速度マトリクスである.

式(15), (20)-(22)を用いて式(19)を離散化することにより, 次式が得られる. なお, 本研究では, ペナルティ法¹³⁾⁻¹⁹⁾を用いて, すべり摩擦現象を制約条件として有限要素法に導入している.

$$\begin{aligned} &\sum_e V_e \left\{ ([B]_e^T [C^{ep}]_e [B]_e + \rho_w [N]_e^T \{b\}_e [B_v]_e) \{du^n\}_e \right. \\ &\quad \left. - [B_v]_e^T \{dp_w\}_e \right\} = \sum_e S_e^t [N]_e^T \{dt^n\}_e \\ &\quad - \sum_e S_e^c \left\{ [\bar{N}]_e^T [T]_e^T [C^f]_e [T]_e [\bar{N}]_e \{d\bar{u}^n\}_e - dp_w [T]_e^T \{n\}_e \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに, $\sum_e(\quad)_e$ は要素の重ね合わせを表しており, また, V_e , S_e^t および S_e^c は要素体積, 表面力速度境界要素面積および接触境界要素面積を表し, $[T]$ は全体座標系 (x_1, x_2) - 局所座標系 (t, n) 間の座標変換マトリクスを表している (図-1 参照). さらに本研究では, 時間増分 dt に関して次式を仮定している.

$$\{df\} = \{f\} dt, \quad \{dt\} = \{\dot{t}\} dt, \quad \{du\} = \{v\} dt,$$

$$\{dp_w\} = \{\dot{p}_w\}dt, \quad \{d\bar{u}\} = \{\bar{v}\}dt \quad (24)$$

式(23)を整理すると次式が得られる.

$$[K] - [K^f] \{du\} - [L]^T - [Tn] \{dp_w\} = \{dF\} - [K^f] \{du^e\} \quad (25)$$

ここに,

$$[K] = \sum_e V_e ([B]_e^T [C^{ep}]_e [B]_e + \rho_w [Bv]_e) \quad (26)$$

$$[L] = \sum_e V_e [Bv]_e \quad (27)$$

$$\{Tn\} = \sum_e S_e^c [T]_e^T \{n\}_e \quad (28)$$

$$\{du\} = \sum_e \{du^n\}_e \quad (29)$$

$$\{dF\} = \sum_e S_e^c [N]_e^T \{d\bar{u}\}_e \quad (30)$$

$$[K^f] = \sum_e S_e^c [\bar{N}]_e^T [T]_e^T [C^f]_e [T]_e [\bar{N}]_e \quad (31)$$

次に, 間隙水の連続条件式(3)を離散化する. 完全飽和した地盤内の任意点とその近傍の点の全水頭に差があるとき, 間隙水の流動はその水頭差に応じて生ずると考えられる. 本研究では既往の研究^{11,7)}を踏襲し, すべての要素について全水頭はそれぞれの要素中心でただ1つ定義され, 隣接要素間で水頭差が生じれば, その差に応じた間隙水の流動が発生すると仮定する. 式(3)および(16)より次式が得られる.

$$\int_V [Bv] \{du\} dv = \sum_{i=1}^4 q_i \{p_{wi} - p_w + \gamma_w(z_i - z)\} \quad (32)$$

ここに,

$$q_i = k \left(\frac{b_{x1} l_{x1} + b_{x2} l_{x2}}{(l_{x1}^2 + l_{x2}^2) \gamma_w} \right) dt \quad (33)$$

l_{x1} および l_{x2} はそれぞれ要素中心間の距離の x_1 および x_2 方向成分, b_{x1} および b_{x2} は隣接要素境界面 i の長さの x_1 および x_2 方向成分である. 式(24), (32)および(33)より, 次の間隙水の流動と土骨格の変形に関する制約条件式が得られる.

$$[L] \{du\} = [q] (\{dp_w\} + \{dz\}) \quad (34)$$

さらに, 式(25)および(34)を連成させることにより, 次式の接触境界を考慮した増分形の土—水連成剛性方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} K - K^f & -(L^T - Tn) \\ -L & q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dp_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K^f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここに, 式(32)の右辺の係数 q_i を γ_w で割ったものを, 各配置へ割り振りマトリクスとして表したものを $[q]$ としている. また, $\{Z\}$ は式(34)で dz を含む項である. なお, 本研究では, 間隙水圧および位置水頭の計算には, 次式の差分法を用いて時間離散化している.

$$\left. \begin{aligned} p_w &= \theta p_{w|t+dt} + (1-\theta) p_{w|t} \\ z &= \theta z_{t+dt} + (1-\theta) z_t \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ここに, $0 \leq \theta \leq 1$ である.

3. 構成式

本章では, 非古典弾塑性論¹⁰⁾に基づく下負荷面モデルと下負荷面摩擦モデルについて概説する.

2.1 下負荷面モデル

下負荷面モデル¹⁵⁾⁻¹⁷⁾は, 降伏面の内部を純弾性域とせず, 正規降伏面内部に常に現応力点を通り正規降伏面と相似形を保ちながら膨張および収縮する負荷面の役割を果たす下負荷面を仮定することにより, その内部での応力速度によっても塑性変形を表現し得るモデルである (図-3 参照). また, 本モデルは構成モデルとしての諸力学的要求条件を満足し得る^{18), 19)}. 以下に, 本モデルの定式化および具体的な材料関数について述べる.

ひずみ速度 $\mathbf{D}$ は, 弾性ストレッチング $\mathbf{D}^e$ と塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ に加算分解されるとする. $\mathbf{D}^e$ は応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ と Hooke 則型の4階の弾性係数テンソル $\mathbf{E}$ を介して, 次式のように線形的に関係付けられる.

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (37)$$

正規降伏面ならびに下負荷面は次式で与えられる.

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = F(H), \quad f(\boldsymbol{\sigma}') = RF(H) \quad (38)$$

ここに, R および H は正規降伏面の大きさ F に対する下負荷面の大きさの比 (正規降伏比) および等方硬・軟化スカラー変数である.

塑性負荷過程において, 下負荷面は常に正規降伏面に漸近するものと仮定して, R の発展則は次式で与えられる.

$$\dot{R} = U(R) \|\mathbf{D}^p\| \quad \text{for } \mathbf{D}^p \neq 0 \quad (39)$$

ここに, 関数 U は R を変数とする単調減少関数であり, その具体形として次式を採用する.

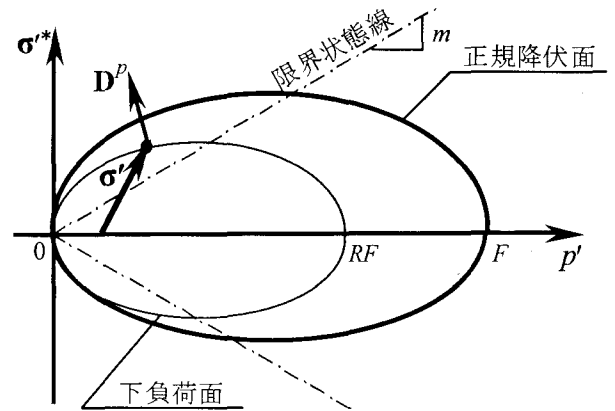


図-3 正規降伏面および下負荷面

$$U = -u \ln R \quad (40)$$

ここに、 u は材料定数である。

次に、下負荷面に対して関連流動則 $\mathbf{D}^p = \lambda \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ は下負荷面の外向き単位法線) を適用し、式(39)とともに式(38)₂の物質時間微分式に代入することにより、塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ が具体的に得られる。本モデルに基づく応力速度－ストレッチング関係式は次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\mathbf{NED})}{M_p + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \mathbf{EN} \quad (41)$$

ここに、

$$M_p \equiv \left(\frac{F'}{F} h + \frac{U}{R} \right) \text{tr}(\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}') \quad (42)$$

$$h \equiv \frac{\dot{H}}{\lambda} \quad (43)$$

土の材料関数 $f(\boldsymbol{\sigma}')$ として次式を採用する。

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = p' \left\{ 1 + \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}'^*\|}{p'} \right)^m \right\} \quad (44)$$

ここに、

$$p' \equiv -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'), \quad \boldsymbol{\sigma}'^* \equiv \boldsymbol{\sigma}' - p' \mathbf{I} \quad (45)$$

$$m = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3 - \sin \phi \sin 3\theta_\sigma}, \quad \sin 3\theta_\sigma \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}'^{*3}}{\|\boldsymbol{\sigma}'^*\|^3} \quad (46)$$

また、 $\|\cdot\|$ は大きさを表し、 ϕ は材料定数である。

等方硬・軟化関数 F は次式で表される。

$$F = F_0 \exp\left(\frac{H}{\rho - \gamma}\right) \quad (47)$$

ここに、 F_0 は初期の降伏面の大きさを表す。また、 ρ および γ はそれぞれ圧力 p' と体積 v の両対数線形関係 $(\ln p' - \ln v)$ における正規圧密線および膨潤線の勾配を示す。等方硬・軟化スカラー変数 H の発展則は、次式で与えられる。

$$\dot{H} = -D_v^p = -\lambda \text{tr} \mathbf{D}^p = -\lambda \text{tr} \mathbf{N} = \lambda h \quad (48)$$

さらに、 $\ln p' - \ln v$ 関係およびポアソン比 ν より、体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G は、次式で与えられる。

$$K = p' / \gamma \quad (49)$$

$$G = 3K(1 - 2\nu) / \{2(1 + \nu)\} \quad (50)$$

式(49)および(50)より、式(37)の弾性係数テンソルは、具体的に次式で与えられる。

$$E_{ijkl} = (K - 2/3G) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (51)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker's delta を表す。

2.2 下負荷面摩擦モデル

著者らは、前述の下負荷面の概念を古典摩擦モデル²⁰⁾⁻²⁵⁾に導入することにより、摩擦基準以下での非弾性すべり現象の発生を許容し得る下負荷面摩擦モ

デル¹¹⁾⁻¹³⁾を提案した。本モデルにおいても下負荷面モデルと同様に、弾塑性構成モデルとしての諸要求条件は満足される。以下に、本モデルの定式化ならびに具体的な材料関数について述べる。

既往の摩擦モデル同様本モデルでは、弾塑性論の考えに基づき、接触面における相対速度 $\bar{\mathbf{v}}$ は、弾性部分 $\bar{\mathbf{v}}^e$ と塑性部分 $\bar{\mathbf{v}}^p$ に加算分解されると仮定する。ここで、弾性部分は、有効接触応力速度 $\dot{\mathbf{f}}'$ と 2 階の摩擦に関する弾性係数テンソル $\mathbf{C}^e$ を介して、次式のように線形に関係付けられる。

$$\dot{\mathbf{f}}' = -\mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} \quad (52)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_n^e &= \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbf{C}_t^e &= \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

α_n および α_t は接触面における弾性 (ペナルティ) 係数、 $\otimes$ はテンソル積を表しており、 $(\cdot)_n$ および $(\cdot)_t$ は、それぞれ法線および接線成分を示している。

いま、古典摩擦論における摩擦基準 (すべり面) を正規すべり面と称し、その内部に正規すべり面に相似で、かつ、原点に関してこの面と相似な配置にある次式のすべり下負荷面を導入する。

$$\bar{f}(\|\mathbf{f}'_n\|, \|\mathbf{f}'_t\|) = \bar{R} \bar{F}(\bar{H}) \quad (54)$$

ここに、 $\bar{H}$ は摩擦に関する等方硬・軟化変数である。本モデルでは、このすべり下負荷面が常に負荷面の役割を担うため、正規すべり面内部でも塑性相対変位の発生が許容される。なお、正規すべり面の大きさ $\bar{F}$ に対するすべり下負荷面の大きさの比 $\bar{R}$ ($0 \leq \bar{R} \leq 1$) を正規すべり比と称する。

さて、塑性的な相対変位 (すべり) の進行とともに接触応力は正規すべり面に近づく、すなわち、塑性相対速度が生じるとき、正規すべり比は増大することを考慮して、次式で与えられる正規すべり比 $\bar{R}$ の発展則を導入する。

$$\dot{\bar{R}} = \bar{U}(\bar{R}) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (55)$$

ここに、

$$\bar{U} = -\bar{u} \ln \bar{R} \quad (56)$$

$\bar{u}$ は材料定数である。これにより、すべりの発生が適度に調整されるので、本モデルにおいては滑らかな接触応力－相対速度関係が予測される。

次のすべり流動則を採用する。

$$\bar{\mathbf{v}}^p = -\lambda \mathbf{t} = -\lambda \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (\lambda > 0) \quad (57)$$

式(57)および(55)を式(54)の物質時間微分式に代入し得られる摩擦に関する適応条件と、相対速度の加算分解および弾性部分式(52)より、下負荷面摩擦モデルに基づく接触応力速度－相対速度関係式が得ら

れる。すなわち、

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^f \bar{\mathbf{v}}, \quad (58)$$

ここに、正規すべり面は変化しないと仮定した場合 ($\bar{F} = \text{const.}$)、 $\mathbf{C}^f$ は次式で表される。

$$\mathbf{C}^f = - \left\{ \mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{\partial \bar{f}}{\partial \|\mathbf{f}'_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial \bar{f}}{\partial \|\mathbf{f}'_t\|} \mathbf{t} \right)}{\bar{U}\bar{F} + \alpha_t \frac{\partial \bar{f}}{\partial \|\mathbf{f}'_t\|}} \right\} \quad (59)$$

本研究では、すべり条件式の具体的な関数として、次の涙型のすべり面¹¹⁾⁻¹³⁾を採用する (図-4 参照)。

$$\bar{f}(\|\mathbf{f}'_n\|, \|\mathbf{f}'_t\|) = \|\mathbf{f}'_n\| \exp\left(\frac{\bar{\lambda}^2}{2}\right) \quad (60)$$

ここに、

$$\bar{\eta} = \|\mathbf{f}'_t\| / \|\mathbf{f}'_n\|, \quad \bar{\lambda} = \bar{\eta} / M \quad (61)$$

ここで、本摩擦モデルの材料定数の物理的意味について簡単に説明する。 $\bar{F}$ および M は正規すべり面の大きさを規定する材料定数および限界状態 ($\bar{\lambda} = 1$) での法線応力と接線応力の大きさの比を規定する材料定数である。また、 α_n および α_t は、接触界面の圧縮試験より材料の弾性特性として決定されるが²³⁾、本研究では *Penalty* 法に基づく解析アルゴリズムを採用しているため、有限要素辺の長さを加味しつつ、十分に大きな値を用いている^{8), 9), 21), 25)}。さらに、 $\bar{u}$ は接触面の粗さや凹凸の形状・分布、凝着の程度、さらには接触物体の弾塑性特性等に依存する現象論的な材料定数である。

4. 数値解析条件

地盤の圧密特性を調べるために圧密試験が行われる。この試験は、供試体を剛性の高い金属製圧密リングにセットした後、供試体上面から荷重を段階的に載荷、または定ひずみ速度で負荷することにより、供試体の排水圧縮特性を測定しようとするものである。しかし、供試体と圧密リングの間には、いかなる摩擦低減処理を施した場合でも、周面摩擦が介在するため、試験結果は、少なからずすべり摩擦現象の影響を受けることになる。そこで本研究では、定ひずみ速度圧密試験を対象に周面摩擦が圧密特性に及ぼす影響について有限要素解析で明らかにする。

図-5 に解析に用いた有限要素メッシュおよび境界条件を示す。なお、供試体は、高さ 2cm、半径 3cm の粘土供試体を想定し、軸対称条件の下で 4 節点アイソパラメトリック要素により 600 要素に分割した。境界条件は底面を非排水、上面を排水境界、側面を接触境界とし、載荷条件はひずみ速度一定 (0.03%/min) とした。解析は圧密圧力が 640kPa に達するまで行っている。

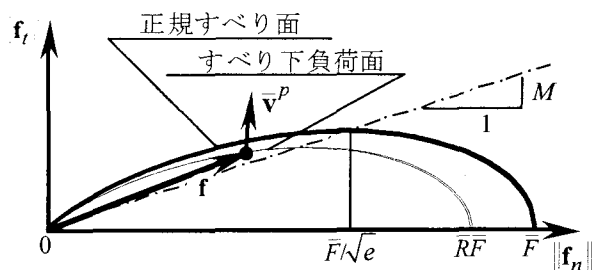


図-4 正規すべり面およびすべり下負荷面

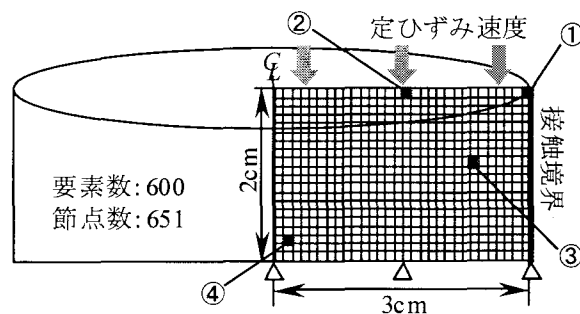


図-5 有限要素メッシュおよび境界条件

表-1 材料定数

(a) 下負荷面モデル

F_0 (kPa)	1	u	10
ν	0.33	ϕ (deg.)	36.4
ρ	0.08	k (m/s)	1.0×10^{-8}
γ	0.008	γ_g (kN/m ²)	16

(b) 下負荷面摩擦モデル

$\bar{F}$ (kPa)	265	M	0.01, 0.1
α_t, α_n (MPa)	1000	$\bar{u}$	10, 1000 (= ∞)

表-1 に解析に用いた下負荷面および下負荷面摩擦モデルの材料定数を示す。なお、供試土は、OCR=10 の過圧密粘土を想定している。また、いずれの解析においても、初期法線応力は粘土内初期垂直応力と等しく、初期接線応力はゼロと仮定した。すなわち、初期 $\bar{R}$ は固定して $\bar{u}$ の効果について検討した。

解析においては、以下に示す供試体-圧密リング間の周面摩擦条件について、比較・検討を行った。

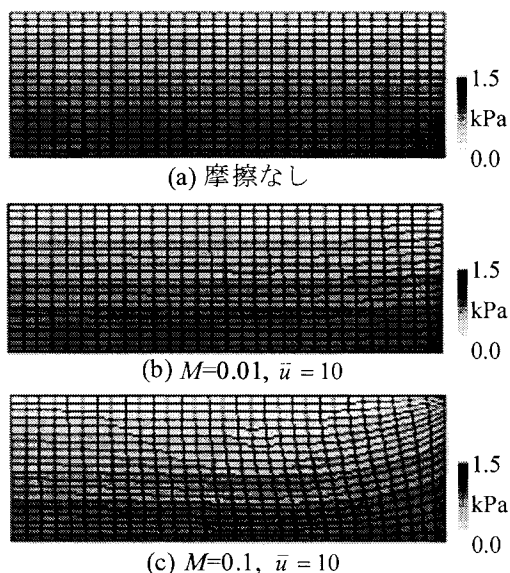
- 1) 本モデルにおいては、 M を小さくすることにより、より低い接線接触応力で正規すべり状態 ($\bar{R} = 1$) に達するため、周面摩擦低減処理を施した場合と同等の効果を発揮し得る。そこで、圧密リングに①周面摩擦低減の処理有りの場合を $M = 0.01$ 、②処理無しの場合を $M = 0.1$ ($\|\mathbf{f}'_t\| / \|\mathbf{f}'_n\| = 0.2 \sim 0.25$ 程度) と設定した。

- 2) 正規すべり面内部でのすべり摩擦挙動の影響を検討するため、①摩擦なし（既往の解析）、②下負荷面摩擦モデル($\bar{u}=10$ を代表値として設定)および③古典摩擦モデル($\bar{u} \rightarrow \infty$)による3パターンの供試体－圧密リング間の周面摩擦条件を設定した。なお、モデル間の相違を把握しやすくするため、 $M=0.1$ の場合のみ検討した。

5. 結果および考察

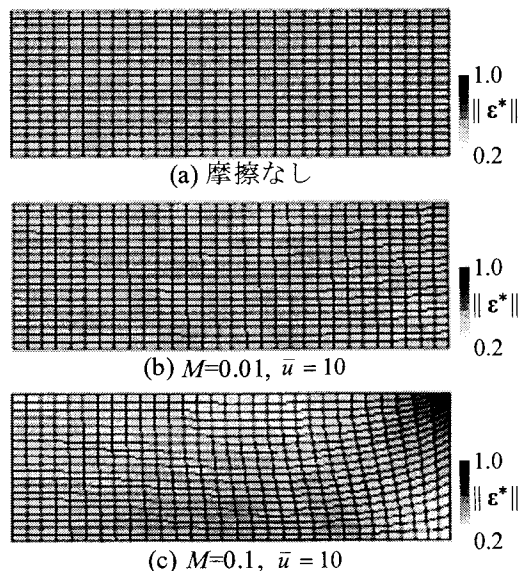
図－6に載荷終了（圧密圧力=640kPa）時における供試体内の間隙水圧分布を示す。図は、それぞれ(a)摩擦なし、(b) $M=0.01$ 、 $\bar{u}=10$ および(c) $M=0.1$ 、 $\bar{u}=10$ の結果である。本図より、圧密試験において、本来、水平方向に対して一様に分布しなければならない間隙水圧が、摩擦の影響により不均一な分布となり、供試体全体の変形に影響を及ぼしている様子がわかる。また、図－6(b)および(c)の対比により、試験における周面摩擦低減処理の効果を検討可能であることを示している。

図－7に載荷終了時における偏差ひずみ分布を示す。図は、(a)摩擦なし、(b) $M=0.1$ 、 $\bar{u}=10$ および(c) $M=0.01$ 、 $\bar{u}=10$ の結果をそれぞれ示している。摩擦なしの場合、偏差ひずみは水平方向に均一に分布しているのに対して、摩擦を考慮した場合には、接触面および上端に近づくにつれ急激に大きくなっている。つまり、周面摩擦低減処理により供試体の要素挙動が飛躍的に改善されており、この処理により試験精度の向上が期待されることが解析によっても示されている。さらに、本解析結果から、圧密試験で要素挙動がある程度満足されている領域の予測

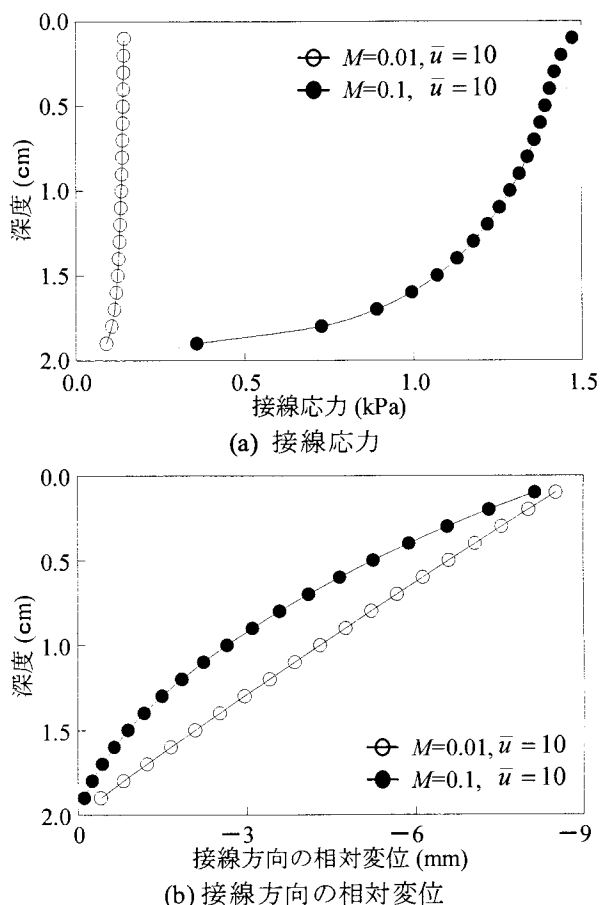


図－6 載荷終了時の間隙水圧分布

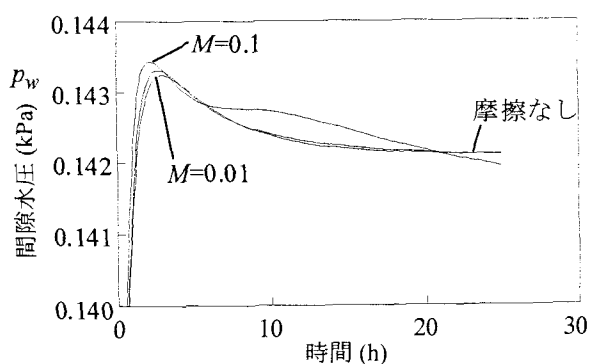
も可能であると期待される。図－8(a)および(b)に載荷終了時の接触境界における接線応力および接線方向の相対変位分布図を示す。図より、上端から下端に従って接線応力および相対変位が減少している様子がわかる。また、 M が大なほど、高い接線応力が



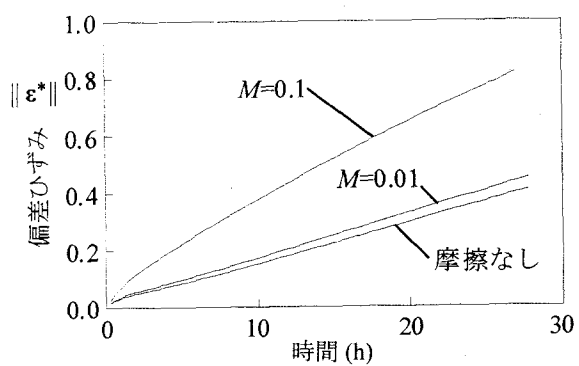
図－7 載荷終了時の偏差ひずみ分布



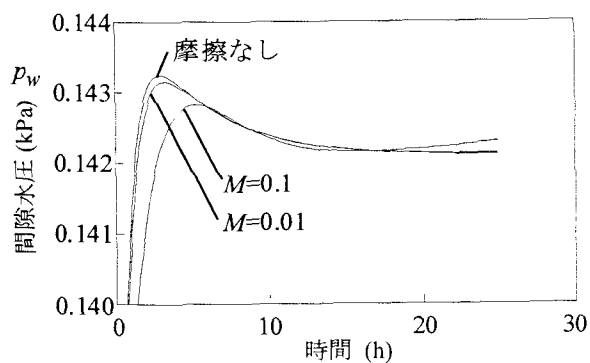
図－8 圧密終了時の(a)接線応力および(b)接線方向の相対変位分布



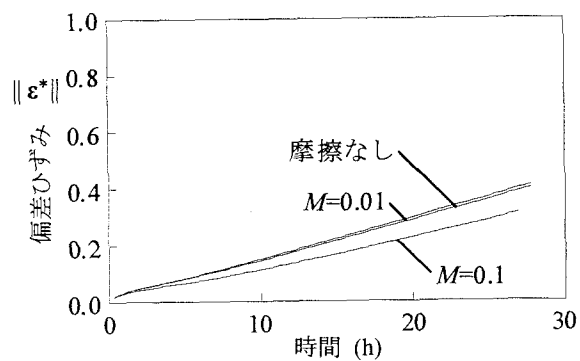
(a) 要素①



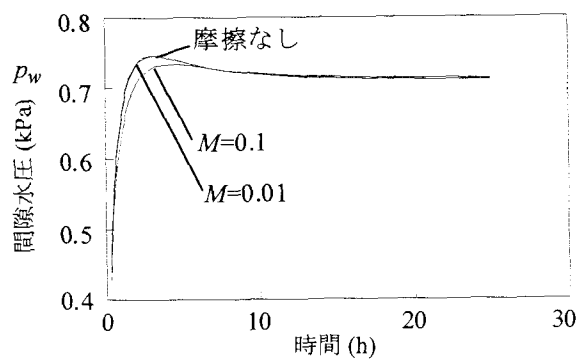
(a) 要素①



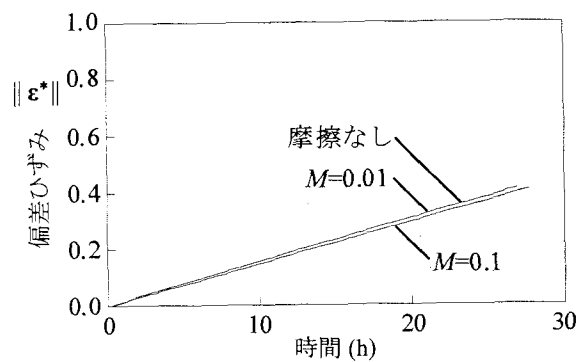
(b) 要素②



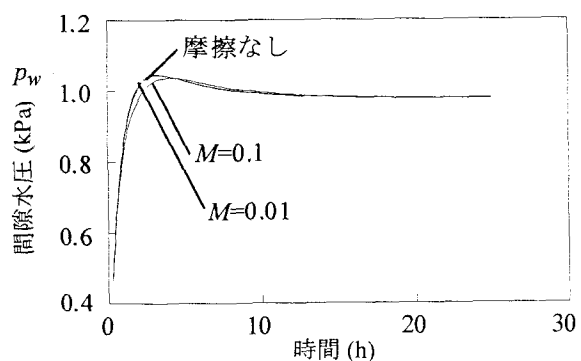
(b) 要素②



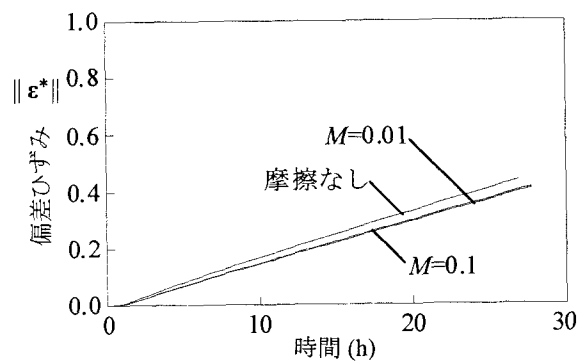
(c) 要素③



(c) 要素③



(d) 要素④



(d) 要素④

図-9 間隙水圧の経時変化 ($\bar{u} = 10$)

図-10 偏差ひずみの経時変化 ($\bar{u} = 10$)

分布するとともに、相対変位が生じ難くなっている。本結果から、すべり摩擦現象が不均一な間隙水の分布や変形を誘発していると推察される。

図 6-8 に示した、摩擦による間隙水圧発生メカニズム、ひいては供試体変形への影響を検討するため、図-9 および 10 に a) 摩擦なし、b) $M=0.01$, $\bar{u}=10$ および c) $M=0.1$, $\bar{u}=10$ の場合の①-④の各要素（図-5 参照）における間隙水圧 p_w および偏差ひずみ $\|\varepsilon^*\|$ の経時変化を示す。

摩擦が大きい場合($M=0.1$)、供試体内部②では接触面近傍の要素①に比べて、間隙水圧の散逸が悪いことがわかる。これは、接触面近傍の要素①は、周面摩擦により内部の要素に比べ圧縮が大となり、間隙水が供試体中心方向に向かって水平にも移動しているためであると推察される。また、摩擦低減処理を施した場合は、摩擦が無い場合とほぼ同様の経時変化を示している。他方、いずれの条件下でも参照位置によらず、要素の偏差ひずみは時間経過とともに増大している様子がわかる。しかし、摩擦なしの場合は、いずれの参照位置でもほぼ同様の経時変化を示すのに対して、すべり摩擦を考慮すると、発生するひずみの大きさに差異が生じることが確認される。さらに、 M が大（摩擦低減処理なし）になると、供試体側方の要素になるほど、偏差ひずみの発生が顕著となり、摩擦なしのグラフから乖離していく様子が認められる。つまり、摩擦の影響によって、供試体の変形、ひいては間隙水圧の発生に不均一を生じ、その影響が大の場合には、圧密試験はもはや要素試験とは言えない境界値問題となることを示唆している。なお、いずれの要素においても、 M が小さい場合は、摩擦なしの基本経路から若干乖離するものの、 M が大きい場合に比して、ほぼ同様の経時変化を示しており、摩擦低減処理が圧密試験において非常に効果的であることが裏付けている。

以下では、古典摩擦モデルと($\bar{u} = \infty$)下負荷面摩擦モデル($\bar{u} = 10$)による解析結果の相違について検討する。

図-11(a)および(b)に、載荷終了時の接触境界における接線応力および接線方向の相対変位分布図を示す。古典摩擦モデルを用いた場合、接触面全体で接線応力の分布が過大に、かつ、相対変位量の分布が過少に評価されるのに対して、下負荷面摩擦モデルを用いた場合、多くの試験で観察されているように²⁶⁾⁻³⁰⁾、接線応力の大きさに応じた相対変位の発生が適度に予測されている。

図-12 に①-④の各要素（図-5 参照）における偏差ひずみ $\|\varepsilon^*\|$ の経時変化を示す。古典摩擦モデルを

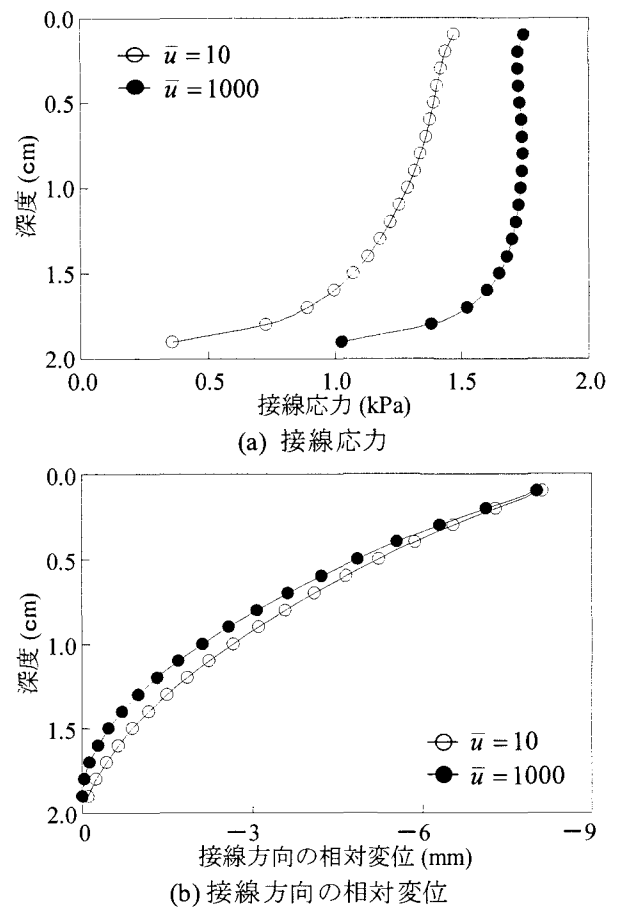
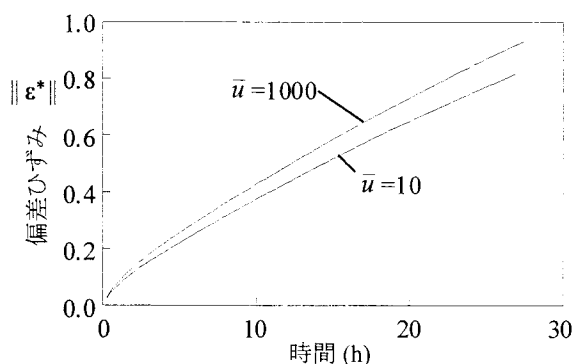


図-11 載荷終了時の(a)接線応力および(b)接線方向の相対変位分布

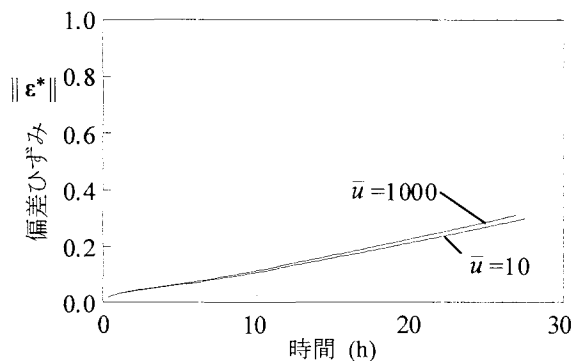
用いた場合、偏差ひずみは下負荷面摩擦モデルを用いた場合に比して高く予測されており、正規すべり面内部でのすべり摩擦挙動が供試体の変形に影響を及ぼしている様子がわかる。また、その影響は、供試体側方および上部ほど大きくなっていることが確認される。

図-13(a)および(b)に沈下量と総接線接触力および総法線接触力と関係を示す。圧密の進行とともに総接触力は増加しているが、法線力に関しては、モデルによる差異は特に見られなかった。他方、接線力に関しては、図-11 より推察されるように、古典摩擦モデルを用いた場合の方が、下負荷面摩擦モデルに比して高い接線力が予測されている。これは、古典摩擦モデルでは、無限小の相対変位でも、法線応力に応じた最大接線応力が予測されてしまうためである。

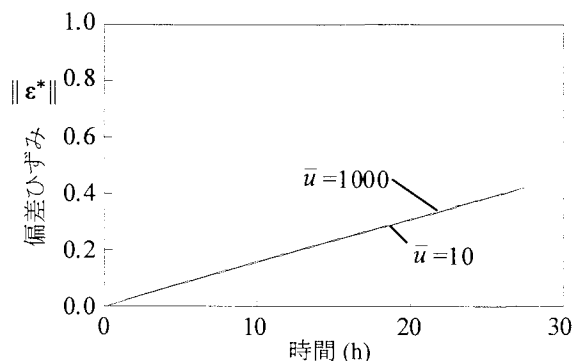
このように、下負荷面摩擦モデルを用いることにより、少ない材料定数(M , $\bar{u}$ の 2 個)で様々なすべり摩擦状態を適切に表現可能であると推察される。なお、塑性相対変位の集積 $\int \|\bar{u}^p\| dt$ に基づく、正規すべり面の発展則を導入することにより、材料定数 $\bar{F}$ および M は、より明確に決定できると考えられる。



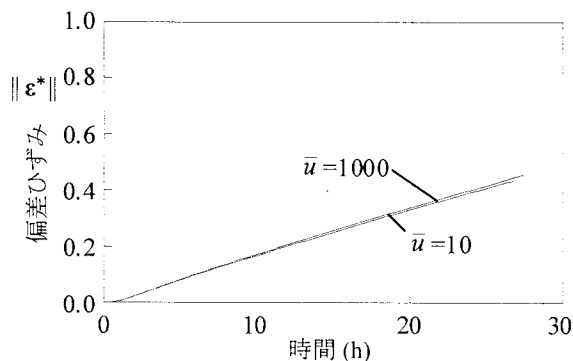
(a) 要素①



(b) 要素②



(c) 要素③

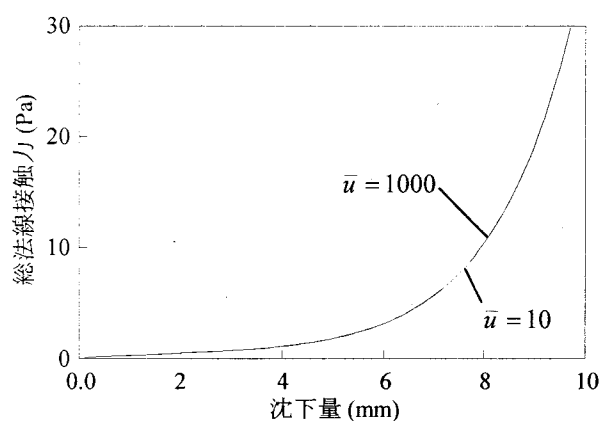


(d) 要素④

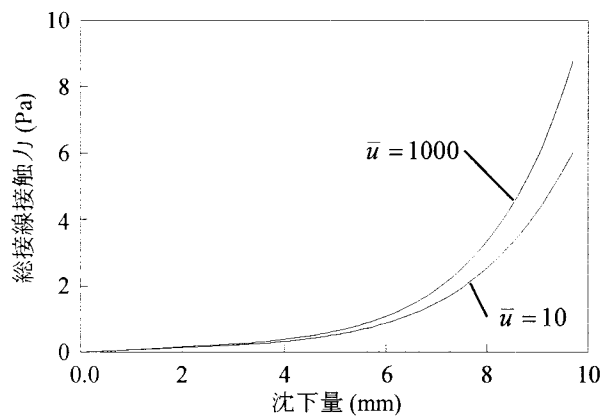
図-12 偏差ひずみの経時変化($\bar{u}=10$)

6. おわりに

本研究では、すべり摩擦現象を考慮した土-水連成有限要素法の定式化ならびに下負荷面¹¹⁾⁻¹³⁾および



(a) 総法線接触力



(b) 総接線接触力

図-13 沈下量と(a)総法線接触力および(b)総接線接触力の関係

下負荷面摩擦モデル^{15), 16)}を導入した解析プログラムの開発を行った。また、本解析プログラムを用いて、粘土の定ひずみ速度圧密試験の解析を行い既往のすべり摩擦現象を考慮しない場合の解析結果との比較・検証を行った。その結果、間隙水の流動のみならず、すべり摩擦という制約条件が変形に対しても拘束をもたらす様子が確認された。また、下負荷面摩擦モデルを用いることにより、すべり摩擦現象が、供試体内の間隙水圧や変形特性に与える影響を合理的に表現可能であることを明らかにした。

最後に、本研究では微小変形論に基づいた定式化を行っているが、本解析のように、すべりが大きな(1要素辺の長さを超える)場合は、node-to-segmentあるいはnode-to-surface法^{例えば、9)}および客観性のある接触応力速度¹²⁾を用いた有限すべり・有限変形論に基づく定式化が不可欠であると考え。また通常、すべり摩擦現象は2物体が接触することにより生じるわけであるが、相対変位の発生により、この接触部がずれて新たな箇所で摩擦が生じることも考慮せねばならない。そのため、本研究をはじめ、既往の解析のように^{8), 9), 11)-13), 20)-25)}、弾塑性論に類似した摩

擦モデルを用いた場合、有限すべり状態に適用し得るよう、このずれを考慮しつつ負荷履歴依存性を表現することが要求される。今後、この方面での摩擦モデルの発展が望まれる。

参考文献

- 1) Cristian, J. T. (1968): Undrained stress distribution by numerical methods. Proc. ASCE, SM6, pp.1333-1345.
- 2) Cristian, J. T. and Boehmer, J. W. (1970): Plane strain consolidation by finite elements. Proc. ASCE, SM6, pp.1435-1457.
- 3) 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析. 土木学会論文集, Vol.269, pp.95-104, 1978.
- 4) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state. Soils and Foundations. Vol.34, No.1, pp.91-105, 1994.
- 5) Asaoka, A., Nakano, M., and Noda, T.: Imperfection sensitive bifurcation of Cam-Clay under plane strain compression with undrained boundaries. Soils and Foundations. Vol.35, No.1, pp.83-100, 1995.
- 6) 橋口公一, 岡安崇史, 堤成一郎, 上野正実: 拡張下負荷面モデルを導入した有限変形・土-水連成有限要素解析プログラムの開発. 農業機械学会誌, Vol.62(1), pp.11-19, 2000.
- 7) 山田英司, 高稲敏浩, 水野和憲, 大野雅幸, 野田利弘: パイルド・ラフト基礎が設置された地盤の水～土連成弾塑性変形解析, 土木学会論文集, Vol.52(III), No.659, pp.113-128, 2000.
- 8) Kikuchi, N. and Oden, J. T.: Contact problem in elasticity, A study of variational Inequalities and finite element methods. SIAM, Philadelphia, 1988.
- 9) Wriggers, P.: Computational contact mechanics, J. Wiley, Chichester, 2003.
- 10) Drucker, D.C.: Conventional and unconventional plastic response and representation. Journal of Applied Mechanics Reviews (ASME), Vol.41, pp.151-167. 1988.
- 11) 橋口公一, 岡安崇史, 尾崎伸吾: 下負荷面の概念に基づく摩擦理論. 日本機械学会論文集 A 編, Vol.42, pp.1705-1727, March 2005.
- 12) Hashiguchi, K., Ozaki, S. and Okayasu, T.: Unconventional friction theory based on the subloading surface concept. International Journal of Solids and Structures, Vol.42, pp.1705-1727, March 2005.
- 13) 尾崎伸吾, 橋口公一, 岡安崇史: 下負荷面摩擦モデルを用いた地盤-杭間の相互作用の弾塑性有限要素解析. 応用力学論文集 (土木学会), Vol.7, pp.579-587, 2004.
- 14) Asaoka, A., Noda, T. and Kaneda, K.: Displacement/Traction boundary conditions represented by constraint condition on velocity field of soil. Soil and foundations Vol.38, No.4, pp.173-181, 1998.
- 15) Hashiguchi, K.: Plastic constitutive equations of granular materials. Proc. US-Japan Seminar Continuum Mech. Stast. Appr. Mech. Granular Materials, Sendai, pp. 321-329, 1978.
- 16) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition. Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol.47, pp.266-272, 1980.
- 17) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity. International Journal of Solids and Structures, Vol.25, pp.917-945, 1989.
- 18) Hashiguchi, K.: On the loading criterion, International Journal of Plasticity. Vol.10, pp.871-878, 1994.
- 19) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation -Continuity and smoothness conditions and loading criterion. Soils and Foundations, Vol.40, pp.155-161, 2000.
- 20) Oden, J.T. and Pires, E.B.: Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. Computer and Structures, Vol. 19, pp.137-147. 1984.
- 21) Curnier, A.: A theory of friction. International Journal of Solids and Structures, Vol.20, pp.637-647, 1984.
- 22) Cheng, J-H. and Kikuchi, N.: An incremental constitutive relation of uniaxial contact friction for large deformation analysis. Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol. 52, pp.639-648, 1985.
- 23) Oden, J. T. and Martin, J. A. C.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.52, pp.527-634, 1985.
- 24) Wriggers, P., Vu Van T. and Stein, E.: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. Computers and Structures, Vol. 37, pp.319-331, 1990.
- 25) Peric, D. and Owen, R.J.: Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- 26) Courtney-Pratt, J.S. and Eisner, E.: The effect of a tangential force on the contact metallic bodies. Proc. Royal Soci. London, Ser. A, Vol.238, pp.529-550, 1957.
- 27) Uesugi, M., Kishida, H.: Influential factors of friction between steel and dry sands. Soils and Foundations, Vol.26(2), pp.33-46, 1986.
- 28) Hagman, L. and Olofsson, U., 1998. A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic asperities-parametric study and experimental investigation. Tribology International, Vol.31, pp.209-217.
- 29) Olofsson, U., 1995. Cyclic micro-slip under unlubricated conditions. Tribology International, Vol.28, pp.207-217.
- 30) Olofsson, U. and Hagman, L., 1997. A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic bodies. Tribology International, Vol.30, pp.599-603.

(2005年4月15日 受付)