

不連続 Galerkin 近似による有限被覆法の不連続面解析への適用

An application of discontinuous Galerkin finite cover method to discontinuous deformation analysis

石井建樹*, 寺田賢二郎**, 京谷孝史***, 岸野佑次****, 車谷麻緒†

Tateki ISHII, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA, Yuji KISHINO and Mao KURUMATANI

*正会員 博 (工) 東北大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***正会員 工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

****フェロー 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

†学生員 修 (工) 東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

We develop an computational method by the finite cover method (FCM) incorporated with the discontinuous Galerkin approximation for simulating fracture behavior in heterogeneous solids. The FCM is formulated and then the discontinuous Galerkin approximation is introduced for imposing interface compatibility conditions. On the other hand, the fracture behavior on cracking surfaces is represented by the cohesive crack model, which realizes smooth transition from continuity to discontinuity in the fracture process zone near the crack-tip. Representative numerical examples demonstrate the performance of the proposed method.

Key Words : fracture, FCM, Discontinuous Galerkin approximation, Cohesive crack model

1. はじめに

近年, PU 条件 (Partition of Unity)¹⁾を有限要素近似に導入した解析手法が注目を集めている. このような解析手法は, しばしば有限要素法 (以下, FEM) の一般化あるいは一般化有限要素法と総称され, 有限被覆法 (Finite Cover Method, 以下 FCM)²⁾や X-FEM³⁾, GFEM⁴⁾などはその代表である. これらの手法は, 解析対象の形状にとらわれることなく自由に近似領域 (要素) を構成することが可能であることから, しばしばメッシュフリー法として分類され, 不連続面進展解析などの問題への適用性が期待されている. 著者らも, こうした FCM のメッシュフリー的な特性を生かして, Lagrange 未定乗数法と Cohesive crack モデルを導入した FCM 破壊進展解析法を提案している⁵⁾.

しかしながら, 岩盤やコンクリートなどの非均質材料を対象とする場合, 異種材料界面において変位や表面力の連続適合条件を満足させる必要があり, その界面処理法の確立は重要なトピックである. 従来より FEM や FCM の枠組みにおける界面接合法としては, ペナルティ法や Lagrange 未定乗数法が一般的であった. これに対して, 変位境界条件を近似的に満足させる Nitsche 法⁶⁾を内部境界の連続性の問題に拡張した Galerkin 近似が注目を集めている^{7), 8)}. 近年では, 力学分野をはじめとする様々な問題への適用が行われ⁹⁾⁻¹¹⁾, 一般に「不連続 Galerkin 法 (Discontinuous Galerkin method)」と総称されるようになった. この手法は, 設定すべきパラメータの少なさにも関わらず高精度な近似を行うことができることとされており, また反復解法を必要とせず比較的容易に実装可能であることから, 従来のペナルティ法や Lagrange 未定乗数法と比較して解析精度や計算効率の観点からその有用性が確認されている¹²⁾.

そこで本研究では, 岩盤やコンクリートなどの非均質材料を対象とする解析における異種材料界面の接合法として, 不連続 Galerkin 近似⁷⁾を導入した不連続 Galerkin 有限被覆法 (以下, DG-FCM) を拡張して, 不連続面解析への適用を試みる. 以下では, 不連続面進展問題を不連続 Galerkin 近似に基づき定式化を行う. 併せて, 不連続 Galerkin 法の導入に際して一般的な有限要素解などとの比較を行い, 最後に不連続面進展を扱った例題により提案手法の有効性を示す.

2. 不連続面進展問題の支配方程式

2.1 不連続面進展問題

Fig-1 に示すように, ある状態において不連続面が生じた複数の材料から成る非均質構造体 $\Omega = \Omega^{[1]} \cup \Omega^{[2]}$ の静的つり合い問題を考える. 材料は線形弾性材料であることを仮定すると, 微小ひずみ理論の枠組みで各領域 $\Omega^{[i]}$ ($i = 1, 2$) の静的つり合い問題は以下のような方程式群によって記述される.

$$\nabla \cdot \sigma^{[i]} + b^{[i]} = 0 \quad \text{in } \Omega^{[i]} \quad (1)$$

$$\sigma n = \hat{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (2)$$

$$\epsilon^{[i]} = \nabla^s u^{[i]} = \frac{1}{2} \{ \nabla u^{[i]} + (\nabla u^{[i]})^T \} \quad \text{in } \Omega^{[i]} \quad (3)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$\sigma^{[i]} = C^{[i]} : \epsilon^{[i]} \quad \text{in } \Omega^{[i]} \quad (5)$$

ここで, $\sigma^{[i]}$, $\epsilon^{[i]}$, $u^{[i]}$, $C^{[i]}$, $b^{[i]}$ はそれぞれ $\Omega^{[i]}$ における Cauchy 応力テンソル, 微小ひずみテンソル, 変位ベクトル, 弾性テンソル, 物体力ベクトルであり, $\hat{t}$ は外向き単位法線ベクトル n で規定される面に作用する表面力ベクトルである.

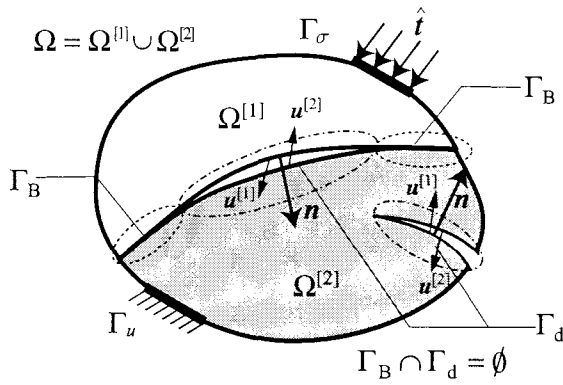


Fig-1 複数の材料から成る構造体における破壊進展問題

非均質構造体 Ω において、固着している異種材料界面を Γ_B とし、剥離した界面、ならびに同一材料内で形成された不連続面を不連続面と総称することにして Γ_d と表す。

$$\Gamma_B \cap \Gamma_d = \emptyset \quad (6)$$

Γ_B, Γ_d では、向かい合う面の変位ベクトル $u^{[1]}, u^{[2]}$ および法線ベクトル $n = n^{[1]} = -n^{[2]}$ を Fig-1 のようであるとして、相対変位を

$$[[u]] := u^{[1]} - u^{[2]} \quad (7)$$

と定義する。ただし、同一材料内の不連続面については、 $(\cdot)^{[1]}, (\cdot)^{[2]}$ は不連続面両側の量を表すものとする。

異種材料が固着している界面 Γ_B において変位は連続であり、

$$[[u]] = u^{[1]} - u^{[2]} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (8)$$

が成立する。また、表面力ベクトルも連続で次式が成立する。

$$\sigma^{[1]} n = \sigma^{[2]} n \quad (9)$$

不連続面 Γ_d においても、表面力の連続式 (9) が成立する。不連続面が完全に開口した時、不連続面の表面力は

$$\sigma^{[1]} n = \sigma^{[2]} n = 0 \quad (10)$$

である。いったん形成された不連続面 Γ_d では、面を挟んで相対変位が生じる。

2.2 不連続面先端への Cohesive crack モデルの適用

破壊進展問題では、異種材料間の界面剥離や材料内部で不連続面が発生したとき、それら不連続面先端近傍に生じる破壊進行領域（以下、FPZ）の取り扱いが重要となる。本研究では不連続面先端の力学挙動を表現するために、Cohesive crack モデル¹³⁾を採用した。Cohesive crack モデルにおいて、不連続面先端の FPZ は潜在的な不連続面 Γ_{PZ} ($\Gamma_{PZ} \subset \Gamma_d$) としてモデル化され、 Γ_{PZ} 先端での応力拡大係数 $K_I = 0$ の仮定の下に、 Γ_{PZ} に結合力 t^{coh} が分布して付与される。本論文では、Wells・Sluys¹³⁾が採用している以下の結合力－開口変位関係式を Γ_{PZ} に与えるものとする。

$$||t^{\text{coh}}|| - f_f \exp\left(-\frac{f_f}{G_f} \kappa\right) \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_{PZ}. \quad (11)$$

ここで、 f_f は引張強度、 G_f は破壊エネルギーであり、 κ は載荷履歴における最大の開口変位である。

2.3 不連続 Galerkin 近似⁷⁾⁻¹¹⁾に基づく支配方程式の弱形式

不連続 Galerkin 近似では、異種材料界面の Γ_B での変位の不連続性を扱う。はじめに、境界 Γ_B における平均変位を次のように定義しておく。

$$\{u\} := \frac{1}{2} (u^{[1]} + u^{[2]}) \quad (12)$$

同様に異種材料界面 Γ_B での平均応力を次のように定義する。

$$\{\sigma(u)\} := \frac{1}{2} [\sigma(u^{[1]}) + \sigma(u^{[2]})] \quad (13)$$

異種材料界面 Γ_B での外向き法線ベクトルを $n = -n^{[1]} = n^{[2]}$ と定義し、 δu を試験関数とする通常の弱形式に導入する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_B} [[\delta u \cdot \sigma]] \cdot n d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} [[\delta u]] \cdot t d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\Omega = \Omega^{[1]} \cup \Omega^{[2]}$ であり、演算則 $[[\cdot]]$ は式 (7) と同様に $(\cdot)^{[1]} - (\cdot)^{[2]}$ を表すとする。また Γ_d 上の表面力ベクトル t は、

$$t = \sigma n = \begin{cases} t^{\text{coh}} & \text{on } \Gamma_{PZ} \\ 0 & \text{on } \Gamma_d \setminus \Gamma_{PZ} \end{cases} \quad (15)$$

であり、FPZ での結合力 t^{coh} は式 (11) の Cohesive crack モデルを満足するように与えられる。

上式の異種材料界面 Γ_B に関する項は、式 (9) の関係を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_B} [[\delta u \cdot \sigma]] \cdot n d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_B} ([[\delta u]] \cdot \{\sigma\} + \{\delta u\} \cdot [[\sigma]]) \cdot n d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_B} [[\delta u]] \cdot \{\sigma\} \cdot n d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

この関係を用いると、式 (14) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_B} [[\delta u]] \cdot \{\sigma(u)\} \cdot n d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} [[\delta u]] \cdot t d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

しかし、上式では Γ_B における変位の連続性（式 (8)）が考慮されていない。そこで、Nitsche 法⁶⁾に基づく不連続 Galerkin 近似⁷⁾⁻¹¹⁾では、以下のように上式に修正項を追加するとともに、ペナルティ法における変位拘

束項（ペナルティ行列）を加えたものを解くべき弱形式とする。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_B} \frac{p}{h_e} \beta \llbracket \delta u \rrbracket \cdot \llbracket u \rrbracket d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_B} (\llbracket \delta u \rrbracket \cdot \{\sigma(u)\} \cdot n + n \cdot \{\sigma(\delta u)\} \cdot \llbracket u \rrbracket) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \llbracket \delta u \rrbracket \cdot t d\Gamma \quad (18) \end{aligned}$$

上式における p はペナルティ係数であり，平面問題を想定すると h_e は数学要素の長さ， β は要素内の材料界面の長さである．ここで，FCM では要素内においても不連続面ならびに異種材料界面の存在を許容しており，それらを許容する要素は一般化要素と呼ばれる．そのため，FCM では要素内における各積分量が一般化要素に含まれる物理領域の割合に依存することがあり，その場合には β を一般化要素の特性長さとして導入する．

式 (18) は通常のペナルティ法による弱形式に表面力に関する項が新たに加わったものとなっている．また，Lagrange 未定乗数法とは異なり独立変数は変位のみとなり，ペナルティ係数 p を設定し，方程式を一度解くだけでよい．

3. 有限被覆法²⁾による不連続性表現

Fig-2 のように2つの異なる材料領域 $\Omega^{[1]}$, $\Omega^{[2]}$ から成る物理領域 Ω を考える．これらの物理領域内に分布する物理量が興味の対象となるが，FCM²⁾ではこれを近似するための数学的な領域（数学領域）を別途用意する．

数学領域は，複数の数学被覆 M_I (Fig-2 の場合は4つ) を重複結合して構成される．これらの数学被覆ごとに重み関数を定義する．数学被覆 M_I で定義される重み関数 w_I は M_I でのみ非ゼロの関数値を持つ．

$$\begin{cases} w_I(x) \geq 0 & x \in M_I \\ w_I(x) = 0 & x \notin M_I \end{cases} \quad (19)$$

重み関数には，変位等の物理量を近似するに際して節点における近似の連続性を保証するために，数学被覆の共通領域での総和が1となる Partition of Unity (PU) 条件¹⁾が課される．

$$\sum_{I=1}^{NM} w_I(x) = 1 \quad (20)$$

FCM はこのような数学領域によって物理領域を余すところなく覆うことで境界値問題の離散近似を実現するものである．

数学被覆 M_I と物理領域 $\Omega^{[i]}$ の共通領域を物理被覆と定義し， $P_I^{[i]}$ と書くことにする．このとき，Fig-2 の数学被覆 M_2 と物理領域 $\Omega^{[1]}$ のように，数学被覆 M_I は不連続面 Γ_d の上を横切るように配置することも可能である．数学被覆 M_I の重複に伴って現れる物理被覆 $P_I^{[i]}$ の重複領域を物理要素と定義する．物理要素は，要素

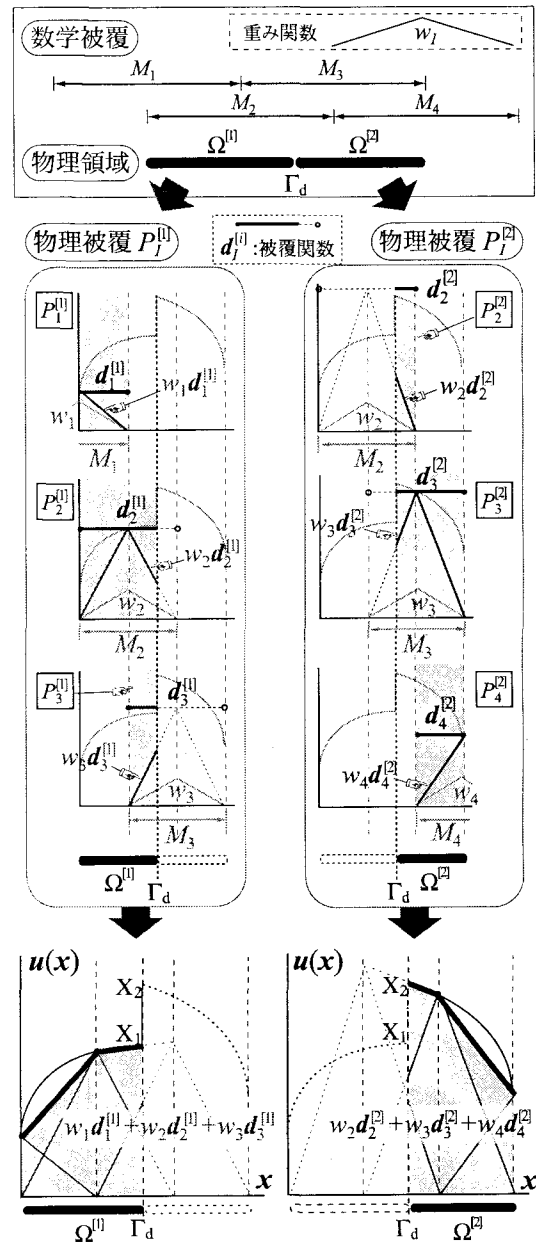


Fig-2 FCMにおける不連続性表現

内に物理領域を部分的にしか含まない場合も許容できるため，一般化要素と呼ばれる²⁾．

物理被覆 $P_I^{[i]}$ 上に次のような被覆（変位）関数 $f_I^{[i]}$ を定義する．被覆関数は各物理被覆上で任意に選ぶことができ，形式的に次の多項式で表される．

$$f_I^{[i]}(x) = \sum_{\alpha=0}^m p_{\alpha}(x) a_{\alpha I}^{[i]} \quad \text{on } P_I^{[i]} \quad (21)$$

ここで， $p_{\alpha}(x)$ は $(\alpha-1)$ 次多項式の基底であり， $a_{\alpha I}^{[i]}$ は係数ベクトルである．

物理領域で定義される変位関数は物理被覆上で定義される被覆関数と数学被覆上で定義される重み関数と

の積として近似される。

$$u(x) \approx \sum_{l=1}^{N^M} w_l(x) f_l^{[i]}(x) \quad \text{on } \Omega^{[i]} \quad (22)$$

ここで $f_l^{[i]}$ を代入して、 $d_l^{[i]} = a_{0l}^{[i]}$ とおけば、

$$u(x) \approx \sum_{l=1}^{N^M} w_l(x) \left(d_l^{[i]} + \sum_{\alpha=1}^m p_\alpha(x) a_{\alpha l}^{[i]} \right) \quad \text{on } \Omega^{[i]} \quad (23)$$

となる。

Fig-2 において、被覆（変位）関数に物理被覆内で一定値となる関数 $d_l^{[i]}$ のみを、重み関数 w_l には解に C^0 連続性を与え PU 条件を満足するピラミッド型の区分線形関数を用いることにすれば、物理領域に分布する変位の近似関数 (23) は次式となる。

$$u(x) \approx \sum_{l=1}^{N^M} w_l(x) d_l^{[i]} \quad \text{on } \Omega^{[i]} \quad (24)$$

したがって、Fig-2 の物理領域 $\Omega = \Omega^{[1]} \cup \Omega^{[2]}$ での変位は

$$u(x) \approx \begin{cases} w_1(x)d_1^{[1]} + w_2(x)d_2^{[1]} + w_3(x)d_3^{[1]} & \text{on } \Omega^{[1]} \\ w_2(x)d_2^{[2]} + w_3(x)d_3^{[2]} + w_4(x)d_4^{[2]} & \text{on } \Omega^{[2]} \end{cases}$$

と近似されることになる。このように FCM では、不連続面 Γ_d が発生したとしても $\Omega^{[1]}$ および $\Omega^{[2]}$ で同一の重み関数 $w_l(x)$ を用いればよい。結果として、Fig-2 には不連続面 Γ_d において不連続変位 $X_1 X_2$ が自由度を増やすだけで自動的に表現されている。

4. 不連続面発生・進展の取り扱い

4.1 材料内部での不連続面発生の判定法

不連続面発生の判定基準は、「ある点の最大主応力 σ_1 が引張強度 f_t に達したときに最大主応力方向と垂直な方向に不連続面が発生する」とする。不連続面の発生後は、式 (11) に示す Cohesive crack モデルに従って履歴変数 κ に依存した結合力 t^{coh} が相対変位を抑える方向に作用するものとする。

FCM では、物理被覆を分割することで不連続性を表現する。そこで本研究では、物理被覆の応力 $\bar{\sigma}$ を用いて不連続面発生を照査する。各物理被覆における応力 $\bar{\sigma}$ は次式により定義する (Fig-3(a))。

$$\bar{\sigma}_l^{[i]} = \frac{\int_{A_l^{[i]}} \sigma dA}{A_l^{[i]}} \quad \text{on } P_l^{[i]} \quad (25)$$

ここで、 $A_k^{[i]}$ は物理被覆 $P_l^{[i]}$ の面積である。各物理被覆の応力 $\bar{\sigma}$ より最大主応力 $\bar{\sigma}_1$ を算定し、それが引張強度 f_t を超過したか否かを調べ、不連続面発生の有無を決定する。

こうした各物理被覆の応力 $\bar{\sigma}$ に基づく破壊の評価法では、被覆寸法に数値解が依存する可能性が懸念される。しかし、Cohesive crack モデルを適用した場合、文献⁵⁾に示すとおり要素寸法依存性は小さい。また領域積分の効果により、滑らかな不連続面形成が可能である。

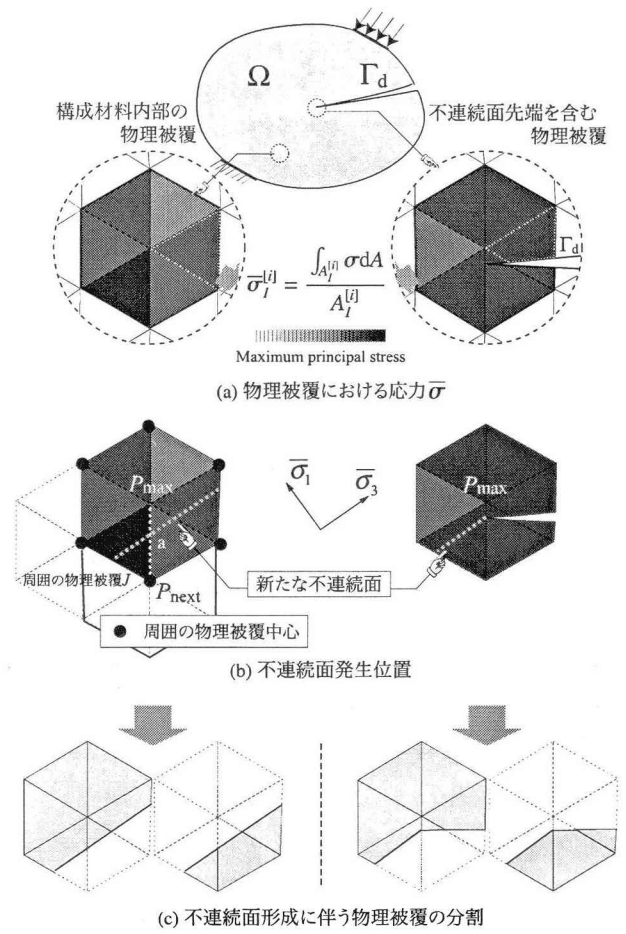


Fig-3 被覆に形成される不連続面

4.2 不連続面の発生位置と発生後の処理

本研究では、物理要素内でひずみが一定となる近似関数を用いる。そのため、新たに不連続面が形成されるとき、物理被覆内のどの位置に発生するかは不定になる。そこで、以下のように不連続面の発生位置を決定する。

Fig-3(b) に示すように、対象となる物理被覆 $P_{\max}$ に不連続面の先端が含まれていない場合、 $P_{\max}$ を取り囲む物理被覆の応力に基づき不連続面を生じさせる。このとき、周囲の物理被覆 (Fig-3 の場合は 6 つ) のうち、既に求めた $P_{\max}$ の最大主応力 $\bar{\sigma}_1$ 方向に着目し、その方向の直応力成分 $\bar{\sigma}_{\text{next}}$ が最も大きくなる物理被覆 P_{next} を求め、 $P_{\max}$ と P_{next} の中心を結ぶ辺 a を特定する。そして、 $\bar{\sigma}_{\text{next}} > f_t$ の場合は a を $P_{\max}$ から見て $(\sigma_{\text{next}} - f_t) : (\sigma_1 - f_t)$ に内分する点を、 $\bar{\sigma}_{\text{next}} \leq f_t$ の場合は a を $P_{\max}$ から見て $(\sigma_1 - f_t) : (2\sigma_1 - 3\sigma_{\text{next}} + f_t)$ に内分する点を定める。不連続面は、この内分点を通り最大主応力 $\bar{\sigma}_1$ と垂直な方向に形成される。一方、対象となる物理被覆に不連続面の先端が含まれている場合、Fig-3(b) に示すように、既存の不連続面の先端を始点として最大主応力 $\bar{\sigma}_1$ と垂直な方向に不連続面を進展させる。

新たに形成される不連続面は、FPZ として扱うべき不連続面 Γ_{PZ} である。したがって、新たな不連続面では式 (11) の Cohesive crack モデルに基づく引張強度と

等しい結合力 t^{coh} が作用する ($\bar{\sigma}_1 = f_t$).

$$t^{\text{coh}} = \bar{\sigma}_1 \bar{n}_1 \quad (26)$$

ここで、 $\bar{n}_1$ は不連続面の外向き単位法線ベクトルである。

いったん不連続面が発生・進展すると、Fig-3(c)のように、初期に設定した物理被覆内を不連続面が横切り、新たな物理被覆が設定される。これにより被覆関数も追加され、不連続面形成に伴う変位の不連続性が表現される。その結果、不連続面の発生・進展に伴い代数方程式の解析自由度が大きくなるが、FCM では被覆関数が初期に設定した数学被覆に重複して追加されるだけである。このため C_0 連続な重み関数を用いる場合に限定すれば、拡大される離散化方程式の大きさは事前に予測可能であり、多重節点の考え方を多重被覆として同様の対処が可能である。

4.3 異種材料界面の剥離

異種材料界面では、表面力が引張強度 f_t に達したときに剥離が生じる。本研究では、剥離発生判定に用いる異種材料界面での表面力を材料界面両縁の表面力の平均として与えることとした。

$$\bar{t} = \{\sigma(u)\}n \quad (27)$$

したがって、 $\bar{t} \cdot n > 0$ 、 $\|\bar{t}\| \geq f_t$ となるとき界面剥離が生じるとする。新たに生じた材料界面の剥離面もまた FPZ として扱うべき不連続面 Γ_{PZ} であり、式 (11) の Cohesive crack モデルの引張強度と等しい結合力 t^{coh} が作用する。

$$t^{\text{coh}} = f_t \frac{\bar{t}}{\|\bar{t}\|}. \quad (28)$$

異種材料界面では、不連続 Galerkin 近似を用いて複数の物理領域を結合している。そのため界面剥離が生じても初期に規定した被覆関数は追加する必要がない。したがって、界面剥離の場合には代数方程式のサイズ変更を行う必要が無く、制約条件を材料界面 Γ_B から不連続面 Γ_d のものへと変更する操作だけでよい。

5. 不連続 Galerkin 有限被覆法の不連続面解析への適用

5.1 2 相材料による数値実験

不連続面進展解析を行う上では、不連続面発生・進展の判定を行う際に、適切な解析精度が得られていることが重要である。そこで、不連続面進展問題へ適用する前に、不連続 Galerkin 有限被覆法 (DG-FCM) の解析精度について検討を加える。なお、DG-FCM の詳しい性能については文献¹⁴⁾を参照されたい。Fig-4 に示される 2 相材料モデルを対象に数値実験を行い、DG-FCM の解析精度について検討・考察する。

解析モデル、解析パラメータは Fig-4 に示されるものを使用し、境界条件は同図に示されるように鉛直方向上方に変位制御で一樣な載荷を行う。なお、その他の解析条件を以下のように設定し、2 相材料問題に対する数値実験の結果に基づいて DG-FCM の検討を行う。

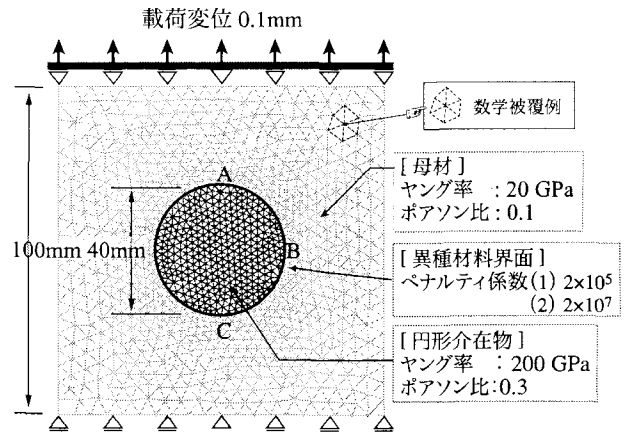


Fig-4 円形介在物を有する 2 相材料モデル

- FEM：有限要素解を参照解として使用する。Fig-4 に示されるような自由度 2242 の有限要素モデルを用いる。
- P-FCM₁：異種材料界面にペナルティ法を適用した FCM の数値解と比較する。ペナルティ係数は介在物のヤング率同程度の $p = 2.0 \times 10^5$ とする。なお、以下の FCM を用いる解析モデルでは、異種材料界面において領域を分割に伴い二重節点を配置しており、自由度は 2364 である。
- P-FCM₂：P-FCM₁ と同様にペナルティ法を適用した FCM を適用し、ペナルティ係数を構成材料のヤング率より 10^2 分オーダーの高い $p = 2.0 \times 10^7$ とする P-FCM である。
- DG-FCM₁：ペナルティ係数を介在物のヤング率同程度の $p = 2.0 \times 10^5$ とする DG-FCM である。
- DG-FCM₂：P-FCM₂ と同じペナルティ係数を用いた DG-FCM である。

Fig-5 に、それぞれの解析条件に基づき得られた載荷変位 0.1mm 時の von-Mises 応力分布を示す。これらは、それぞれ解析結果における von-Mises 応力値の最大値と最小値を凡例に採用した結果である。P-FCM₁、DG-FCM₁ による結果では、FEM と比較して材料界面における近似精度が不足しているようである。これに対して、P-FCM₂、DG-FCM₂ では、FEM の応力分布と比較しても遜色のない結果が得られている。

Fig-6 に、材料界面に沿った相対変位ノルムを比較したものを示す。相対変位の分布に関しては、基本的にはペナルティ係数に依存した結果となっている。同じペナルティ係数を設定した P-FCM₁ と DG-FCM₁、あるいは P-FCM₂ と DG-FCM₂ を比較すると、P-FCM と比べて DG-FCM の方が相対変位を小さく求められている。これは、異種材料界面における変位適合条件に関して、ペナルティ法による近似よりも不連続 Galerkin 近似の方が高精度であることを裏付けている。

以上の数値解析結果より、DG-FCM は適切なペナルティ係数を選ぶことによって、ペナルティ法よりも格段に精度を向上させることができることが確かめられた。ただし、ペナルティ係数の設定によっては、剛性行列の条件数の悪化により解析が非常に不安定になる

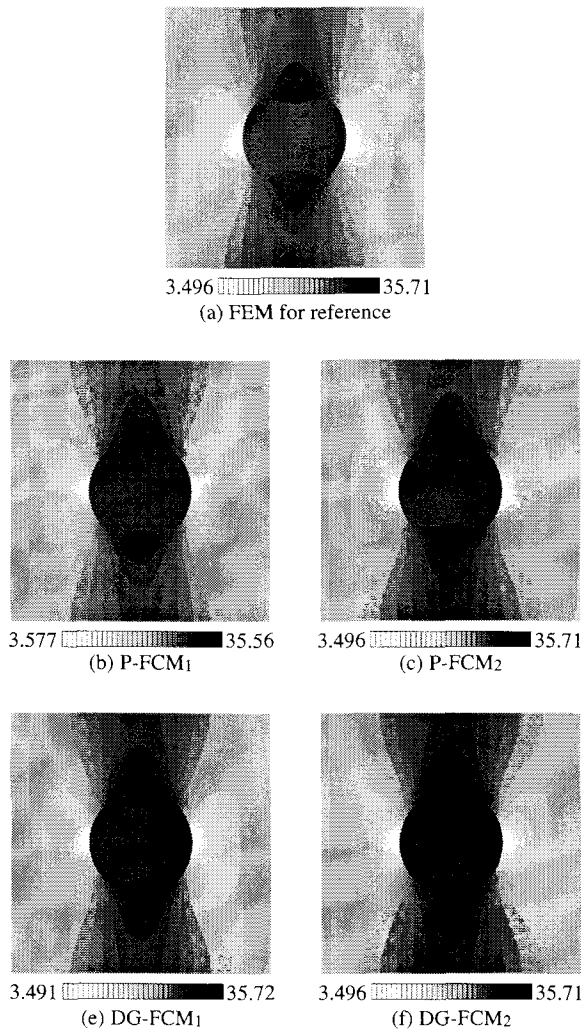


Fig-5 von-Mises 応力分布の比較 (MPa)

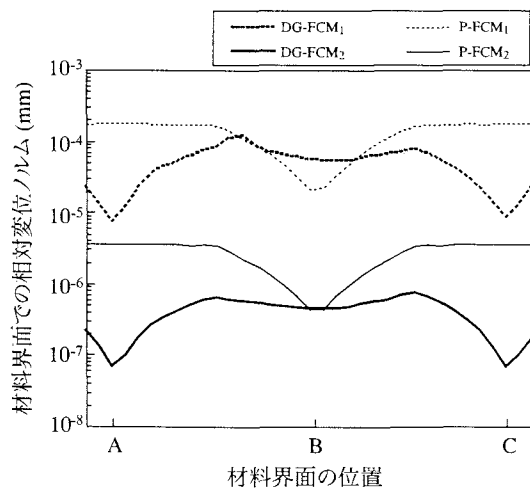


Fig-6 材料界面における相対変位ノルムの比較

ことが確認された。界面において異なる材料を連結させる場合は、DG-FCM₁ および DG-FCM₂ の結果からもわかるように、ペナルティ係数により解が変動することに注意が必要である¹⁴⁾。

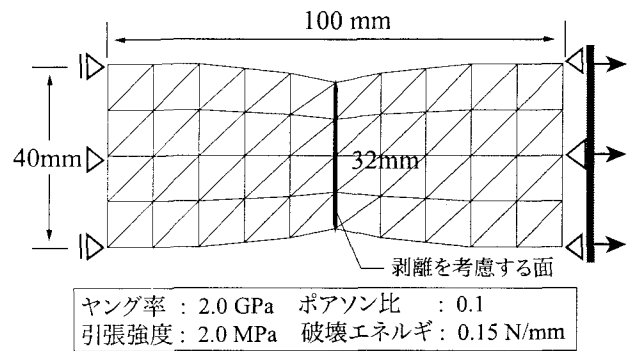
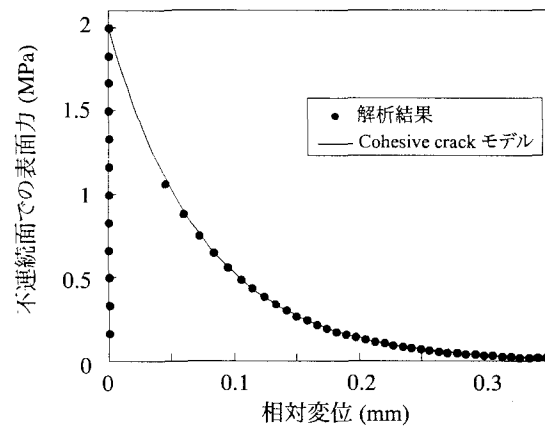
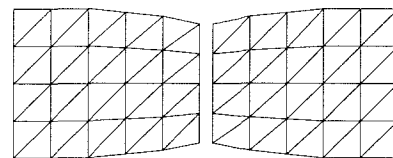


Fig-7 中央のくびれた板の引張試験



(a) 剥離面での表面力-相対変位関係



(b) 最終的な剥離面形成の様子

Fig-8 解析結果

5.2 界面剥離挙動の検証

異種材料界面において、固着時の不連続 Galerkin 法から剥離して Cohesive crack モデルが有効となる一連の挙動を検証するために、Fig-7 に示す中央のくびれた板に対して変位制御引張試験シミュレーション解析を行った。解析モデルでは界面を想定した面を配置して変位の連続条件式 (8) を満足させる。ペナルティ係数は材料のヤング率よりも 10^2 分オーダーの高い $p = 2.0 \times 10^5$ とし、その他の解析に用いた各パラメータは図に示すとおりである。

Fig-8 に中央のくびれた板の引張試験における解析結果を示す。Fig-8(a) の剥離面形成位置での表面力-相対変位関係において、荷重が引張強度に達するまでは不連続面未形成のため不連続 Galerkin 法が有効となり相対変位は生じず、荷重が引張強度に達すると剥離が生じて、その後は Cohesive crack モデルに従う不連続面の挙動が再現されている。Fig-8(b) では不連続 Galerkin

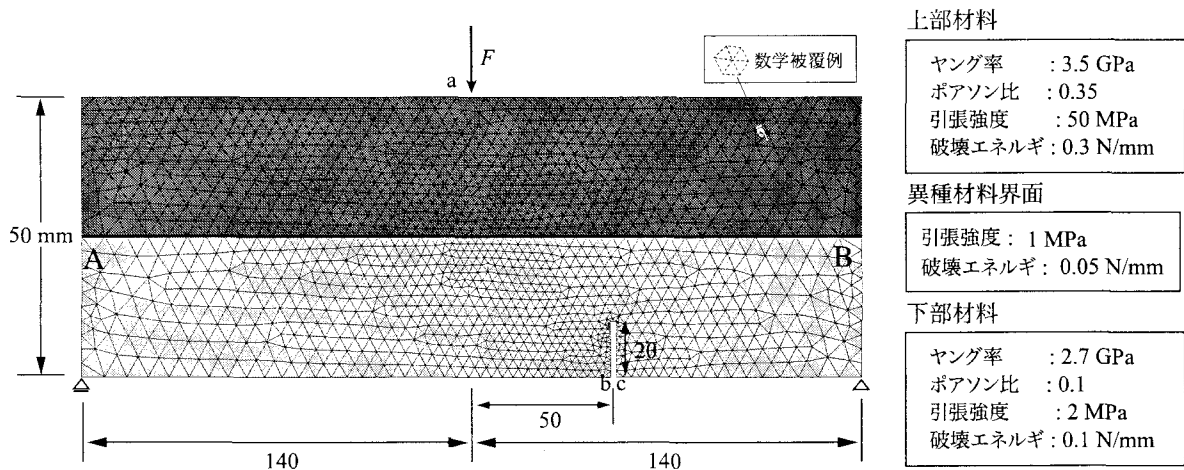


Fig-9 2つの材料を重ねた梁の3点曲げ試験

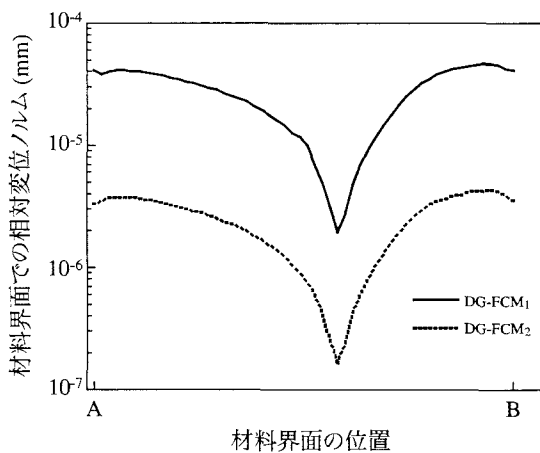


Fig-10 材料界面における相対変位ノルムの比較

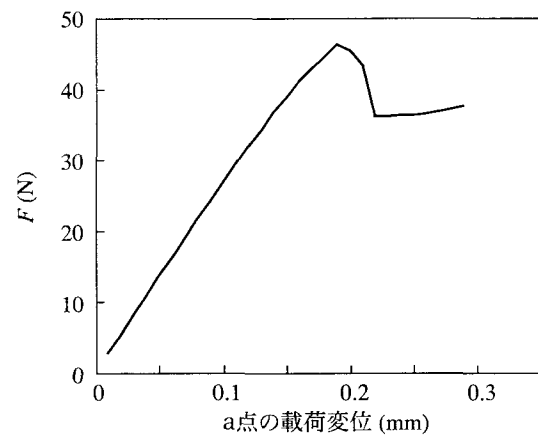


Fig-11 荷重曲線

法で結合されていた領域（面）が剥離している。以上より、DG-FCMは適切に Cohesive crack モデルと組み合わせることにより、異種材料界面での剥離面発生・進展挙動を表現できることが確認できた。

5.3 2つの材料を接合した梁の3点曲げ試験

最後に、Fig-9に示す2つの材料を接合した梁に対して変位制御による3点曲げ試験のシミュレーション解析を行った¹⁵⁾。Fig-9に示す解析モデルの初期自由度は3096である。ペナルティ係数以外の解析に用いた各パラメータはFig-9に示すように設定した。

なお試験に先立って、ペナルティ係数設定の検討を行った。DG-FCM₁におけるペナルティ係数を材料のヤング率と同程度の $p = 3 \times 10^3$ とし、DG-FCM₂ではペナルティ係数を $p = 3 \times 10^4$ とした。Fig-10にDG-FCM₁、DG-FCM₂における異種材料界面における相対変位ノルム分布を示す。異種材料界面における相対変位ノルム分布は、Fig-6と同様に、基本的にはペナルティ係数に依存した結果となっている。この結果を踏まえて、解析には $p = 3 \times 10^4$ とするDG-FCM₂により行うものとする。

Fig-11に解析により得られたFig-9中のa点にお

ける荷重曲線、Fig-12に不連続面経路と最大主応力分布を示す。荷重変位0.1mm付近で切り欠き上端部に不連続面が発生し、荷重曲線は徐々に非線形挙動を示し始め、荷重変位0.2mm付近でピーク強度を発現している。強度発現後は不連続面の進展に伴い、切り欠き部のb、c点間の開口変位が急激に大きくなり、変形が切り欠き部に集中している様子が認められる。さらに荷重変位0.22mmになると不連続面が異種材料界面に到達し、界面剥離が生じ始める様子が表現できている。以上のように、DG-FCMをベースとして、構成材料内部で発生した不連続面が異種材料界面まで到達した後、異種材料界面の剥離を引き起こす一連の挙動を一貫して追跡できる数値解析法を開発することができた。

6. おわりに

本研究では、FCMにおける異種材料界面での連続条件の付加に関して、不連続 Galerkin 近似を適用した有限被覆法 (DG-FCM) を拡張させ、不連続面の発生・進展挙動を追跡する数値解析法を提案した。本手法のように、Cohesive crack モデルや引張強度に着目した不連続面発生基準をDG-FCMへ適切に導入することで、構

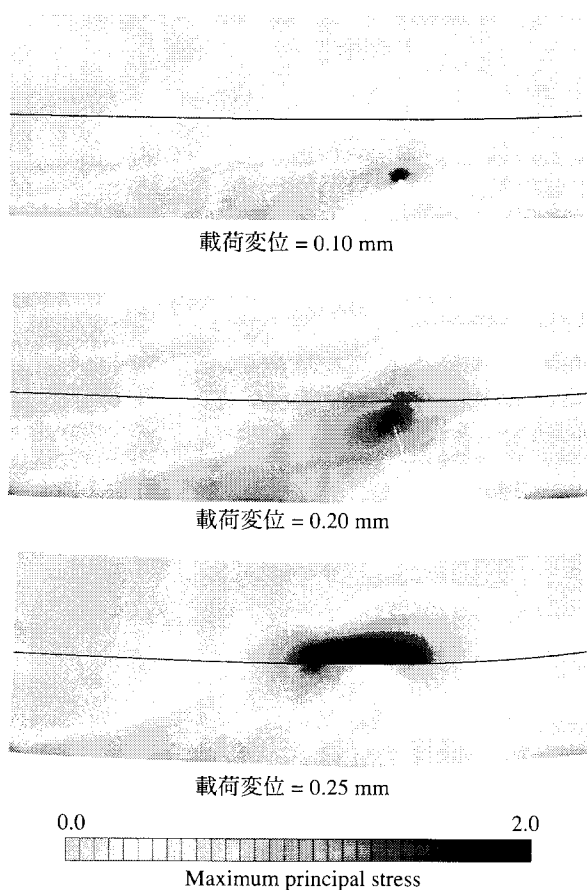


Fig-12 不連続面経路と最大主応力分布 (MPa)

成材料内部で発生した不連続面が異種材料界面まで到達した後、異種材料界面の剥離を引き起こす一連の挙動を一貫して追跡できることを示した。不連続 Galerkin 法では、反復解法を必要とせずに変位の連続性を考慮できるため、不連続面の再接触を考慮するような問題へと拡張する際にも計算時間の短縮が期待できる。

ただし、界面において異なる材料を連結させる場合は、ペナルティ係数により解が変動することに注意が必要である。こうしたペナルティ係数の設定方法について、より詳細な検討・議論が必要であることを挙げておく。

参考文献

- 1) Babuška, I., Melenk, J.M. : The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.727–758, 1997.
- 2) Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp.1321–1346, 2003.
- 3) Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S. : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.56, pp.609–635, 2003.
- 4) Strouboulis, T., Babuška, I., Copps, K. : The design and analysis of the generalized finite element method, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.181, pp.43–69, 2000.
- 5) 石井建樹, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岸野佑次: 界面要素を用いた有限被覆法に基づく破壊進展解析, 土木学会論文集 No.794/I-72, 2005. (印刷中)
- 6) Wriggers, P.: *Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons Ltd., 2002.
- 7) Arnold, D.N. : An interior penalty finite element method with discontinuous elements, *SIAM J. NUMER. ANAL.*, Vol.19, pp.742–760, 1982.
- 8) Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L.D. : Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. NUMER. ANAL.*, Vol.39, pp.1749–1779, 2002.
- 9) Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P. : A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modeling of failure, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, Vol.20, pp.511–519, 2004.
- 10) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sherwin, S.J., Peiró, J. : On discontinuous Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp.1119–1148, 2003.
- 11) Hansbo, P., Larson, M.G. : Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.191, pp.1895–1908, 2002.
- 12) Fernández-Méndez, S., Huerta, A. : Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.193, pp.1257–1275, 2004.
- 13) Wells GN, Sluys LJ.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 50, pp. 2667–2682, 2001.
- 14) 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 不連続 Galerkin 有限被覆法の開発とその性能評価, 応用力学論文集, JSCE, Vol.8, 2003 (印刷中)。
- 15) Secchi S., Simoni L. and Schrefler B. A.: Cohesive fracture growth in a thermoelastic bimaterial medium, *Computers & Structures*, 82, pp. 1875-1887, 2004.

(2005 年 4 月 15 日 受付)