

固体の大変形解析のためのマーカ積分特性有限要素法

Characteristic Galerkin Finite Element Method with Marker Particle Integration

for Large Deformation Problem of Solid

山田貴博*・石井 聡**・松井和己†・相澤政史††

Takahiro YAMADA, Satoshi ISHII, Kazumi MATSUI and Masashi AIZAWA

* 正会員 学博 助教授 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 (〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

** 工修 トヨタ自動車株式会社 (〒471-8571 愛知県豊田市トヨタ町 1 番地)

† 正会員 工博 助手 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 (〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

†† 横浜国立大学 大学院環境情報学府 博士前期課程 (同上)

A novel approach of the Eulerian finite element method for large deformation problems of solid is proposed in this paper. The proposed method uses Lagrangian marker particles to evaluate the motion of materials including the free surfaces and advection of internal variables. The equation of motion is approximated by the characteristic Galerkin finite element method with a fixed spatial mesh. In this approximation, the material derivatives are evaluated by the special numerical integration along the characteristics in which the locations of the integration points are set at those of the marker particle. The internal variables at the marker are updated from the spatial derivatives of velocity field calculated on the fixed finite element mesh. It is remarked that no advection equation appears in the proposed method and the proposed method exhibits less diffusive properties than the conventional Eulerian method.

Key Words: marker particle, characteristic Galerkin, solid, large deformation

1. 序

加工や崩壊シミュレーションなどの分野において、極めて大きな変形を生じる固体の数値シミュレーションが必要となっている。固体力学の定式化では、通常物質点に注目して変形を表す Lagrange 型変形記述が用いられるが、このような大変形問題において Lagrange 型変形記述に基づく有限要素法により計算を行った場合、大変形によりメッシュのつぶれが発生し、計算が困難となる。

そこで、流体計算で用いられている手法と同様に、空間に固定された観測点において固体の大変形を扱う Euler 型有限要素法が注目されている^{1),2)}。Euler 型有限要素法では、空間に固定されたメッシュにおける自由表面問題として固体の大変形を取り扱うことにより、メッシュのつぶれの問題を回避することが可能である。しかしながら、従来の Euler 型有限要素法では、応力や相当塑性ひずみなどの物質内部変数を Euler 型記述で取り扱うために、何らかの手法で輸送方程式を解き空間に固定されたメッシュ上の物質内部変数を計算する必要がある¹⁾。しかしながら、ここで用いられる輸送方程式の数値解法の計算精度は、解に大きく影響することにも知られている。

本研究では、このような輸送方程式に起因する問題を回避するため、メッシュを用いた Euler 型定式化の枠組みで Lagrange 的な粒子の移動を取り扱うマーカ粒

子法^{3),4)}と PIC(Particle-In-Cell)法⁵⁾に注目する。マーカ粒子法では、マーカ粒子は質量を持たない仮想的な粒子であり、自由表面あるいは物質の移動すなわち変位の記述のみに用いられている。一方、PIC 法では物理量を移動する粒子上で定義し、空間微分量は空間固定メッシュを用いて評価するものとなっている。PIC 法においては、粒子からメッシュへ物理量を写像する際に数値拡散が生じることから、このような問題点を改良した手法として FLIP 法⁶⁾が提案され、FLIP 法を固体の問題に適用できるよう拡張した MPM (Material Point Method)^{7),8)}が近年では注目されている。MPM では、物理量は Lagrange 記述された離散点である粒子で評価されることとなり、輸送方程式を導入する必要がなくなる。また、空間連続量は最小 2 乗近似を用いて固定メッシュ上に投影することで評価している。

これに対して本研究では、マーカ粒子を積分点とする特性 Galerkin 有限要素法^{9),10)}を考えることにより、運動方程式全体を Euler 型有限要素法の枠組みで近似する新しい数値計算手法¹¹⁾を提案する。この手法では、物理量は基本的に Lagrange 記述された離散点であるマーカ粒子上で評価され、空間連続量は特性法に基づき固定メッシュを用いた有限要素近似空間への投影により評価することとなる。本論文は、マーカ粒子を積分点とする特性 Galerkin 有限要素法の定式化を示すとともに、弾塑性問題を含む数値計算例により本手法の妥当性を示すものである。

2. 固体解析におけるマーカー粒子法

マーカー粒子法は、物質の存在範囲に分布させた質量を持たないマーカー粒子を Lagrange 型記述に基づき移動させることで自由表面形状を追跡する手法であり、流体計算の分野において MAC(Marker and Cell) 法などとして古くから用いられている^{3),4)}。流体計算におけるマーカー粒子法では、流体の渦運動などのため局所的なマーカー粒子の凝集が起こったり、複雑な流れ場によって界面近傍にマーカー粒子が存在しなくなる場合などが発生する問題点が指摘されている¹²⁾。その結果、物質の存在を表す密度関数の移流を考える VOF (Volume of Fluid) 法¹³⁾や自由表面からの距離を表す距離関数の移流を考えるレベルセット法¹⁴⁾などが流体分野に多く用いられることとなっている。固体に対する Euler 型解法においても、この流れを受け VOF 法^{1),2)}やレベルセット法が注目されている。

しかしながら、加工シミュレーションなどにおける固体の大変形問題においては、形状の変化は大きくとも物質の流動状況としてはあまり複雑ではない。また、固体の問題においては本質的に Lagrange 型変形記述が成立するものを仮定していることから、初期形状において物質表面に存在する粒子は、変形後も物質表面に存在し続ける。さらに、固体の大変形問題では、ほぼ非圧縮として変形が進むため、マーカー粒子が局所的に凝集する可能性は低い。したがって、流体ではあまり成功していないマーカー粒子法は、固体の大変形問題における自由表面の近似手法として十分機能するものと考えられる。

一方、固体の大変形問題においては、物質点の各粒子が塑性ひずみなどの内部変数を記憶するものとして定式化される。空間に固定した評価点で問題を記述する Euler 型解法では、このような内部変数は、双曲型方程式である輸送方程式を解くことにより評価しなければならない。

これに対して、マーカー粒子は物質点の Lagrange 型記述としての配置を与えるものであることから、本研究ではマーカー粒子上に材料構成則を記述するための物質内部変数を定義する。運動方程式などの場の方程式を Euler 型で記述する際には、マーカー粒子上の変数を空間固定メッシュ上に投影し参照することにより、支配方程式の Euler 型記述が可能となる。これは、従来の Euler 型解法において物質内部変数の輸送方程式を用いている点とは大きく異なり、物質内部変数がマーカー粒子上で直接更新されることから精度の大幅な向上につながるものと考えられる。

また、従来の移流方程式を用いる手法によって多くの物質内部変数が現れる複雑な材料構成則を取り扱うためには、物質内部変数の数だけ移流方程式を解くことが必要となり、計算量増大だけでなく計算精度の低下も懸念される。マーカー粒子上で物質内部変数を定義す

る本手法では、物質内部変数の数の増加はマーカー粒子上において記憶し更新しなければならない変数を増加させるのみであることから、用いることのできる材料構成則などに対する制約は生じない。同様な考え方は PIC 法⁵⁾を起源とする MPM^{7),8)}でも見られる。MPM では基本的に質量を持つ粒子毎に運動方程式の近似を行っているのに対し、本研究では粒子は質量を持たない評価点であり、Euler 型有限要素法の枠組みで運動方程式の近似を行うことを目指したものとなっている。

3. 定式化と時間積分

本研究では、基本的に Lagrange 型記述により固体の動的大変形問題の定式化を行う。時刻 t における参照配置 X の関数として定義される物質点の座標すなわち変形写像 $y(X, t)$ と物質点の速度 $v(X, t)$ を独立変数と考えると、支配方程式である座標-速度関係式と運動方程式は以下のように表される、

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma + b \quad (2)$$

ここで、 ρ は密度、 σ は Cauchy 応力、 b は物体力であり、すべて物質変数として定義されているものとする。また、式 (2) の ∇ は現配置における空間微分である。

上述の支配方程式に対して、まず時間方向に離散化する。本研究においては、数値時間積分公式として動的陽解法で一般的である中心差分を用いる。いま、物理量 g の時刻 t_n における近似値を g^n と表すと、時間方向に離散化された支配方程式 (1)(2) は次式のように表される。

$$\frac{1}{\Delta t} (y^{n+1} - y^n) = v^{n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{\rho}{\Delta t} (v^{n+\frac{1}{2}} - v^{n-\frac{1}{2}}) = \nabla \cdot \sigma^n + b^n \quad (4)$$

ここで、時間刻み Δt は一定とし、 $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$ と考える。また、式 (4) の ∇ は t_n の配置における空間微分となる。

4. マーカー粒子を積分点とする特性 Galerkin 有限要素法

2 節で述べたように、マーカー粒子上で物理量を定義することで、輸送方程式を解くことなく、物質移動に物理量の伴う移流を考慮することができる。このような手法として、Material Point Method (MPM)^{7),8)}が近年注目されているが、空間微分が必要となる物理量に対しては、最小 2 乗近似などを用いて固定メッシュ上投影するものとなっている。しかしながら、このような投影操作を行った場合、粒子によって記述される場とメッシュ上で表されている場が整合しないため、数値的な

減衰が発生することとなる。そこで、本研究では空間微分が必要な速度場に関しては、マーカー粒子上で与えられる場をメッシュ上に L_2 投影し、またメッシュ上で更新された速度場をマーカー粒子上に補間によって戻すことにより、マーカー粒子上の速度場とメッシュ上の速度場が完全に整合する形で計算が行われる手法を考える。このような取り扱い、前節で得られた運動方程式を特性 Galerkin 法 (Characteristic Galerkin Method)^{9),10)} により近似し、その積分の際にマーカー粒子を数値積分点として用いることで実現される。

本研究で提案する手法では、次の2つのフェーズに分けて計算が行われる。

- 特性 Galerkin 有限要素法に基づく運動方程式の計算 (メッシュフェーズ)
- マーカー粒子の移動とマーカー粒子上における材料構成則の追跡 (マーカーフェーズ)

このとき、マーカー粒子上で定義される未知変数を、マーカー粒子の初期位置 X_m の関数として定義される各マーカー粒子の座標 $y^n(X_m)$ 、速度 $v^{n+\frac{1}{2}}(X_m)$ および応力 $\sigma^n(X_m)$ とする。一方、メッシュ上においては、空間位置 x の関数として Euler 型変数として定義される速度場 $\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x)$ を考える。(図-1 参照)

また、物質の存在範囲はマーカー粒子の分布する領域として表される。したがって、時刻 t_n における物質存在範囲、すなわち固体の変形後形状を表す領域 ω_n は、図-2 のように空間に固定されたメッシュに対して境界がメッシュ中を横切る形で分布することとなる。

4.1 メッシュフェーズ

時刻 t_n における形状 ω_n を参照形状として、運動方程式 (4) に特性 Galerkin 法を適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\omega_n} \rho \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x) \cdot w \, dx &= \int_{\omega_n} \rho v^{n-\frac{1}{2}}((y^n)^{-1}(x)) \cdot w \, dx \\ &\quad - \Delta t \int_{\omega_n} \sigma^n((y^n)^{-1}(x)) : \varepsilon(w; x) \, dx \\ &\quad + \Delta t \int_{\omega_n} b^n(x) \cdot w \, dx \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 w は仮想変位であり、 $\varepsilon(w; x)$ は参照形状を x として変位 w から計算されるひずみであり次式で表される。

$$\varepsilon_{ij}(w; x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$$

また、 $(y^n)^{-1}(x)$ は変形写像 $y^n(X)$ の逆写像であり、時刻 t_n に空間座標 x に位置する粒子の参照配置を与えるものである。

式 (5) の右辺第 1 項はマーカー粒子上の速度を空間に固定された有限要素メッシュ上へ投影するものであり、特性 Galerkin 法における物質微分項のをマーカー粒子の空間位置を積分点とする数値積分によって評価する。こ

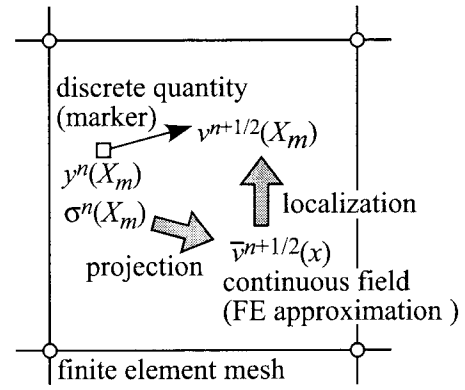


図-1 変数配置

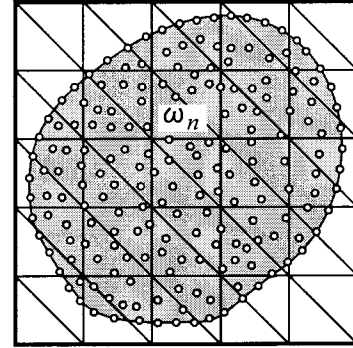


図-2 メッシュと物質領域

のとき、積分領域はマーカー粒子の存在範囲すなわち現形状の空間領域 ω_n となっている。同様に、式 (5) の右辺第 2 項はマーカー粒子上の応力の有限要素メッシュ上への投影である。

式 (5) で現れる積分はマーカー粒子を積分点とする数値積分によって評価される。いま、初期位置を X_m とするマーカー粒子 m に対する積分重みを W_m とする。このとき、式 (5) の左辺第 1 項は数値積分により次のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\omega_n} \rho \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x) \cdot w \, dx &= \sum_{m=1}^{N_p} \rho(X_m) \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_m^n) \cdot w(Y_m^n) W_m \end{aligned} \quad (6)$$

ここで Y_m^n はマーカー粒子 m の n ステップにおける空間位置であり以下のように表される。

$$Y_m^n = y^n(X_m)$$

式 (5) の右辺第 1 項についても、マーカー粒子を積分点とする数値積分を適用すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\omega_n} \rho v^{n-\frac{1}{2}}((y^n)^{-1}(x)) \cdot w \, dx &= \sum_{m=1}^{N_p} \rho(X_m) v^{n-\frac{1}{2}}(X_m) \cdot w(Y_m^n) W_m \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、式 (5) の右辺第 2 項についても同様に以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta t \int_{\omega_n} \sigma^n((y^n)^{-1}(x)) : \varepsilon(w; x) dx \\ = \Delta t \sum_{m=1}^{N_p} \sigma^n(X_m) : \varepsilon(w; Y_m^n) \end{aligned} \quad (8)$$

本研究では、2次元平面ひずみ問題を考え、これらに式に対して有限要素近似を適用する。要素 e に対して、メッシュ上で定義される空間連続量 $\bar{v}$ と w を補間関数 N_a を用いて次のように表す。

$$\bar{v}(y) = \sum_{a \in Q^e} N_a(y) \bar{v}_a, \quad w(y) = \sum_{a \in Q^e} N_a(y) w_a \quad (9)$$

ここで、 Q^e は要素 e に含まれる節点の番号を表す集合を意味する。このとき、式 (6) に対する有限要素近似は次のように表される。

$$\int_{A^e} \rho \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x) \cdot w dx = \sum_{a \in Q^e} \sum_{b \in Q^e} (w_a)^t m_{ab}^e \bar{v}_b^{n+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$m_{ab}^e = \mathbf{I} \sum_{m \in P^e} \rho(X_m) N_a(Y_m^n) N_b(Y_m^n) W_m \quad (11)$$

ここで、 A^e は要素 e における物質が存在する領域、 P^e は要素 e に含まれるマーカ粒子の番号を表す集合である。また、 $\mathbf{I}$ は 2×2 の単位行列である。

同様に、式 (7) に対する有限要素近似は次のように表される。

$$\int_{A^e} \rho v^{n-\frac{1}{2}}((y^n)^{-1}(x)) \cdot w dx = \sum_{a \in Q^e} (w_a)^t f_a^e \quad (12)$$

$$f_a^e = \sum_{m \in P^e} \rho(X_m) N_a(Y_m^n) v^{n-\frac{1}{2}}(X_m) W_m \quad (13)$$

さらに、式 (8) の有限要素近似は次式となる。

$$\Delta t \int_{A^e} \sigma^n((y^n)^{-1}(x)) : \varepsilon(w; x) dx = \sum_{a \in Q^e} (w_a)^t g_a^e \quad (14)$$

$$g_a^e = \Delta t \sum_{m \in P^e} B_a^t \sigma_m W_m \quad (15)$$

ここで、 σ_m と B_a は以下のように定義されている。

$$\sigma_m = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(X_m) \\ \sigma_{22}(X_m) \\ \sigma_{12}(X_m) \end{Bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

上記のように計算される要素行列 $\mathbf{m}^e$ 、要素ベクトル $\mathbf{f}^e$ 、 $\mathbf{g}^e$ に対して、メッシュ全体について組み立てを行ったものをそれぞれ $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ とし、また外力によるベクトルを $\mathbf{H}$ と表すと、メッシュフェーズにおける離散化された方程式は以下のように表される。

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F} - \mathbf{G} + \mathbf{H} \quad (16)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}}$ は $\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}$ に対応する節点ベクトルである。

式 (16) における行列 $\mathbf{M}$ は、マーカ粒子を積分点とする数値積分により計算された整合質量行列であり、マーカ粒子上の物理量を投影してメッシュ上の速度を求めるためには連立 1 次方程式 (16) を解かなければならない。また、本手法では時間積分に中心差分を用いていることから、以上の計算では数値的な減衰なく速度場が得られることとなる。しかしながら、実際の数値計算では、マーカ粒子が応力をもって固定メッシュ上の要素から要素へ移動する際に数値的な誤差が生じるが、数値減衰が含まれていないことからこのような数値誤差が蓄積する傾向が見られた。また、要素内に 1 つのマーカ粒子のみが含まれる状態が発生すると、マーカ粒子が持つ応力によりその近傍での加速度が過大評価され数値的に不安定になる現象も見られた。そこで、本研究では数値減衰を導入するため整合質量行列 $\mathbf{M}$ を集中化した行列 $\mathbf{M}_L$ を用い、次の式で速度場を計算する。

$$\bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{G}) \quad (17)$$

この数値減衰の導入により、マーカ粒子が持つ応力に起因する数値誤差の蓄積と数値不安定性の大きな部分を回避することが可能となっている。

4.2 マーカフェーズ

マーカ粒子の移動を考えるためまずメッシュフェーズで計算された速度からマーカ粒子の速度を評価する。このとき、用いられる速度は次式のようにマーカ粒子が t_n において位置する点における速度をメッシュ上の速度場を補間することによって得る。

$$v^{n+\frac{1}{2}}(X_m) = \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_m) \quad (18)$$

また、得られたマーカ粒子の速度から、次にマーカ粒子の座標を更新する。

$$y^{n+1}(X_m) = y^n(X_m) + \Delta t v^{n+\frac{1}{2}}(X_m) \quad (19)$$

メッシュフェーズにおいて計算された速度場は、塑性変形に伴う非圧縮性を考慮したものであることから、上記のように更新されたマーカ粒子の配置によって決定される物体領域についてはその体積および質量を保存したものとなる。

一方、メッシュ上の速度場からマーカ粒子の位置 $y^n(X_m)$ におけるひずみ速度 $D_m^{n+\frac{1}{2}}$ とスピンテンソル $\Omega_m^{n+\frac{1}{2}}$ を以下のように計算することができる。

$$(D_m^{n+\frac{1}{2}})_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \right]_{x=y^n(X_m)} \quad (20)$$

$$(\Omega_m^{n+\frac{1}{2}})_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \right]_{x=y^n(X_m)} \quad (21)$$

本研究では、客観応力速度として Jaumann 応力速度を採用し、応力はひずみ速度 $D_m^{n+\frac{1}{2}}$ とスピテンソル $\Omega_m^{n+\frac{1}{2}}$ に用い、次式で更新する。

$$\begin{aligned}\sigma^{n+1}(X_m) &= \sigma^n(X_m) + \Delta\sigma(D_m^{n+\frac{1}{2}}\Delta t) \\ &+ \Delta t \left\{ \sigma^n(X_m) \cdot \Omega_m^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_m^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sigma^n(X_m) \right\} \quad (22)\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\sigma$ はひずみ増分 $D_m^{n+\frac{1}{2}}\Delta t$ から適当な材料構成則に基づき積分として計算される応力増分である。本研究では、Mises の降伏条件と J_2 流れ理論に従う弾塑性構成則を採用し、応力積分においては後退 Euler 法に基づく弾性予測－半径引き戻し法¹⁸⁾を用いた。

5. 有限要素近似と数値積分

本研究では、2次元問題に対する有限要素近似として三角形1次要素を用いる。また、弾塑性大変形問題においては塑性変形における非圧縮性より体積ロッキングが生じることから、体積ひずみを4つの要素で一定とする P_1 -iso- $P_2 + P_0$ 要素^{15),16)}による B-bar 型の混合型近似¹⁷⁾を行う。(図-3 参照)

本研究では、マーカ粒子の空間位置を積分点とする数値積分を用いることから、マーカ粒子毎の積分重みを与えなければならない。いま、マーカ粒子については、図-4のように領域の境界上にあるマーカ粒子を境界マーカ粒子、領域内部にあるマーカ粒子を内部マーカ粒子と区別する。境界マーカ粒子を含まない完全に満たされた要素においては、マーカ粒子の重みは等配分とし、要素面積をマーカ粒子数で除したものをを用いる。一方、境界マーカ粒子を含む要素すなわち要素領域内に物質の境界を含む要素においては、まず境界マーカ粒子を用い物質の存在する領域の面積を多角形として計算する。マーカ粒子に対する積分重みは、満たされた要素と同様に基本的に等配分とするが、境界マーカ粒子の重みは内部マーカ粒子の重みの1/2に設定する。

6. 数値計算例

6.1 1次元問題

本研究では、まず軸変形のみを考える弾性棒の1次元問題を用いて、提案する手法の基本的な妥当性を検証する。図-5のように長さ $l = 0.15$ の棒を区間 $[0, 1]$ 内に配置し、初速度 v^0 を与えることで運動させる。初速度としては、変形を伴わない剛体運動を考える case 1 と伸長を伴った運動を考える case 2 を設定する。メッシュフェーズにおける速度を表すための有限要素近似としては1次要素を用いる。区間 $[0, 1]$ に対して固定されたメッシュの要素数は50とし、マーカ粒子は物質が存在する区間 $[0.28, 0.43]$ において、初期位置で等間隔に51個を分布させる。

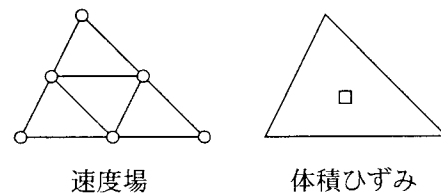


図-3 有限要素

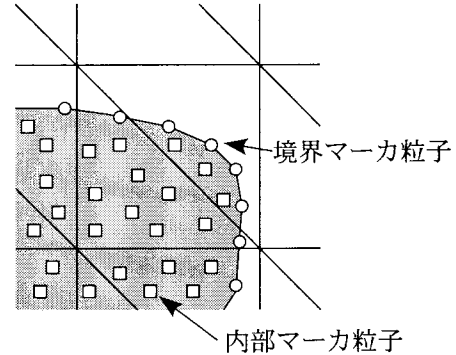
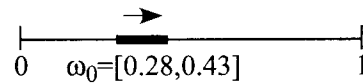


図-4 マーカ粒子と数値積分



軸剛性: $EA = 1 \times 10^7$

線密度: 1

初速度: $v^0(X) = 500$ (case 1)

$v^0(X) = 400 + \frac{200(X-0.28)}{0.15}$ (case 2)

図-5 1次元問題

(1) case 1: 剛体運動

図-6に剛体運動となる case 1 のついで速度分布の履歴を示す。この初期条件では、厳密解の速度場は常に初速度 $v^0(X) = 500$ と同じ一定値をとるが、提案する手法で計算された結果は最大でも0.2%程度の誤差となっており、精度良く計算されていることが分かる。空間に固定された有限要素メッシュ上から見ると、この問題の速度場は不連続な場となっており、通常の Galerkin 型の有限要素近似を用いてこのような場を近似しようとした場合、Gibbs 現象により数値振動が発生することが懸念される。しかしながら、提案する手法では、物体の現配置のみを積分領域とすることによって、数値振動なく不連続な速度場がメッシュ上に投影されている。また、本手法では速度場についてマーカ粒子上の値とメッシュ上で表される空間分布の近似値を相互にやり取りしているにもかかわらず、精度の低下はほとんど見られない。

また、図-7に計算された軸力分布の履歴を示す。厳密には0となる軸力場に対して、速度場の誤差によって軸力が計算されているが、その大きさは解に影響を

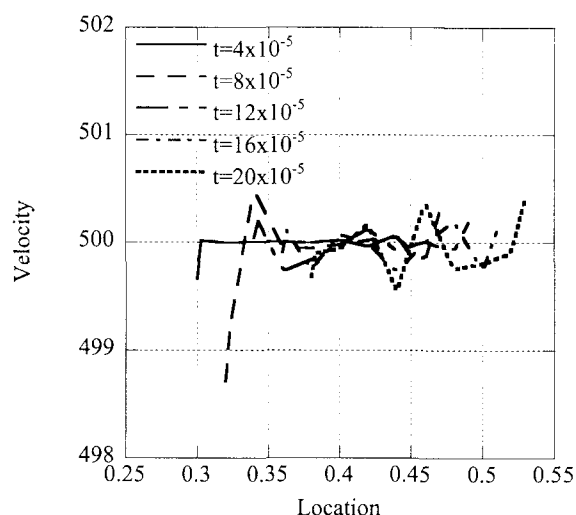


図-6 1次元問題 (case 1: 剛体運動, 速度分布)

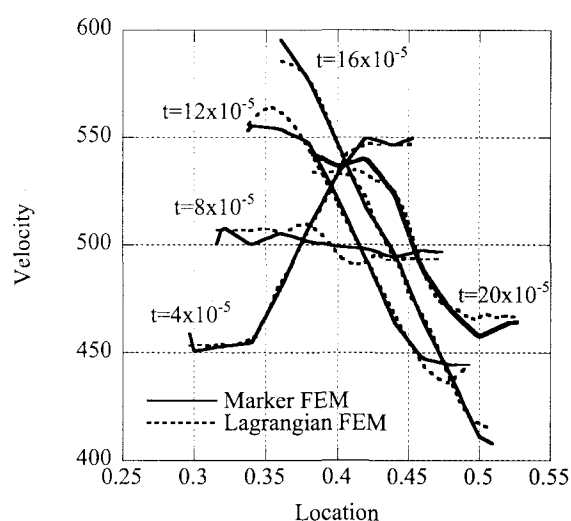


図-8 1次元問題 (case 2: 伸縮, 速度分布)

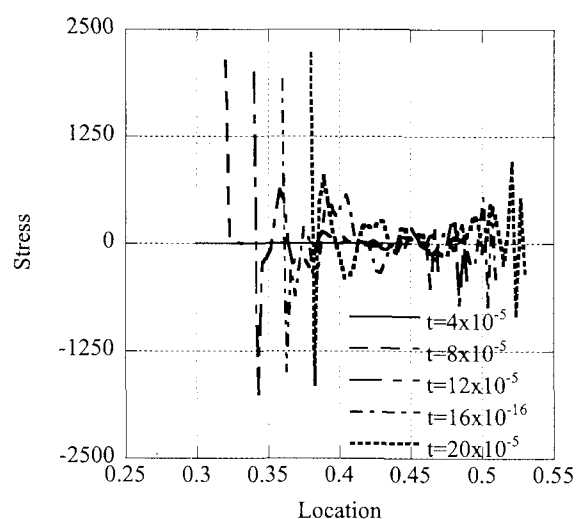


図-7 1次元問題 (case 1: 剛体運動, 軸力分布)

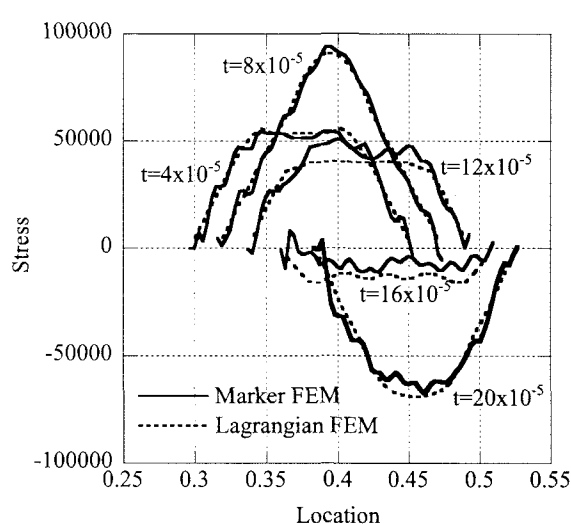


図-9 1次元問題 (case 2: 伸縮, 軸力分布)

与えないレベルのものであり、計算の進行しても拡大していない。

以上から、本研究で提案する手法は、ほぼ正確に剛体運動を表現可能であることが分かる。

(2) case 2: 伸縮運動

図-8と図-9に伸縮運動となる case 2 の速度分布と応力分布をそれぞれ示す。ここでは、比較のために、Lagrange 型定式化に基づく通常の有限要素法の結果を併記する。用いた Lagrange 型有限要素法は、空間離散化としては isoparametric 仮定に基づく 1 次要素による近似を行い、時間積分には有限時間刻みに対して運動量とエネルギーを厳密に保存する Energy-Momentum 法を適用したものであり、動的大変形問題に対して最も信頼性の高い計算手法の一つである。

提案する手法による結果は、速度、軸力とも若干の誤差はあるものの Lagrange 有限要素法の結果と良く対応していることが分かる。したがって、本研究で提

案する手法は十分信頼できる動的大変形問題に対する手法となっていると言える。

6.2 棒の衝突問題

よく用いられるベンチマーク問題である図-10の弾塑性棒の衝突問題の計算を行った。材料は線形等方硬化則に従うものとし、棒の初速度は 300 m/s とした。

図-11に本研究で提案する手法による計算結果を示す。この結果と既往の計算結果²⁾と比べると、棒の下部の形状に若干の差異は見られるものの、相当塑性ひずみ分布を含めた結果としては両者はほぼ対応している。したがって、本研究で提案する手法は 2 次元の弾塑性問題において妥当な解を与える手法であることが確認できた。しかしながら、自由表面上のマーカー粒子において物理的には不合理な相当塑性ひずみが現れていることが観察できる。これは、応力についての精度が低下する自由表面上を含め、全てのマーカー粒子について応力を求めているためであると考えられる。物理

的に不合理な応力状態は自由表面上のマーカ粒子に限定されていることから、解全体には大きな影響を及ぼさないと考えられるが、今後改良が必要であろう。

6.3 せん断問題

剛体回転の影響が現れる問題における手法の妥当性を検証するため、図-12のような1方向のせん断問題の計算を行った。材料モデルは前項の棒の衝撃問題で用いたものと同一なものと設定した。境界条件としては、上下端部のせん断方向に初期速度を作用させる。

図-13の本研究で提案する手法による計算結果は、既往の計算結果²⁾と比べ、変形モードや塑性域の広がりなどにおいてほぼ妥当なものであると考える。

7. 結び

本研究では、マーカ粒子上で物理量を考え、移流方程式を解く代わりにマーカ粒子の移動によって固定格子上的物理量の移流を考慮する新しいEuler型有限要素法による固体の大変形解析手法を提案し、基本的な数値解析例により、提案する手法の妥当性を示した。本手法は、物質点において定義される内部変数に対してEuler型有限要素法のように移流方程式を解く必要がないことから、複雑な材料構成則を必要とする加工シミュレーションなどの問題に対して有効であると考えられる。

謝辞

本研究は独立行政法人日本学術振興会 平成16年度科学研究費補助金(基盤研究(C))(2):16560049)の補助を受けた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 岡澤重信, D. J. Benson: Eulerian ハイドロコードによる破壊解析, 応用力学論文集, 6, pp.209-214, 2003.
- 2) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, 6, pp.151-158, 2003.
- 3) F.H. Harlow and J.E. Welch: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Physics and Fluids, 8, pp.2182-2189, 1965.
- 4) 登坂宣好, 矢川元基編: 計算力学〈4〉—自由・移動境界問題の近似解析, 養賢堂 (1995).
- 5) F.H. Harlow: The particle-in-cell computing method for fluid dynamics, in B. Adler, S. Fernbach and M. Rotenberg, eds. Methods for Computational Physics, Vol. 3, pp.319-343, 1964.

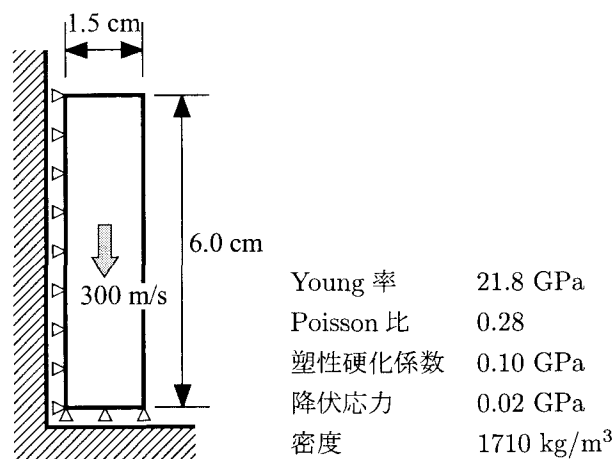


図-10 棒の衝突問題

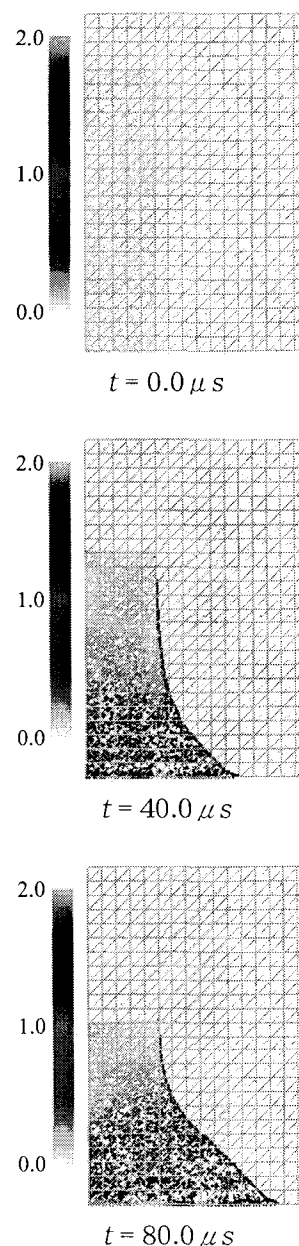


図-11 棒の衝突問題における変形と相当塑性ひずみ分布

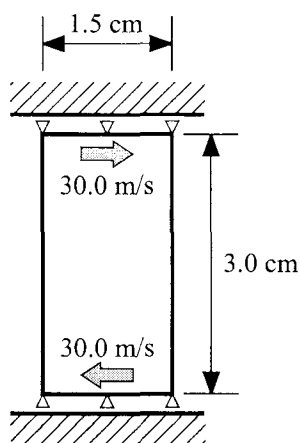


図-12 せん断問題

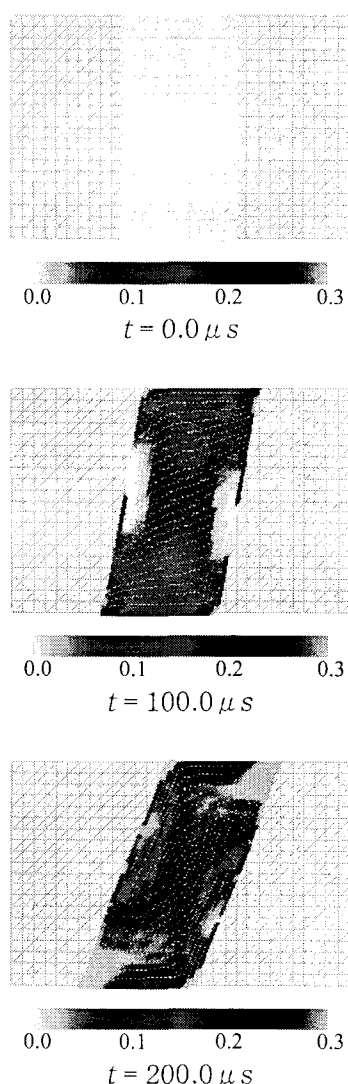


図-13 せん断問題における変形と相当塑性ひずみ分布

- 6) J.U. Brackbill and H.M. Ruppel: FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid-flows in 2 dimensions, J. Comput. Phys., 65, pp.314- 343, 1986.
- 7) D. Sulsky, Z. Chenb and H. L. Schreyer: A particle method for history-dependent materials Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 118, pp.179-196, 1994.
- 8) Z. Wieckowski: The material point method in large strain engineering problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193, pp.4417-4438, 2004.
- 9) M. Bercovier and O. Pironneau: Characteristics and the finite element method, in Proceedings of the 4th International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, T. Kawai, ed., North-Holland, pp.67-73, 1982.
- 10) O. Pironneau: The finite element methods for fluids, John Wiley & Sons Inc(1990).
- 11) 山田貴博, 石井 聡: 固体の大変形解析のためのマーカー粒子を用いた特性有限要素法, 計算工学講演会論文集, 9, pp.583-586, 2004.
- 12) 功刀資彰: 界面体積追跡法による気液二相流解析, 日本流体力学会 数値流体力学部門 Web 会誌, 11, pp.108-120, 2003.
- 13) C.W. Hirt, and B.D. Nichols: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., 39, pp.201-225, 1981.
- 14) M. Sussman, P. Smereka and S. Osher: A levelset approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, J. Comput. Phys., 114, pp.146-159, 1994.
- 15) M. Bercovier and O. Pironneau: Error estimates for finite element method solution of Stokes problem in the primitive variables, Numer. Math., 33, pp.211-224, 1979.
- 16) F. Brezzi and M. Fortin: Mixed and hybrid finite element methods, Springer-Verlag, 1991.
- 17) J.C.Simo, R.L.Taylor and K.S.Pister: Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 51, pp.177-208, 1985.
- 18) J.C.Simo and T.J.R.Hughes: Mechanics and materials computational inelasticity, Springer-Verlag, 1998.

(2005 年 4 月 15 日受付)