

保存型 CIVA 法の構築と格子ボルツマン法への応用

Development of Conservative CIVA Method and its application to Lattice Boltzmann Method

立石 絢也*・榎山 和男**

Jun'ya TATEISHI and Kazuo KASHIYAMA

*学生会員 修士(工学) 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 博士後期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a conservative CIVA method for advection equation on unstructured mesh, and its application to lattice Boltzmann method. The CIVA method is highly accurate interpolation scheme for advection equation based on CIP method. The parameter of the CIVA interpolation function is determined to guarantee the mass conservation. The present method was applied to the lattice Boltzmann method based on unstructured mesh. Some numerical examples are carried out to test the validity of the method.

Key Words : *Conservative CIVA method, advection equation, Lattice Boltzmann Method*

1. はじめに

近年, 計算機の性能向上とともに計算手法やモデリング手法が発展してきており, 数値流体力学(CFD)の応用分野も広がっている. CFDを実用問題に適用する場合には, 複雑な領域をモデル化し解析する必要があるため, 複雑な計算領域を格子分割する場合には非構造格子を用いることが望ましいといえる. 非構造格子における流体解析の代表的な手法として, 有限体積法や有限要素法などがあげられるが, 移流方程式の解析に必要な高次の上流化が困難であるという問題がある. その中で, 三角形や四面体を用いた高精度な上流化法として近年注目されている方法に, CIVA法¹⁾(Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinates)がある.

CIVA法はCIP法²⁾に基づく移流方程式の高精度解法であり, CIP法を非構造の三角形や四面体の格子に拡張した手法である. これらの手法は, 計算格子点上に関数の値とその空間微係数を配置し格子内関数を三次の補間関数により近似する. そして, 移流方程式の局所厳密解をこの高次補間関数を用いて近似的に求める. 計算は局所的に行われるため, 連立方程式を解く必要がなく計算効率が高いという特徴がある. 三角形や四面体を用いるCIVA法では, 格子点の関数値, 空間微係数値だけでは完全三次式を構成するための情報量が不足するため, 補間関数を面積座標を用いて表し, その関数形を調整することで整合性をとっている.

CIP法やCIVA法は移流方程式の非保存型解法であり, 保存性を保証しないことが課題とされてきた. この問題を解決する方法として, 完全保存保証型のCIP法³⁾が提案された. 保存型のCIP法では, 積分量を同時に移流させ, 関数の値と微係数, 積分量を用いて補間関数を構築することで保存性を高めている. CIVA法

においても, 積分量を用いて関数を修正することで保存性を向上させることができるものと考えられる.

一方, CIVA法の応用としては, メッシュフリー法⁴⁾, 自由表面流れ解析⁵⁾などが行われているが, 筆者らはCIVA法を用いた格子ボルツマン法⁶⁾に注目している. 格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method:LBM)⁷⁾⁻⁹⁾は仮想的な流体粒子を考え, その衝突と並進を計算することで流体を解析する手法である. LBMは粒子分布の時間発展式を陽的に解く手法であり, 従来のNavier-Stokes方程式を差分法や有限要素法で解く場合に現れるような連立方程式を解く必要がない. そのため, 計算効率が高く, 並列計算やベクトル計算に向いている. また, 混相流や多孔質媒体内の流れ解析に有効な手法である¹⁰⁾.

LBMでは通常, 等間隔の格子を用いて解析が行われ, 情報の伝達はCFL数が1の完全移流となるため保存性が高い. しかし逆に, 複雑な境界形状を表現したり, 格子の粗密をつけたりすることができない. そこで, 不等間隔の格子を用いた格子ボルツマン法⁶⁾¹¹⁾⁻¹⁶⁾が考案された. この場合, 情報の伝達は完全移流ではなく, 並進計算のスキームによって分散誤差が生じたり, 保存性が保たれなくなる. 格子ボルツマン法の並進計算にCIVA法を用いると, 高精度かつ安定に計算を行うことができるが, 等間隔の場合の格子ボルツマン法に比べると保存性の面で劣ると考えられる. CIVA法の保存性を高めることができれば, 非構造格子を用いても通常の格子ボルツマン法と同等の保存性を保つことができる.

本論文は, 非構造格子に基づく移流方程式の高精度解法としての保存型CIVA法の提案と, その格子ボルツマン法への応用について述べるものである. 保存型

CIVA 法は、CIVA 法の計算と同時に積分量の移流計算を行い、保存性を完全に満たすように CIVA 法のパラメータを求める方法である。提案する保存型 CIVA 法を平行移流問題に適用し、移流現象に対する計算精度および保存性について、従来の CIVA 法との比較のもとに検証した。次いで、本手法を非構造メッシュを用いた格子ボルツマン法における並進計算に適用し、正方形キャビティ内対流問題の解析を行った。

2. CIVA 法

2.1 CIVA 法の原理

CIVA 法¹⁾は、移流方程式の解法のひとつである CIP 法²⁾を三角形および四面体に拡張した手法である。CIP 法や CIVA 法では、各節点の局所厳密解を上流側の格子内に張った 3 次の補間曲面により求める。空間内の完全 3 次多項式を得るためには 10 個の係数を求める必要があるため、各節点上に数値および空間微係数値を配置する (図-1)。

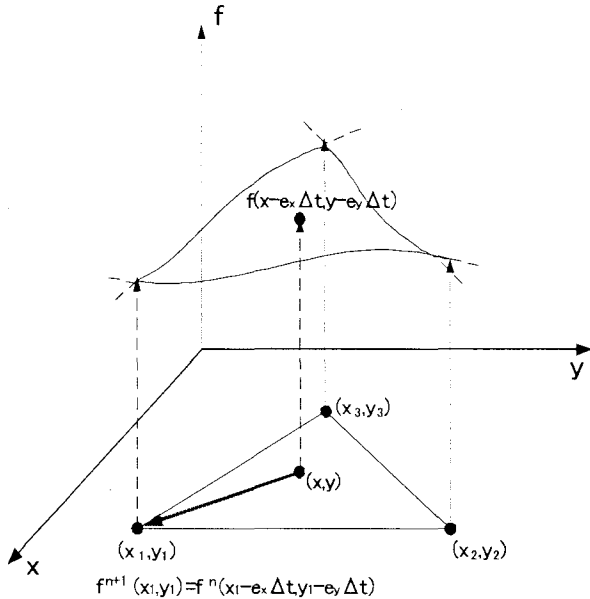


図-1 CIVA method

四角形格子の場合、4 点計 12 変数の情報から 3 次多項式の未知係数が決定されるが、三角形格子の場合は 3 点 9 変数しかなく、3 次多項式を完全に求めることができない。CIVA 法では、この問題を 3 次関数を調整し未知係数を減らすことにより解決している。

2.2 CIVA 法の補間関数

CIVA 法で用いられる補間関数および微係数の補間関数は、三角形および四面体に対して正規化された座標系である面積座標/体積座標系を用いて以下のように

あらわされる。

$$\tilde{f}(L) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1}^{n+1} \beta_{jk} (L_j^2 L_k + b_{jk}^{(n)}) \quad (1)$$

$$\alpha_i = f_i \quad (2)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + \sum_{l=1}^{n+1} (x_{k,l} - x_{j,l}) f_j^{(l)} \quad (3)$$

ここで、 n は計算次元数をあらわしており、座標値 L は 2 次元の場合部分三角形の面積 S_1, S_2, S_3 と全体の三角形の面積 $S (= S_1 + S_2 + S_3)$ の比、

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (4)$$

を表しており、3 次元の場合は部分四面体の体積 V_1, V_2, V_3, V_4 と全体の四面体の体積 $V (= V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$ の比、

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) = \left(\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V} \right) \quad (5)$$

をあらわしている。 d は 1 次補間の場合 0、3 次補間の場合 1 となる。 $b_{jk}^{(n)}$ は 2 次元、3 次元の場合それぞれ以下のようになる。

$$b_{jk}^{\{2\}} = c L_1 L_2 L_3 \quad (6)$$

$$b_{jk}^{\{3\}} = c L_j L_k (1 - L_j - L_k) \quad (7)$$

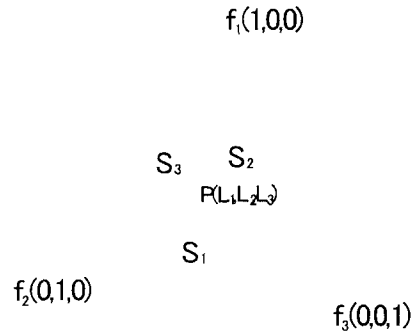


図-2 面積座標

通常の CIVA 法では、パラメータ c は 3 次関数が全領域で任意の曲率を与えるように選ばれ¹⁷⁾,

$$c = \frac{1}{2} \quad (8)$$

となる。ただし、このパラメータ c は任意に選択することができる。

デカルト座標系の空間微係数値は、2 次元の場合、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{y_3 - y_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{y_1 - y_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{x_1 - x_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{x_2 - x_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3}$$

で求められる。ただし、 J は、

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \quad (9)$$

である。3次元の場合も同様に体積座標系とデカルト座標系の微分関係から求まる。

CIVA 法のように非構造三角形格子上の補間により移流方程式を解く場合には、上流側の点がどの三角形内にあるかを探索する必要がある。本研究では、CFL 数が1を超えないように格子幅を設定し、上流側の点を近隣の三角形格子内から探索した。このとき、面積座標における小三角形の面積 S_1, S_2, S_3 がすべて正になる三角形に上流側の点が存在するとして探索を行った。

3. 保存型 CIVA 法の提案

CIP 法や CIVA 法などは移流方程式の非保存型の解法であり、保存性を保証しないことが課題である。しかし、関数値と空間微係数に加え積分量も同時に移流させ補間関数を構成することで保存性を向上させることができる。本論文では、三角形、四面体要素内の積分量を満たすように CIVA 法の補間式のパラメータ c を決定する。これにより、不完全三次補間の CIVA 法の欠点である情報量の不足を補うこともできる。

3.1 2次元計算の場合

いま、要素の積分量を m_e とおき、CIVA 法の補間式のパラメータを m_e を用いてあらわすことを考える。

$$\iint_S f(L) dS = m_e \quad (10)$$

CIVA 法の補間式を展開して整理すると以下のようにになる。ここで、 L_1, L_2, L_3 は面積座標であり、 β_{jk} は式 (3) で求められる係数である。

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^3 f_i L_i + d \sum_{j,k=1}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3] \\ &= f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3 \\ &\quad + \beta_{12} L_1^2 L_2 + \beta_{13} L_1^2 L_3 + \beta_{21} L_2^2 L_1 \\ &\quad + \beta_{23} L_2^2 L_3 + \beta_{31} L_3^2 L_1 + \beta_{32} L_3^2 L_2 \\ &\quad + (\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{23} + \beta_{31} + \beta_{32}) c L_1 L_2 L_3 \end{aligned} \quad (11)$$

三角形要素の積分は、面積座標の積分公式を用いると以下のような代数計算に置き換えることができる。

$$\iint_S L_1^i L_2^j L_3^k dS = 2S \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \quad (12)$$

公式を用いて式 (11) を積分すると、要素の積分量は以下のように表される。

$$\begin{aligned} m_e &= \iint_S f(L) dS \\ &= \frac{S}{3} (f_1 + f_2 + f_3) \\ &\quad + (\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{23} + \beta_{31} + \beta_{32}) \left[\frac{S}{30} + c \frac{S}{60} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、上式を c について整理すると、パラメータ c が要素積分量 m_e を用いてあらわすことができる。

$$c = \frac{60m_e - 20S(f_1 + f_2 + f_3)}{S(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{23} + \beta_{31} + \beta_{32})} - 2 \quad (14)$$

要素積分量 m_e の移流計算は、要素の辺を通過する積分量 Δm_e を3辺について計算し、毎タイムステップに更新を行う。

要素積分量の更新の計算方法を図-3を用いて説明する。いま、三角形1-2-3の格子点1,2,3の上流点がそれぞれ1',2',3'となるような移流速度を仮定する。この場合、1タイムステップの間に1'の物理量が1まで移流する。他の格子点も同様に移流する。三角形1-2-3の要素積分量を m_e 、辺1-2を通過する積分量を Δm_e^{12} とする。辺1-2では要素外部から四辺形1-1'-2'-2の部分の物理量が三角形1-2-3内に流入してくる。そこで、四辺形1-1'-2'-2に Gauss の数値積分を適用し、辺1-2を通過する積分量 Δm_e^{12} を求める。Gauss の積分点での関数値は積分点が属する三角形要素の補間式から求められる。なお、 Δm_e の算出に使う Gauss の数値積分では、 2×2 点の積分を用いた。三角形のその他の2辺についても同様に計算し、要素積分量 m_e に要素に流入する Δm_e を加え流出する Δm_e を引くと移流後の要素積分量 $\tilde{m}_e$ が求まる。

$$\tilde{m}_e = m_e + g_{12} \Delta m_e^{12} + g_{23} \Delta m_e^{23} + g_{31} \Delta m_e^{31} \quad (15)$$

ここで、 g_{ab} は辺 a-b (a-b=1-2,2-3,3-1) を通過する積分量の正負をあらわす記号で、各辺において積分量が要素1-2-3に流入する場合は $g_{ab} = 1$ とし、積分量が流出する場合は $g_{ab} = -1$ とする。図-3の場合は、 $g_{12} = 1$ 、 $g_{23} = -1$ 、 $g_{31} = -1$ となる。

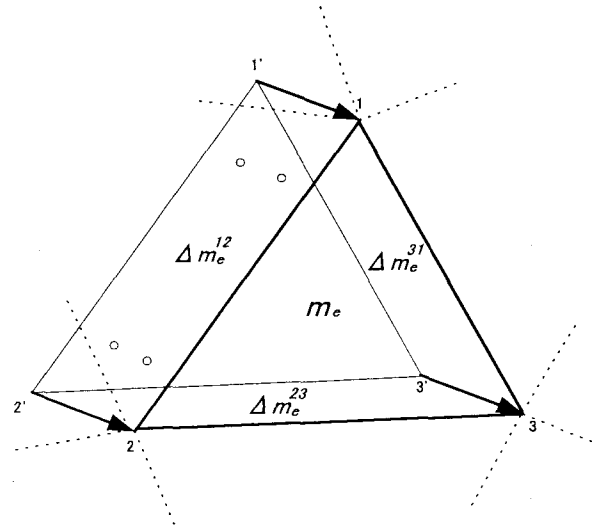


図-3 積分量の移流計算

3.2 3次元計算の場合

3次元の場合も四面体要素内の積分量を移流させ、補間式のパラメータ c を積分量を満たすように決定させる。

$$\iiint_V f(L) dV = m_e \quad (16)$$

四面体要素の積分は、体積座標の積分公式を用いて行われる。

$$\iiint_V L_1^i L_2^j L_3^k L_4^l dV = 6V \frac{i!j!k!l!}{(i+j+k+l+3)!} \quad (17)$$

公式を用いて3次元の場合のCIVA法の補間式を積分すると、以下ようになる。ここで、 L_1, L_2, L_3, L_4 は体積座標であり、 V は要素の体積である。

$$\begin{aligned} m_e &= \iiint_V f(L) dV \\ &= \frac{V}{4} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \\ &\quad + \left(\sum_{j,k=1, j \neq k}^4 \beta_{jk} \right) \left[\frac{V}{60} + c \frac{V}{60} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、上式を c について整理すると、パラメータ c が要素積分量 m_e を用いて次のように求められる。

$$c = \frac{60m_e - 15V(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)}{V \sum_{j,k=1, j \neq k}^4 \beta_{jk}} - 1 \quad (19)$$

要素積分量 m_e の移流計算は、要素の4平面を通過する積分量 Δm_e を数値積分により計算し、2次元の場合と同様に更新を行う。

$$\begin{aligned} \tilde{m}_e &= m_e + g_{123} \Delta m_e^{123} + g_{134} \Delta m_e^{134} \\ &\quad + g_{142} \Delta m_e^{142} + g_{243} \Delta m_e^{243} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 g_{abc} は平面a-b-c ($a-b-c=1-2-3, 1-3-4, 1-4-2, 2-4-3$)を通過する積分量の正負をあらわす記号で、各平面において積分量が四面体に流入する場合は $g_{abc} = 1$ とし、積分量が流出する場合は $g_{abc} = -1$ とする。

4. 保存型CIVA法の精度検証

本手法の妥当性および有効性を検討するため、数値解析例として平行移流問題を取り上げた。

計算に用いた格子は、図-4に示すような節点間隔が0.05の非構造格子のものである。5.25×1.5の領域に初期条件として図-5のような関数 $f = 1.0$ の領域を円形に配置し、x方向に移流させた。このとき、節点間隔と移流距離の比であるCFL数($= u\Delta t/\Delta x$)は0.33とした。

図-6、図-7に移流後(210ステップ後)の関数分布の等高線図を示す。なお、等高線間隔は0.08としている。また、図-5のa-b区間における移流後の関数分布の断面図を図-8に示す。そして、図-9に質量保存率の時刻歴を示す。図-6、図-7より、保存型のCIVA法では、周囲への拡散が少なく抑えられているとともに、初期形状を良く表現していることがわかる。また、図-8の断面図より、保存型CIVA法のもので従来のCIVA法に比べて関数の勾配を保っていることがわかる。通常のCIVA法では、周囲に拡散し、数値振動が広がっている様子がわかる。図-9の質量保存率の時刻歴から、保存型CIVA

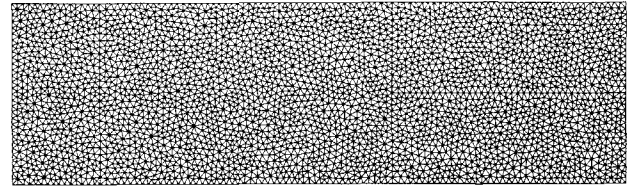


図-4 平行移流問題の計算格子

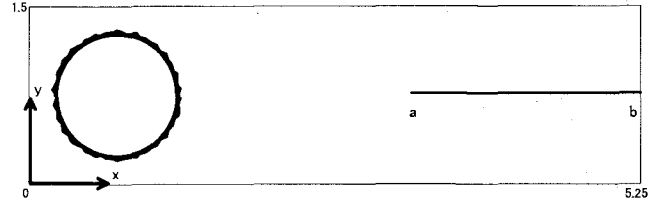


図-5 関数分布の初期条件

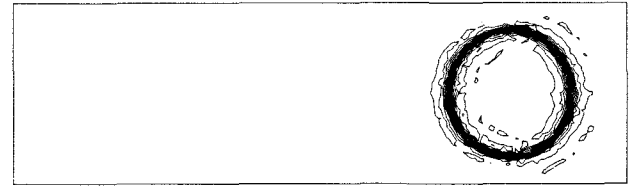


図-6 関数分布の等高線図(保存型CIVA)

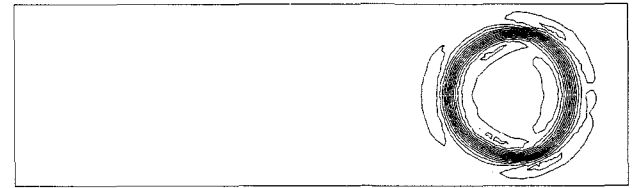


図-7 関数分布の等高線図(CIVA)

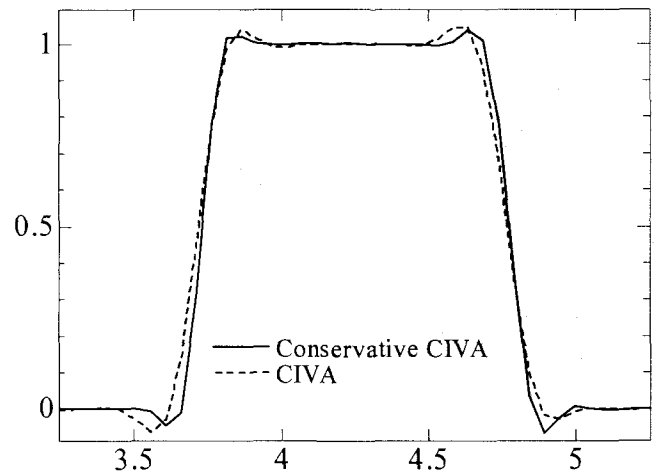


図-8 関数分布の断面図(210ステップ後)

法を用いた場合は初期の質量をほぼ完全に保っていて、従来のCIVA法の場合は質量が変動していることがわかる。しかしながら、数値振動の大きさについては従来のCIVA法と比べて大きくなっている部分もあり、数値振動を抑制する方法を導入する必要があるといえる。

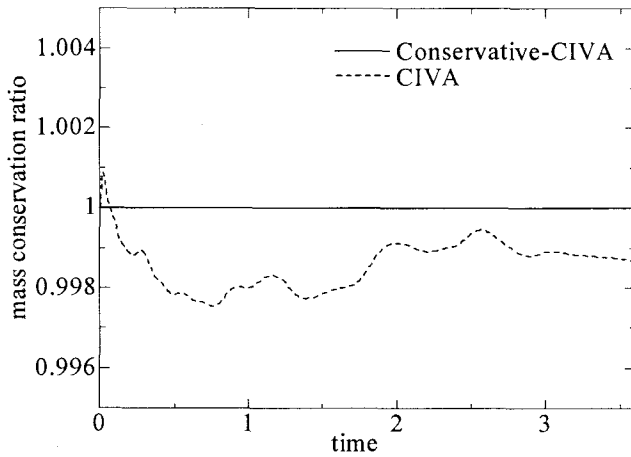


図-9 質量保存率の時刻歴

5. 格子ボルツマン法への応用

格子ボルツマン法は、仮想的な流体粒子を考え、その分布量をあらわす粒子分布関数の衝突、並進を計算して流体を解析する手法である。分子運動を記述するボルツマン方程式を有限個のベクトルで離散化し、粒子密度分布関数を変数として解析が行われる。

5.1 格子ボルツマン方程式

仮想粒子の運動は以下の離散ボルツマン方程式に従う。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{e}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} = \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (21)$$

左辺は粒子の並進過程を表しており、右辺の Ω は衝突演算項である。 f_i は粒子分布関数、 $\mathbf{e}_i$ は図-10であらわされる粒子の並進速度ベクトルであり、以下のようになる。

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_9] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

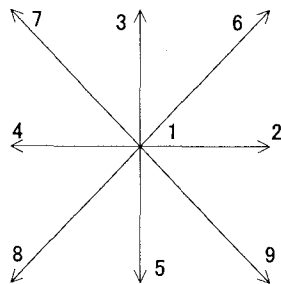


図-10 2次元9速度モデル

粒子密度分布関数とは、ある方向の速度を持つ粒子がどれぐらいの割合で存在しているかを実数で表した

関数である。衝突演算項 $\Omega(\mathbf{x}, t)$ は、格子BGKモデル¹⁸⁾では次のようにあらわされる。

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (23)$$

ここで、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、 $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ は、局所平衡分布関数と呼ばれる関数である。 τ は流体の動粘性係数によって決まる値であり、衝突項の時間進行を1次で行うと

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2}\Delta t \quad (24)$$

とあらわされる¹⁹⁾。ここで、 ν は動粘性係数である。

5.2 局所平衡分布関数

局所平衡分布とは、粒子が十分な時間の経過後に達する平衡状態の場合の粒子分布であり、巨視的な流体の流速、密度によって一意に決定される。本報告で用いた2次元9速度格子BGKモデルにおける局所平衡分布関数は、Maxwell分布²⁰⁾において流体の流速 $\mathbf{u}$ が小さいとして展開し $\mathbf{u}^2$ の項まで残したものであり、以下のように表される。

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right] \quad (25)$$

ここで、 ρ は流体の巨視的な密度、 $\mathbf{u}$ は流速をあらわしている。 w_i は格子ボルツマン方程式を漸近展開したときに流体力学方程式と一致するように決められる定数であり、静止粒子のとき4/9、水平、鉛直方向へ向かう粒子のとき1/9、対角線方向へ向かう粒子のとき1/36である。

5.3 流れの巨視的変数

格子ボルツマン法では、粒子分布関数を変数として解析が行われる。流体の密度、流速といった巨視的変数は質量保存および運動量保存の関係から、粒子分布関数と粒子の速度ベクトルを用いて以下のように計算される。

密度；

$$\rho = \sum_i f_i, \quad (26)$$

速度；

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i \mathbf{e}_i, \quad (27)$$

圧力；

$$p = c_s^2 \rho \quad (28)$$

ここで、 c_s は音速であり、このモデルでは $c_s = 1/\sqrt{3}$ と表される。圧力は密度の変化により表されることから、このモデルはわずかながら圧縮性を有するが、代表流速が音速 c_s より十分小さい場合には非圧縮流体とみなして取り扱うことができる。詳細は、文献⁷⁾⁻⁹⁾を参照されたい。

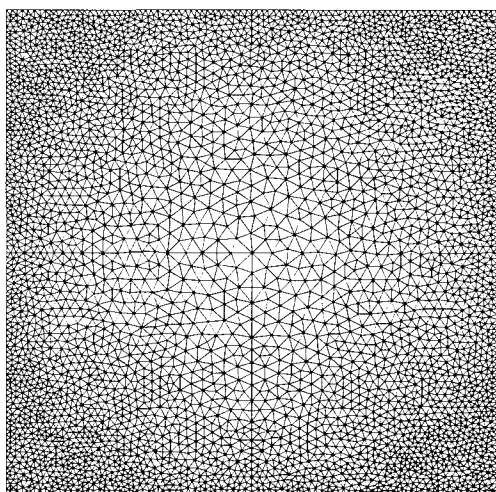


図-11 正方形キャビティ解析格子

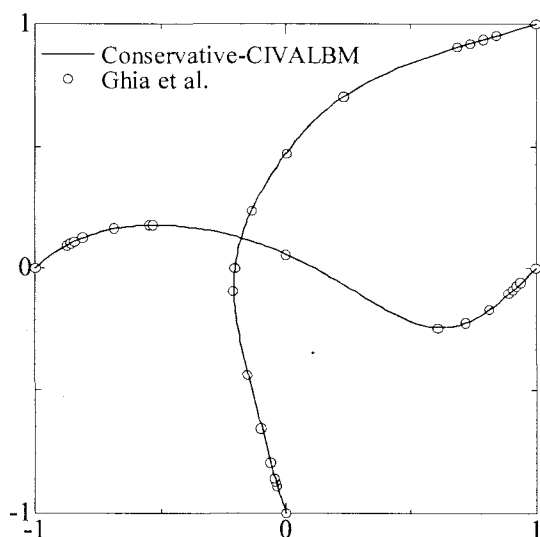


図-12 中心線上の流速分布, $Re = 100$

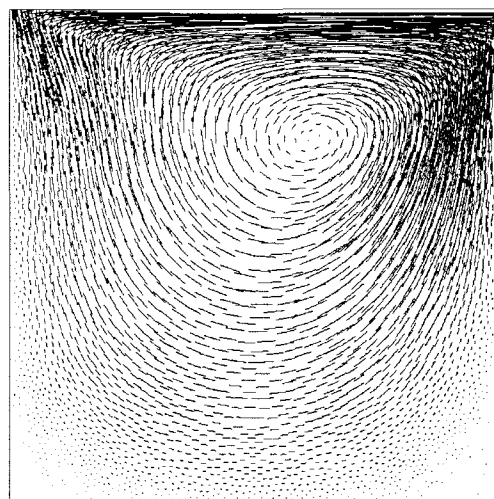


図-13 流速ベクトル図 (保存型 CIVALBM, $Re = 100$)

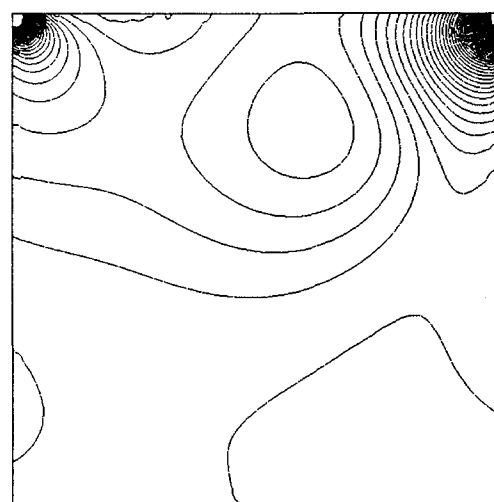


図-14 圧力分布図 (保存型 CIVALBM, $Re = 100$)

6. 保存型 CIVA を用いた格子ボルツマン法の計算例

保存型 CIVA-格子ボルツマン法の妥当性および有効性を検討するため、数値解析例として2次元正方形キャビティ内対流問題を取り上げ、本手法（保存型 CIVA-格子ボルツマン法）による解と参照解²¹⁾との比較を行った。 $Reynolds$ 数は100とし、図-11に示す節点数4306、要素数8258の非構造格子を用いた。粒子のCFL数が1を超えないようにするため、解析領域の一辺(代表長さ)を260に設定し、代表流速を0.1とした。このとき、 τ は1.28とした。壁面境界条件にはbounce-back条件を用い、移動壁面の境界条件にはZouらによる境界条件²²⁾を用いた。

図-12に $Re = 100$ の場合の中心線上の流速分布を示す。実線が本手法による数値解、○がGhiaらによる数値解である。本手法は参照解とよい一致を示している。図-13と図-14に、 $Reynolds$ 数100の場合の流速ベク

トル図、圧力分布図を示す。図より、保存型 CIVA 法を導入した格子ボルツマン法により非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析が高精度かつ安定に行えることが示された。しかしながら、 $Reynolds$ 数を上げた場合には、計算が不安定となり解を得ることができなかった。これは、保存型 CIVA 法の数値振動に起因するものと考えられるため、今後数値振動を防ぐ方法について検討する必要があるといえる。

7. おわりに

本論文では、非構造格子に基づく移流方程式の高精度解法としての保存型 CIVA 法の提案と、その格子ボルツマン法への応用について述べた。本手法の妥当性と有効性を検討するために、本手法を平行移流問題の解析に適用した。また、本手法を導入した格子ボルツマン法により正方形キャビティ内対流問題の解析を行い、以下の結論を得た。

- 積分量を移流させることで, CIVA 法の保存性を完全に満足させることができた.
- 従来の CIVA 法に比べ, 移流現象を高精度に再現可能であることがわかった.
- 保存型 CIVA 法を, 非構造メッシュに基づく格子ボルツマン法に適用し, 非圧縮性粘性流体の解析が高精度かつ安定に行えることを示した.

今後は, 保存型 CIVA 法の数値不安定性の改善, 保存型 CIVA-格子ボルツマン法の高 *Reynolds* 数流れへの適用, 複雑な流れ場や3次元の計算を行う予定である.

参考文献

- 1) Tanaka,N.: The CIVA method for mesh-free approaches: improvement of the CIP method for n-simplex, *Computational Fluid Dynamics JOURNAL*, 8, no.1, pp.121-127, 1999.
- 2) Yabe,T., Aoki,T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, 66, pp.219-232, 1991.
- 3) Tanaka,R., Nakamura,T., Yabe,T.: Constructing exactly conservative scheme in a non-conservative form, *Comput. Phys. Commun.*, 126, pp.232-243, 2000.
- 4) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論, **64-620B**, pp.1071-1078, 1998.
- 5) 桜庭雅明, 弘崎聡, 榎山和男: 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, pp.215-222, 2003.
- 6) 立石絢也, 榎山和男: CIVA-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析, 応用力学論文集, 土木学会, **7**, pp.323-329, 2004.
- 7) Succi,S.: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Oxford University Press, 2001.
- 8) Chen,S., and Doolen,G.D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, pp.329-364, 1998.
- 9) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, **77-2**, pp.197-232, 2001-11.
- 10) Swift,M.R., Osbone,W.R., and Yeomans,J.M.: Lattice Boltzmann simulation of nonideal fluids, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 5, pp.830-834, 1995.
- 11) He,X., and Doolen,G.D.: Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder *J.Compt.Phys.*, 134, pp.306-315, 1997.
- 12) He,X., Luo,L., and Dembo,M.: Some Progress in Lattice Boltzmann Method. Part I. Nonuniform Mesh Grids, *J. Comput. Phys.*, 129, pp.357-363, 1996.
- 13) Cao,N., Chen,S., Jin,S., and Martinez,D.: Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, 55, R21, 1997.
- 14) Lee,T., Lin,C.L.: A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation, *J. Comput. Phys.*, 171, pp.336-356, 2001.
- 15) Imamura,T.: Incompressible flow simulation using generalized interpolation-based lattice Boltzmann method, *Doctor thesis of Tokyo university*, 2003.
- 16) Nannelli,F., and Succi,S.: The Lattice Boltzmann Equation on Irregular Lattices, *J. Stat. Phys.*, 68, pp.401-407, 1992.
- 17) Tanaka,N.: Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations III. Analysis of accuracy and stability, *Int. J. Meth. Fluids*, 41, pp.675-694, 2003.
- 18) Qian,Y.H., D'Humieres,D., and Lallemand,P.: Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, *Europhys. Lett.*, 17(6), pp.479-484, 1992.
- 19) Lee,T., Lin,C.L.: An Eulerian description of the streaming process in the lattice Boltzmann equation, *J. Comput. Phys.*, 185, pp.445-471, 2003.
- 20) 曾根良夫, 青木一生: 分子気体力学: 朝倉書店, 1994.
- 21) Ghia,U., Ghia,K.N., and Shin,C.T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method, *J. Comput. Phys.*, 48, pp.387-411, 1982.
- 22) Zou,Q., He,X: On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, **9** (6), pp.1591-1598, 1997.

(2005 年 4 月 15 日 受付)