

不連続 Galerkin 有限被覆法の開発とその性能評価

Development of discontinuous Galerkin finite cover method and its evaluation

車谷麻緒*・寺田賢二郎**

Mao KURUMATANI and Kenjiro TERADA

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**正会員 Ph.D. 助教授 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

We develop an analysis method by the finite cover method (FCM) incorporated with the discontinuous Galerkin approximation for imposing displacement and traction compatibility conditions at material interfaces in heterogeneous solids. Treatment of the interface compatibility is a key ingredient for the FCM, which is regarded as one of the generalized versions of finite element method (FEM) since the FCM often employs a fixed regular mesh independently of physical domain. First, the FCM is formulated and then the discontinuous Galerkin approximation is introduced for imposing interface compatibility conditions. Secondly, after carrying out several numerical experiments to examine the approximation properties of the FCM at material interfaces in comparison with the standard FEM or the penalty-based FCM, we discuss the characteristics of the discontinuous Galerkin FCM in the analyses of multi-phase materials.

Key Words : *Finite cover method, Generalized elements, Discontinuous Galerkin approximation, Penalty method, Penalty parameter*

1. はじめに

1990 年代中頃、要素による束縛からの解放を目指して Element Free Galerkin 法¹⁾に代表される要素のない節点のみによる解析手法の開発が全盛期をむかえた。しかしながら、節点のみの近似には領域積分や境界条件の扱いが煩雑であるといったデメリットが多く、近年では再び要素の重要性が再認識されはじめた。特に、従来の有限要素法（以下、FEM）に対して、PU 条件 (Partition of Unity) に基づいて節点単位で近似の高度化を図る手法²⁾を導入した解析手法が注目を集めている。このような解析手法は、しばしば FEM の一般化あるいは一般化有限要素法と総称され、Manifold 法³⁾を前身とする有限被覆法 (Finite Cover Method, 以下 FCM)^{4)~9)}や X-FEM¹⁰⁾, GFEM¹¹⁾などはその代表である。これらの手法は、解析対象領域の幾何形状にとらわれることなく自由に近似部分領域である要素を構成することが可能であることから、しばしばメッシュ“フリー”法に分類され、先で述べた要素を必要としないメッシュ“レス”法と区別されることが多い¹²⁾。

一般化有限要素法のひとつである FCM では、PU 条件を満たす重み近似関数を定義する数学領域と解析対象領域である物理領域を独立に定義できることから、FEM でいうところの要素内に物理境界が位置することを許容している。この特徴に従えば、任意の解析対象領域を定型的な数学メッシュで覆う場合や異種材料界面が要素内を横切る場合には、要素内に部分的にしか物理領域を持たない特殊な要素が物理境界に配置されることになる。本研究ではこのような要素を「一般化要素」と呼ぶ^{7)~9)}。非均質材料および複合構造の解析においては、異種材料界面を含む一般化要素を通じて、変位や表面力の連続性を導入することが要求され、その界面処理技術の確立は重要な課題のひとつである。

FEM や FCM の枠組みにおける従来の界面接合法としては、ペナルティ法や Lagrange 未定乗数法が一般的であり、ペナルティ係数による感度や反復解法による計算効率および実装の煩雑化が難点であった^{6),13)}。これに対して、ディリクレ境界条件を近似的に満足させる Nitsche 法を内部境界の連続性の問題に拡張した Galerkin 近似が注目を集めている^{14),15)}。近年では、力学分野をはじめとする様々な問題への適用が行われ^{16)~18)}、一般に「不連続 Galerkin 法 (Discontinuous Galerkin method)」と総称されるようになった。この手法は、設定すべきパラメータの少なさにも関わらず高精度な近似を行うことができ、また反復解法を必要とせず比較的容易に実装可能である。また、従来のペナルティ法や Lagrange 未定乗数法と比較して、解析精度や計算効率の観点からその有用性が確認されている¹⁹⁾。

そこで本研究では、FCM による非均質材料や複合構造の解析において生成される異種材料界面を含む一般化要素に着目し、不連続 Galerkin 近似を導入することにより材料界面における変位や表面力の連続適合条件の完備を可能とする不連続 Galerkin 有限被覆法（以下、DG-FCM）を開発・提案する。以降、本論文ではまず FCM の概説・変位関数の設定および一般化要素の定義などを行い、不連続 Galerkin 近似を導入した DG-FCM の定式化を示す。そして、2 相材料の平面ひずみ問題を想定したいくつかの数値実験を実施して、他の従来法などとの比較を通して本研究で提案する DG-FCM の解析精度を下記の点について検証する。

- 材料界面における変位と表面力の連続性
- パラメータ設定と解析精度・計算効率との関係
- 変位の近似次数の違いによる影響

最後に、本論文で得られた DG-FCM に関する特徴や知見をまとめる。

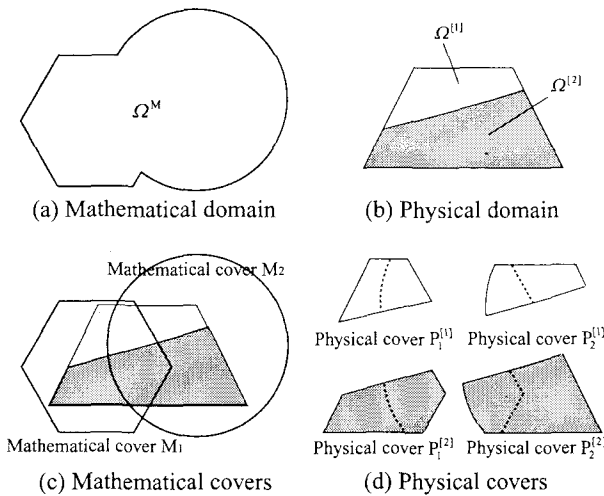


図-1 数学と物理の領域・被覆の定義

2. 不連続 Galerkin 有限被覆法

本節では、有限被覆法（以下、FCM）^{4)~9)}の近似の考え方と構成要素を概説したのち、不連続 Galerkin 近似^{14)~18)}を導入した不連続 Galerkin 有限被覆法（DG-FCM）を提案して、その特徴を整理する。

2.1 FCM の概説と一般化要素の定義

FEM では、解析対象を要素という部分領域に分割し、各々に対して節点値による補間近似を導入する。すなわち、要素という部分領域を単位に近似領域を作成し、要素ごとに得られた剛性方程式を要素の結合情報から全体系の連立代数方程式を組み立てるという方法論をとる。これに対して FCM では、解析対象と支配方程式の分割と再構築という点では FEM と同様であるが、図-1(a), (b) のように「近似関数が定義される数学的部分領域（数学領域）」と「支配方程式が満たされるべき物理的部分領域（物理領域）」を分離して考えるという点で FEM とは大きく異なる。これにより FCM では、物理領域とは独立に設定した空間固定の定型メッシュによる近似が可能となる。このような近似は GFEM¹¹⁾や X-FEM¹⁰⁾などの PU-FEM でも主張されているが、FCM では数学領域と物理領域を独立に定義する点で他の手法と一線を画する。

数学領域 Ω^M とは近似基底関数の定義域であり、解析対象である物理領域全体を覆い尽くすように設定され、図-1(c) のように「数学被覆」と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成されている。そして、物理領域全体は数学被覆と物理領域の共通領域である「物理被覆」と呼ばれる部分領域が重なり合うことで形成される。図-1(d) の例では、数学被覆 M_i と物理領域 $\Omega^{[a]}$ の共通領域 $P_i^{[a]}$ が物理被覆である。

一方、図-2 に示されるように、定型の数学被覆により解析領域全体が覆われていることを想定すると、同図中の部分領域 [I] は M_8, M_9, M_{13}, M_{14} の4つの数学被覆の共通領域である。このような数学被覆同士の共通領域を「数学要素」、これに伴う物理被覆同士の共

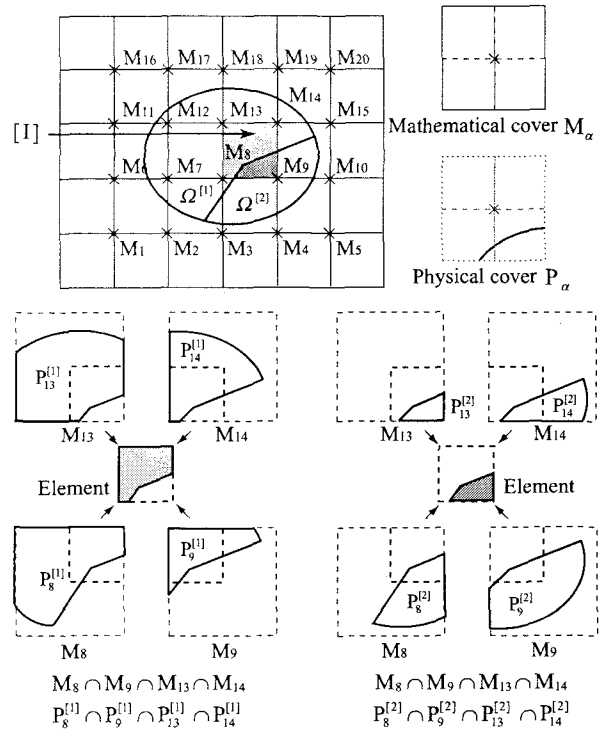


図-2 FCM における要素の生成過程

通領域を「物理要素」といい、これらが FEM でいうところの要素と対応する。また、数学被覆中心点が FEM の節点と対応する。

前述の定義に従えば、多相材料や複合構造の解析において定型の数学被覆を用いると、図-2 あるいは図-3 のように各材料ごとに物理被覆層が生成される。これは同時に、材料界面を要素内に含む特殊な物理要素の生成を意味し、境界面を通じて物理的連続条件が満足されなければならない。本研究では、このような要素内に物理境界が存在する特殊な要素を「一般化要素」^{7)~9)}と呼び、不連続 Galerkin 近似を用いてその連続条件を満足させる。

2.2 変位の有限被覆近似

FCM では、解析対象領域 Ω とは無関係に配置された数学被覆 M_I において、次のような「重み関数」が定義される。

$$\begin{cases} w_I(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{for } \mathbf{x} \in M_I \\ w_I(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } \mathbf{x} \notin M_I \end{cases} \quad (1)$$

この重み関数は、数学要素を構成する際に次の PU 条件²⁾を満足するように設定しなければならない。

$$\sum_{I=1}^{N_M} w_I(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{in } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

ここで、 N_M は数学被覆総数である。一方、変位などの物理量は物理被覆 $P_I^{[a]}$ ごとに次式のような「被覆関数」で近似する。

$$f_I^{[a]}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m p_i(\mathbf{x}) a_{iI}^{[a]} \quad \text{in } \mathbf{x} \in P_I^{[a]} \quad (3)$$

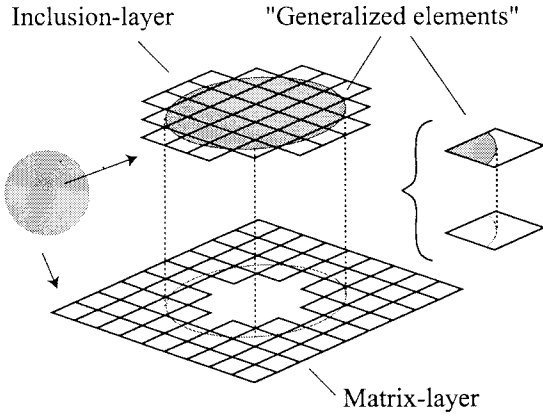


図-3 被覆層と一般化要素の定義

ここで、 $a_{il}^{[\alpha]}$ は定数係数の未知パラメータであり、 $p_i(\mathbf{x})$ は $p_0(\mathbf{x}) = 1$ であるような任意の関数である。また、添え字 α は構成材料の種類、すなわち物理領域の別を表している。FCM では、変位の近似を次式のように重み関数と被覆関数の積で表す。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_M} w_l(\mathbf{x}) \mathbf{f}_l^{[\alpha]}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$= \sum_{l=1}^{N_M} w_l(\mathbf{x}) \left(\mathbf{d}_l^{[\alpha]} + \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{il}^{[\alpha]} \right) \text{ in } \Omega \quad (5)$$

なお、上式の第2式は $\mathbf{a}_{0l}^{[\alpha]} = \mathbf{d}_l^{[\alpha]}$ と置き換えた。

以上のように、有限被覆近似においては被覆関数を適宜選定することで、精度の向上を図ることが可能である。本研究では、重み関数に C^0 -PU を満たす最も標準的な双一次四角形有限要素の形状関数を採用することとし、被覆関数については次の2通りを設定する。

- $m = 0$ として、被覆関数に定数関数を採用する。この場合、変位の有限被覆近似は双一次四角形有限要素と同等のものとなる。以降、このような被覆関数に定数関数を適用した低次の有限被覆近似を FCM_{Q4} と略すこととする。
- 被覆関数に次式および図-4に示されるような2次の関数を採用する^{9),20)}。

$$p_1(x) = x^2 - \bar{x}_l^2, \quad p_2(y) = y^2 - \bar{y}_l^2 \quad (6)$$

ここに、 $\bar{x}_l, \bar{y}_l$ は数学被覆中心点および数学要素の節点の座標である。以降、このような高次の有限被覆近似を FCM_{H0} と略すこととする。

PU 法^{2),3)}の範疇において高次化を行う FCM では、節点の位置・数は変化せず近似精度を向上させるために自由度のみが追加される。したがって、次数の変化によってモデル形状の変更や節点の追加によるメッシュ情報の変更を必要としないため、一度 CAD 等により解析対象モデルを作成しておけば、シームレスかつ高精度に解析を行うことが可能となる。なお、FCM は FEM の一般化手法と捉えることができるので、FCM における変位の補間やひずみ・応力の算出方法は、FEM における計算方法と同様である。

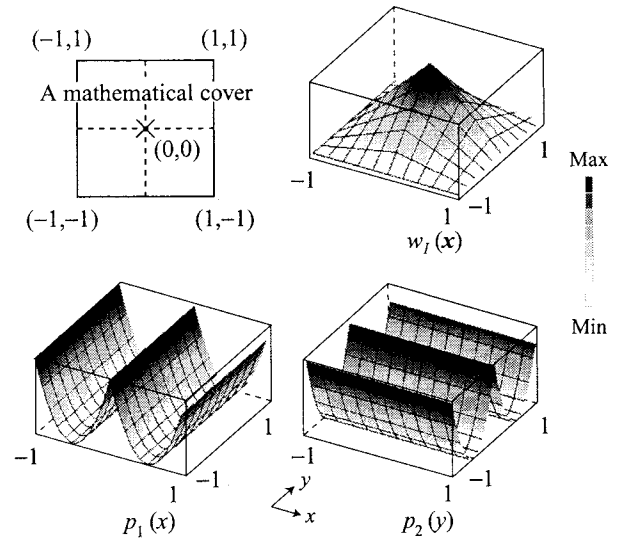


図-4 1 数学被覆における重み関数と被覆関数

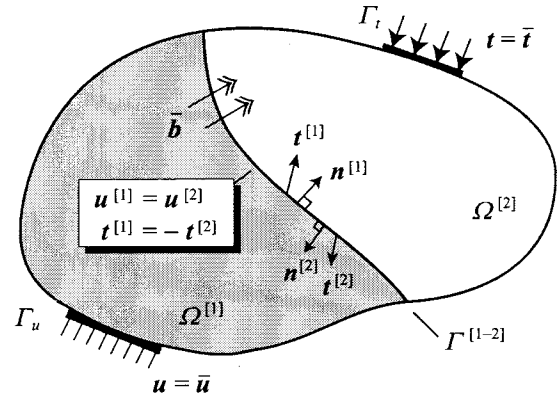


図-5 2つの弾性体からなる構造体

2.3 支配方程式

図-5に示されるような不連続面 $\Gamma^{[1-2]}$ によって、全体領域 Ω が $\Omega^{[1]}$ と $\Omega^{[2]}$ に分断されているものとする。

$$\Omega = \Omega^{[1]} \cup \Omega^{[2]} \quad (7)$$

また、領域 Ω を取り巻く全体境界 Γ を次のように定義する。

$$\Gamma = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_t} \text{ and } \Gamma_u \cap \Gamma_t \cap \Gamma^{[1-2]} = \emptyset \quad (8)$$

ここで、 Γ_u は変位が与えられるディリクレ境界、 Γ_t は表面力が与えられるノイマン境界である。

このような構造体に関する線形弾性体の静的つり合い問題を考えると、平衡方程式、ひずみの適合条件式、構成式はそれぞれ次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \} \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}$ はそれぞれ領域 Ω で定義される Cauchy 応力、微小ひずみ、変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{b}}$ は物体力を示し

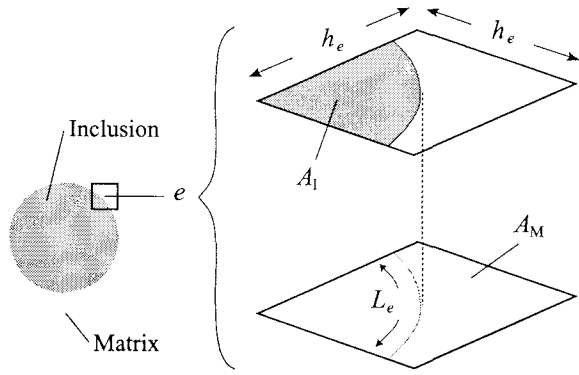


図-6 一般化要素における数学・物理のパラメータ

ており、これらのように添え字 [1], [2] のない変数は領域全体に渡り定義されるものとする。そして、次に示す変位境界での基本境界条件と、不連続面における連続適合条件については何らかの界面処理技術を導入して満足させる必要がある。

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (12)$$

$$\mathbf{t} := \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (13)$$

$$\mathbf{u}^{[1]} = \mathbf{u}^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (14)$$

$$\mathbf{t}^{[1]} = -\mathbf{t}^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{t}$ は外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ で規定される面における単位面積当たりの表面力、 Γ_* および $\Gamma^{[*]}$ はそれぞれ図-5に示される各境界である。

2.4 不連続 Galerkin 近似に基づく弱形式

本研究では、式 (12) の変位境界に対して通常の FEM に準じた方法論をとることとし、式 (14), (15) の材料界面について不連続 Galerkin 近似を導入する。不連続 Galerkin 近似では、境界 $\Gamma^{[1-2]}$ での変位の不連続性を扱う。はじめに、境界 $\Gamma^{[1-2]}$ における相対変位と平均変位を次のように定義しておく。

$$[\![\mathbf{u}]\!] := \mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]} \quad (16)$$

$$\{\mathbf{u}\} := \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{[1]} + \mathbf{u}^{[2]}) \quad (17)$$

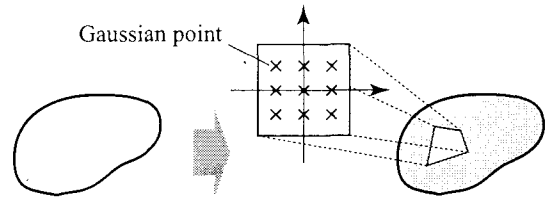
同様に、境界 $\Gamma^{[1-2]}$ での相対応力と平均応力を次のように定義する。

$$[\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})]\!] := \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[1]}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[2]}) \quad (18)$$

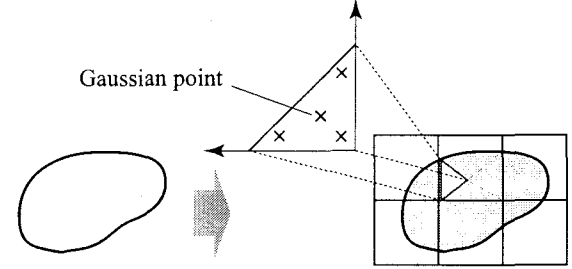
$$\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\} := \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[1]}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[2]})] \quad (19)$$

境界 $\Gamma^{[1-2]}$ での外向き法線ベクトルを $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^{[1]} = \mathbf{n}^{[2]}$ と定義し、 Ω で定義される $\delta \mathbf{u}$ を試験関数とする通常の弱形式に $\Gamma^{[1-2]}$ で定義される $\delta \mathbf{u}^{[1,2]}$ を試験関数とする表面力の連続性を導入する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma^{[1]}} \delta \mathbf{u}^{[1]} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[1]}) \cdot \mathbf{n}^{[1]} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma^{[2]}} \delta \mathbf{u}^{[2]} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[2]}) \cdot \mathbf{n}^{[2]} d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (20) \end{aligned}$$



(a) Numerical integration in FEM



(b) Numerical integration in FCM

図-7 FEM と FCM における数値積分法の相違

上式の境界 $\Gamma^{[1-2]}$ に関する項は、定義式 (16)~(19) および $[\![\boldsymbol{\sigma}]\!] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ の関係を用いて次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^{[1]}} \delta \mathbf{u}^{[1]} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^{[2]}} \delta \mathbf{u}^{[2]} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{[2]} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma^{[1-2]}} [\![\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}]\!] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma^{[1-2]}} ([\![\delta \mathbf{u}]\!] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\delta \mathbf{u}\} \cdot [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (21) \\ & = \int_{\Gamma^{[1-2]}} [\![\delta \mathbf{u}]\!] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (22) \end{aligned}$$

したがって、式 (20) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma^{[1-2]}} [\![\delta \mathbf{u}]\!] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (23) \end{aligned}$$

上式第 2 項は非対称であり、このままでは安定な求解を行うことができない^{[16]~[18]}。したがって、以下のように上式に対称な方程式となるよう修正項を追加するとともに、ペナルティ法における変位拘束項（ペナルティ行列）を加えたものを解くべき弱形式とする。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma^{[1-2]}} \frac{p}{h_e} \beta [\![\delta \mathbf{u}]\!] \cdot [\![\mathbf{u}]\!] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma^{[1-2]}} ([\![\delta \mathbf{u}]\!] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(\delta \mathbf{u})\} \cdot [\![\mathbf{u}]\!]) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (24) \end{aligned}$$

上式における p はペナルティ係数であり、平面問題を想定すると h_e は数学要素の長さである。また、 β は一般化要素の特性長さであり、これを導入する理由およびその選び方を次小節にてまとめる。

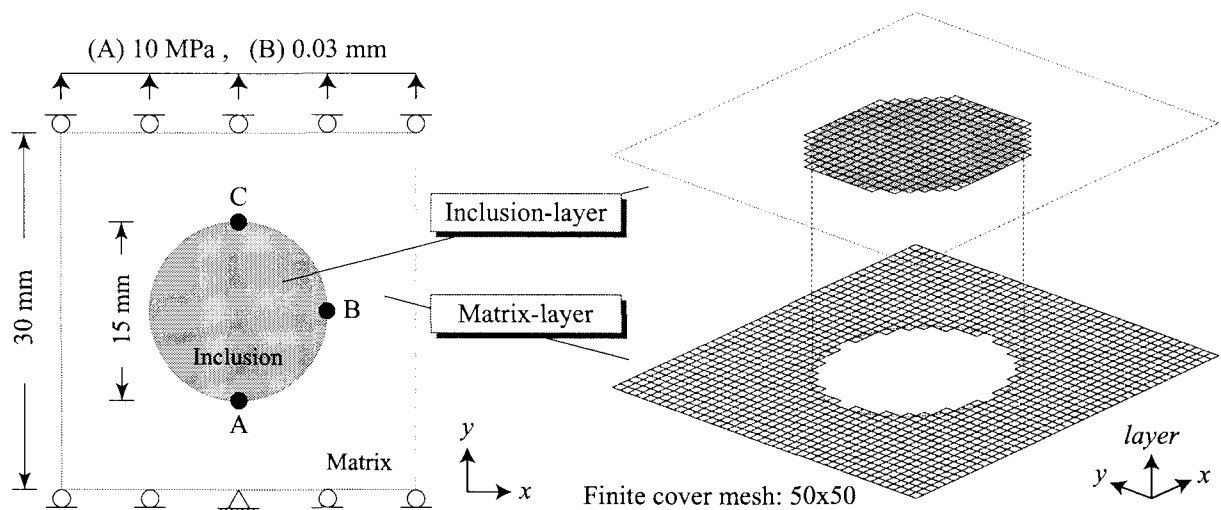


図-8 円形介在物を有する2相材料モデルとその有限被覆モデル

表-1 母材と介在物の材料パラメータ

(a)	Young's modulus	Poisson's ratio
Matrix	1.0×10^4 MPa	0.30
Inclusion	1.0×10^4 MPa	0.30
(b)	Young's modulus	Poisson's ratio
Matrix	1.0×10^4 MPa	0.30
Inclusion	1.0×10^5 MPa	0.30

上式は通常のペナルティ法による弱形式に表面力の連続性に関する項が新たに加わったものとなっている。また、Lagrange 未定乗数法とは異なり、独立変数は変位のみとなる。

2.5 ペナルティ係数

式 (24) において β を導入する理由についてまとめる。まず、ペナルティ法は剛性行列にペナルティ行列を加えることにより、特定の変位を拘束する手法である。通常、平面問題の FEM においては要素剛性行列の各成分の値は要素の大きさに依存しないことから、ペナルティ係数を p/h_e とすることによりペナルティ行列のオーダーを一定に調節することができる。一方、FCM における一般化要素では、要素剛性行列の各成分の値は積分領域である数学要素内の物理要素の大きさにより変化する。さらに、ペナルティ行列を計算する際の境界積分においても境界の長さに依存することになる。したがって、数学領域と物理領域を独立に捉える FCM においては、ペナルティ係数をまず p/h_e とすることにより数学領域に関するオーダーを調節することに加え、物理領域に関するオーダーを調節する必要がある。本研究では、これに対応するパラメータとして一般化要素の特性長さ β を導入する。この β の考え方に関しては別途議論が必要であろうが、本論文では図-6に示されるように、ペナルティ行列の算定が境界積分区間に依存することに着目し、要素 e 内の $\Gamma^{[1-2]}$ の長さ L_e

をパラメータにとり、これを数学要素の辺長 h_e で正規化することにより次式で表す。

$$\beta_a = \frac{L_e}{h_e} \quad (25)$$

2.6 数値積分法

一般に、四辺形要素を用いた2次元問題のFEMでは、剛性行列などの領域積分演算に対して自然座標に基づくガウス積分法を用いる(図-7(a)参照)。これに対し、FCMでは支配方程式を満足させる物理領域(物理要素)、すなわち積分領域は任意形状を許容しているため、FEMのように自然座標系のガウス積分法は適用できない。そのため、本研究では積分領域を三角形に分割し面積座標に基づくガウス積分法を適用する。具体的には、形状関数の最高次数が3次であり、多項式のみで構成されることから4点以上の三角形ガウス積分を適用する必要があるが、本研究では領域積分演算に対して、4点ガウス積分を適用する(図-7(b)参照)。

また、ペナルティ行列や分布外力の計算に関連する境界積分については、自然座標系における5点ガウス積分法を適用する。

3. 不連続 Galerkin 有限被覆法の検証例題

本節では、本研究で提案する不連続 Galerkin 有限被覆法(以下、DG-FCM)の解析精度および計算効率について、いくつかの数値実験を通して検討する。また、本研究ではDG-FCMの計算効率を検討するために、連立一次方程式の解法には直接法を使用せず、最も標準的な共役勾配法(以下、CG法)を適用している。

3.1 解析対象

本節全般を通じて、解析対象は図-8に示されるような正方形母材と円形介在物から構成される2相材料の平面ひずみ問題である。各材料パラメータは表-1に示される2パターンを用い、境界条件はy軸方向に一樣

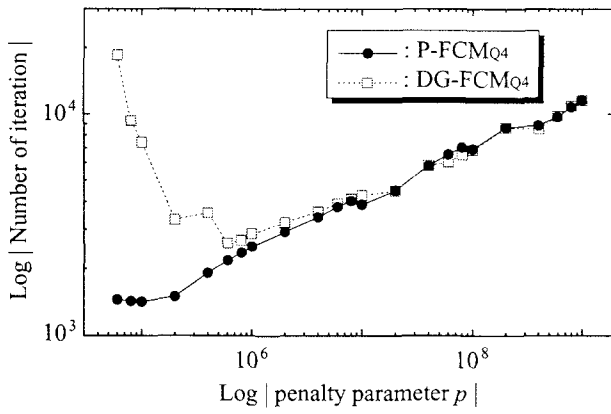


図-9 ペナルティ係数と CG の反復回数との関係

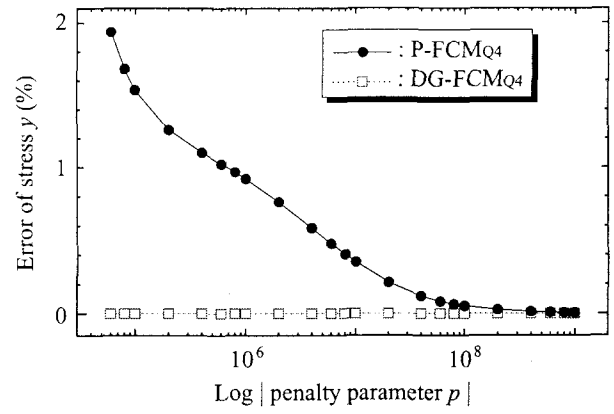


図-10 ペナルティ係数と y 方向応力の誤差との関係

な分布外力を与えるケースと強制変位を与えるケースの2通りを設定する。また、各材料相ごとに 50×50 の定型の有限被覆メッシュを設定する。

3.2 一軸変形のパッチテスト

(1) 解析条件

はじめに、均質体の一軸変形問題を設定し、最も基本的な DG-FCM の特性について調べる。解析対象は、図-8に示される2相材料モデルを用い、材料パラメータは表-1(a)を設定して母材と介在物を同一材料とし、境界条件は同図中(A)の分布外力 10 MPa を与える。すなわち、均質材料の一軸変形問題に対して、DG-FCM の基本的な解析精度およびペナルティ係数が解析結果や計算効率に与える影響について検討・考察する。数値実験を行うに当たり、使用する解析手法とパラメータについて以下にまとめる。

- P-FCM_{Q4}：ペナルティ法を適用した FCM_{Q4} の数値解を参照解として使用する。一般にペナルティ法におけるペナルティ係数はしばしば構成材料のヤング率の 10^5 倍程度に設定されるが、ここでは DG-FCM との比較に関連させた可変値 $p = 10^4 \sim 10^9$ を設定する。
- DG-FCM_{Q4}：ペナルティ係数を $p = 10^4 \sim 10^9$ と変化させた低次の DG-FCM である。

なお、一般化要素の特性長さについては β_a を適用する。

(2) 解析結果と考察

はじめに、DG-FCM の計算効率について検討・考察する。図-9にペナルティ係数と CG 法における反復回数との関係を示す。P-FCM_{Q4} では、ペナルティ係数の増加に伴い全体剛性行列の条件数が悪化することに起因して CG 法の反復回数が単調に増加している。これに対して、DG-FCM_{Q4} では P-FCM_{Q4} の場合とは異なり、下に凸な放物型の関係を示している。ペナルティ係数が構成材料のヤング率程度もしくはそれ以下であると、全体剛性行列の条件数の悪化により収束性が非常に悪くなっており、構成材料のヤング率の約 10^2 倍のペナルティ係数を与えた場合が最も収束性が良い。そして、それを超えるとペナルティ法とほぼ等価な関係が示されている。

次に、DG-FCM の解析精度について検討・考察する。本検討ケースにおいては、完全な一軸状態を模擬しているので厳密解として y 方向応力 $\sigma_0 = 10$ MPa が与えられる。図-10にペナルティ係数と y 方向応力の誤差との関係を示す。なお、図-10の誤差を算定するに際し、次式を用いた。

$$R_\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{pe}} (\sigma_0 - \sigma_y^i)^2}{\sum_{i=1}^{N_{pe}} (\sigma_0)^2}} \times 100 (\%) \quad (26)$$

ここで、 N_{pe} は物理要素の総数である。図-10に示されるように、P-FCM_{Q4} ではペナルティ係数の増加に伴い誤差が収束していくのに対して、DG-FCM_{Q4} ではペナルティ係数に関わらず厳密解である 10 MPa が常に得られている。特に、先の検討で P-FCM_{Q4} と同等の計算効率を得られていたペナルティ係数が大きな場合においても、係数依存により特異な結果を招くことなく正確な結果が得られている。これは、一般化要素に導入した不連続 Galerkin 近似がペナルティ法による近似とは根本的に異なることを示唆している。

以上の数値実験結果を総括すると、本研究で開発した DG-FCM は適切なペナルティ係数を選定することによって、大きなペナルティ係数を必要とする P-FCM より計算効率を向上させることができ、加えて良好な近似を行うことができる。また、本例題のように均質材料の問題においては、ペナルティ係数に依存しない解を得ることができる。

3.3 FCM_{Q4} による2相材料の数値実験

本小節では、低次の有限被覆近似である FCM_{Q4} を用いて、2相材料に対する DG-FCM の基本的な解析精度や計算効率について検討・考察する。

(1) 解析条件

本小節では図-8に示される2相材料モデルを対象に数値実験を行い、DG-FCM の解析精度や計算効率について検討・考察する。材料パラメータは表-1(b)に示されるものを使用し、境界条件は同図(B)に示されるように y 軸上方に変位制御で一樣な引張り力を与える。

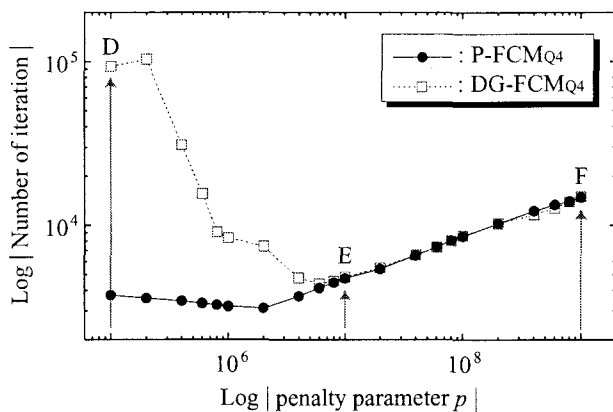


図-11 ペナルティ係数と CG の反復回数との関係

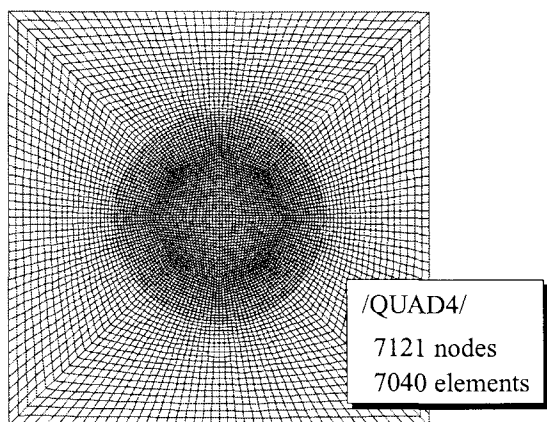


図-12 参照解に用いる有限要素モデル

図-11は、検討に先立って前小節の一軸変形問題と同様にペナルティ係数と CG 法における計算効率との関係について調べたものである。以降では、この結果を参照して解析条件を設定し、2 相材料問題に対する数値実験の結果に基づいて DG-FCM の検討を行う。

- FEM：有限要素解を参照解として使用する。図-12に示されるような十分に細かい 7040 要素に分割したアイソパラメトリック要素による有限要素モデルを用いる。
- P-FCM_{Q4}：ペナルティ法を適用した FCM の数値解を比較する。一般に、ペナルティ係数は構成材料のヤング率の 10^5 倍程度に設定されるが、本解析では母材ヤング率を参照して $p = 10^9$ とする。
- DG-FCM_{Q4}(1)：図-11の D 点に示されるペナルティ係数を構成材料の介在物のヤング率と同程度である $p = 10^5$ とする DG-FCM である。
- DG-FCM_{Q4}(2)：図-11の E 点に示されるペナルティ係数を構成材料の介在物のヤング率より 10^2 分オーダーの高い $p = 10^7$ とする DG-FCM である。
- DG-FCM_{Q4}(3)：図-11の F 点に示される P-FCM_{Q4} と同じペナルティ係数を用いた DG-FCM である。

(2) 解析結果と考察

はじめに、それぞれの設定条件に対して von-Mises 応力分布を比較したものを図-13に示す。これらの結果は、

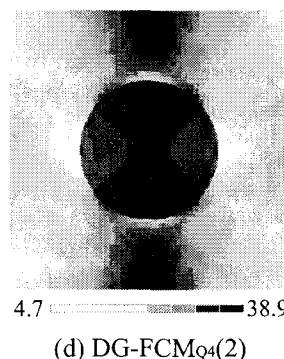
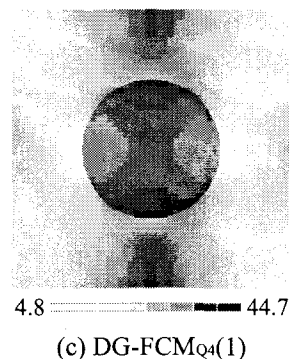
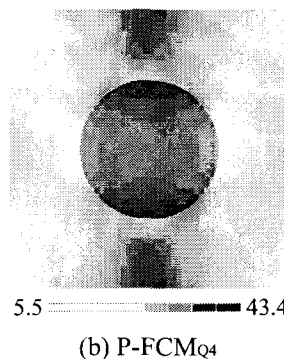
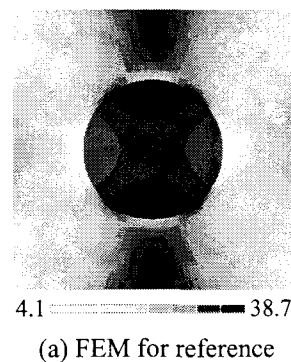


図-13 von-Mises 応力分布の比較 (MPa)

それぞれの応力値の最大値と最小値を凡例に採用した結果である。P-FCM_{Q4} では、FEM と比較して材料界面付近に高い応力分布が形成されており、界面での近似精度が不十分であることを示している。これは、ペナルティ法による定式化が表面力の連続性を考慮しないことと、ペナルティ係数が方程式の性質を悪化させる結果によるものと考えられる。一方、表面力の連続性を考慮している DG-FCM に関して、比較的計算効率が悪かった DG-FCM_{Q4}(1), (3) による結果は P-FCM_{Q4} のものと同様に材料界面における近似精度が不足しているようである。これに対して、良好な計算効率を示した DG-FCM_{Q4}(2) では先で確認された界面での近似精度の悪化は見られず、FEM の応力分布と比較しても遜色のない結果が得られている。

次に、より詳細な比較・検討を行うため、図-8に示される材料界面 ABC に沿った表面力の法線方向成分の分布を比較したものを図-14に、せん断方向成分の分布を比較したものを図-15に示す。なお、表面力の値は

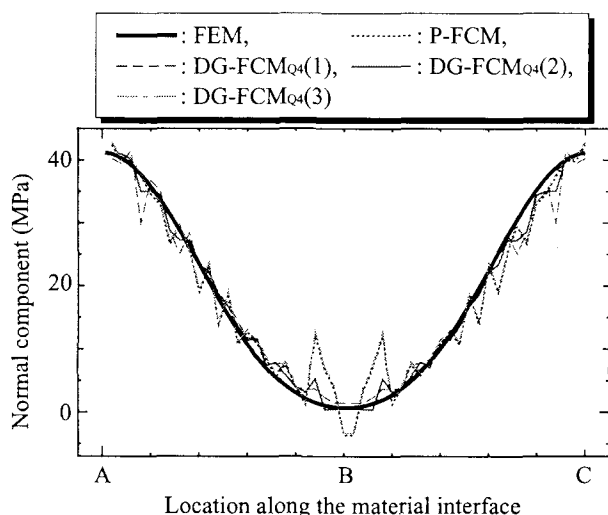


図-14 材料界面における表面力の法線方向成分の比較

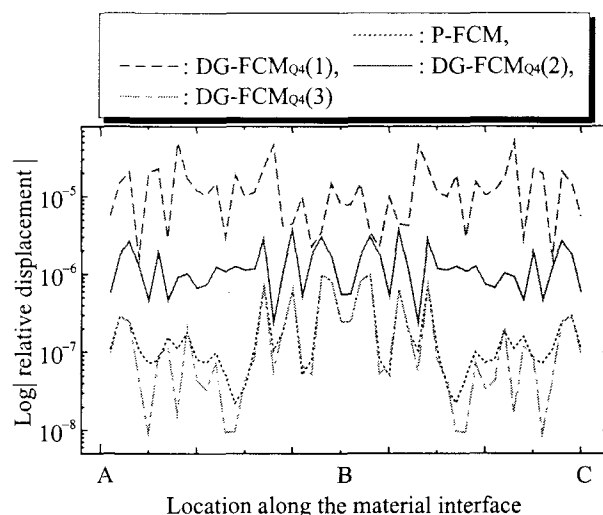


図-16 材料界面における相対変位ノルムの比較

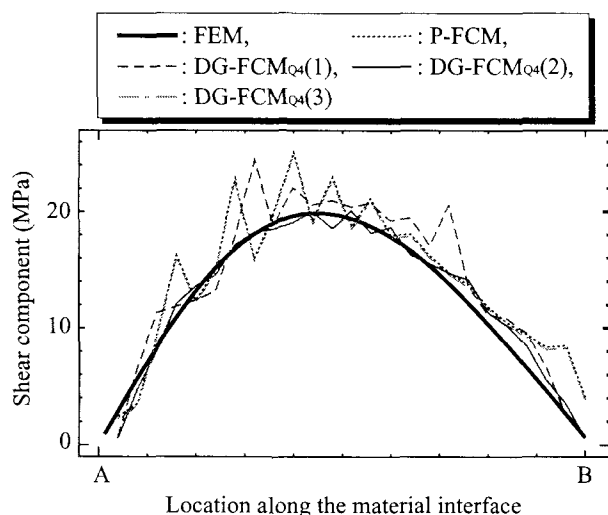


図-15 材料界面における表面力のせん断方向成分の比較

母材と介在物それぞれの平均値である。材料界面での表面力の分布について、von-Mises 応力分布に異常が見られた P-FCM_{Q4}、DG-FCM_{Q4}(1)、(3) では人為的な表面力の振動が表れており、応力分布が FEM のものと一番よく一致していた DG-FCM_{Q4}(2) が最も表面力の振動が低く抑えられていることが分かる。ここで、DG-FCM_{Q4}(2) においても、FEM と比較して振動が見られるのは、材料界面においてすべて対称に同一形状の要素で配置された FEM と場所により物理要素の大きさ・形状が異なる一般化要素の近似性能の違いによるもの、あるいは低次の有限被覆近似を用いているために生じる一種のロッキング現象であるとも考えられる。この点に関して、次小節にて高次の有限被覆近似を用いた際の DG-FCM について検討することとする。

最後に、材料界面に沿った相対変位ノルムを比較したものを図-16に示す。相対変位の分布に関しては、基本的にはペナルティ係数に依存した結果となっており、小さなペナルティ係数を設定している DG-FCM_{Q4}(1) が

最も低精度なものとなっている。しかしながら、同じペナルティ係数を設定した P-FCM_{Q4} と DG-FCM_{Q4}(3) は、表面力を比較した図-14と図-15では同一の結果を示していたが、相対変位は DG-FCM_{Q4}(3) の方が小さく求められている。これは、一般化要素の材料界面において、ペナルティ法による近似よりも不連続 Galerkin 近似の方が高精度であることを裏付けている。

以上の数値解析結果を総括すると、本研究で開発した DG-FCM は適切なペナルティ係数を選ぶことによって、ペナルティ法よりも変位および表面力の精度や計算効率を大幅に向上させることができる。ただし、界面において連結させる材料が異なる場合は、同じ材料の場合とは異なりペナルティ係数により解が変動することに注意が必要である。

3.4 FCM_{HO} による 2 相材料の数値実験

本小節では、高次の有限被覆近似を適用した際の DG-FCM の特徴について検討・考察する。また、FCM_{HO} を適用することにより、前小節の DG-FCM_{Q4} で見られた解の振動あるいはロッキング現象についても比較・検討する。

(1) 解析条件

解析対象やメッシュ分割、境界条件は前の例題とまったく同様であり、有限被覆近似の次数を高次にするだけである。また、本例題においては一般化要素の特性長さ β による検討も行うことにする。そこで、本研究では第 2 節で述べた β_a とは別に、ペナルティ行列の加算先である剛性行列のオーダーが物理要素の割合に依存することに着目し、図-6に示される要素 e 内の各物理要素の面積 A_M , A_I をパラメータにとる β_b を定義する。

$$\beta_b = \sqrt{\frac{A_M}{h_e^2} \times \frac{A_I}{h_e^2}} \quad (27)$$

したがって、本例題において新たに数値実験を行うケースは次の通りである。

- DG-FCM_{HO}(a) : 一般化要素の特性長さを β_a とし、

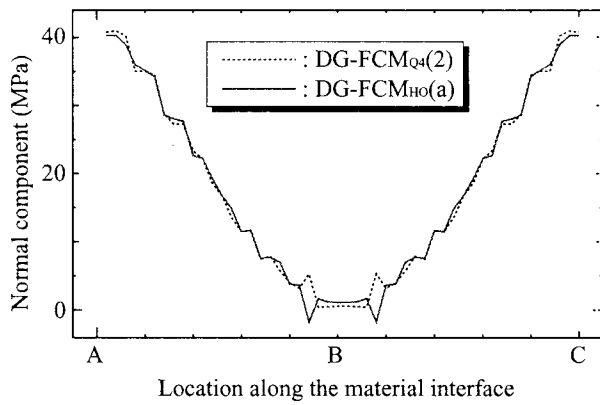


図-17 β_a を用いた際の表面力の法線方向成分

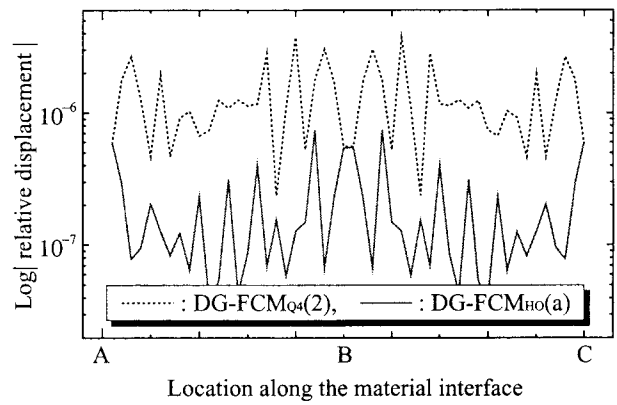


図-19 β_a を用いた際の相対変位ノルム

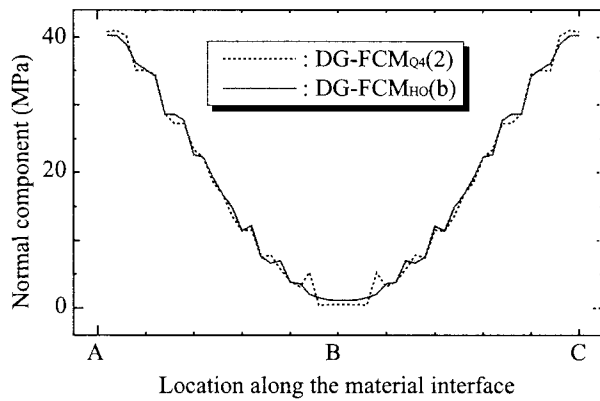


図-18 β_b を用いた際の表面力の法線方向成分

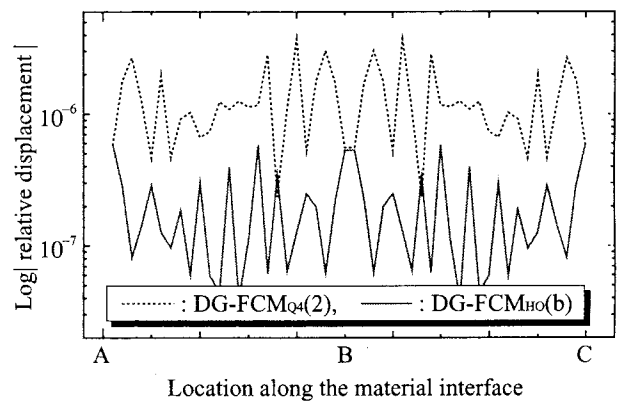


図-20 β_b を用いた際の相対変位ノルム

良好な計算効率が得られるペナルティ係数を選定した高次の有限被覆近似による DG-FCM.

- DG-FCM_{HO}(b) : 一般化要素の特性長さを β_b とし、良好な計算効率が得られるペナルティ係数を選定した高次の有限被覆近似による DG-FCM.

(2) 解析結果と考察

はじめに、材料界面に沿った表面力の法線方向成分の分布について、DG-FCM_{HO}(a) と前小節における DG-FCM_{Q4}(2) を比較した結果を図-17に示す。近似の高次化により要素の性能が向上し、低次のものより全体的には滑らかな関係が得られているものの、一部に特異な表面力の振動が見られる。これは、一般化要素内の物理要素の割合が他に比べて非常に小さい要素であり、部分的にペナルティ係数が不適切であったものと考えられる。特性長さ β_a を用いた場合、物理要素が極端に小さいとペナルティ係数の意味を成さない値が実際には与えられていると判断される。これに対して、特性長さを β_b とした際の表面力分布を表した図-18では、DG-FCM_{HO}(a) で見られた特異な結果は緩和されている。これは、特性長さ β_b が物理要素の面積の幾何平均をとるので、極端に小さな物理要素の影響が β_a に比べて弱まったものと判断される。

次に、DG-FCM_{HO}(a), (b) における相対変位ノルムの関係を図-19と図-20に示す。両図に示されるように、DG-FCM_{HO} の相対変位が小さくなっていることが確認

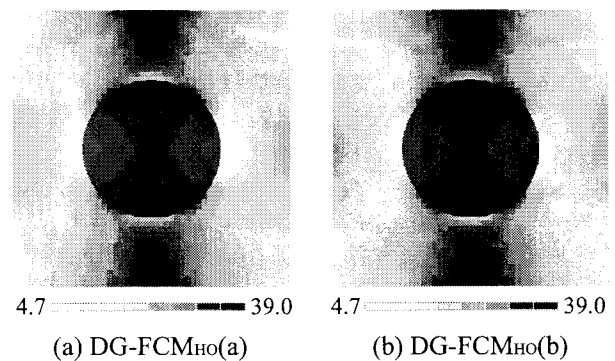


図-21 von-Mises 応力分布 (MPa)

でき、有限被覆近似の高度化により低次の場合と比較して、一般化要素における不連続 Galerkin 近似の精度が格段に向上している。これは、不連続 Galerkin 近似が変位近似の高度化と相性が良いことを示している。また、図-21は DG-FCM_{HO}(a), (b) における von-Mises 応力分布が先で示した図-13(a) の参照解によるものと同等であることを示している。このような有限被覆近似の次数による考察から、被覆関数を適宜調節することにより、例えば界面付近にのみ高次の被覆を設定すれば、より効率的な解析が期待できる。

4. おわりに

本研究では、FCMにおける材料界面を有する一般化要素の連続条件の付加に関して、不連続 Galerkin 近似を適用した不連続 Galerkin 有限被覆法（以下、DG-FCM）を開発・提案した。そして、DG-FCM の解析精度や計算効率に対するいくつかの数値実験を行い、パラメータの設定や近似関数の次数についての特徴を見出した。以下に、本論文を総括して DG-FCM の特徴と数値解析結果から得られた知見を簡単にまとめる。

- 不連続 Galerkin 近似における弱形式は、ペナルティ法の弱形式に表面力の連続性に関する項が加わったものとなっており、Lagrange 未定乗数法とは異なり、独立変数は変位のみであるので反復解法を必要としない。
- DG-FCM の計算効率は、ペナルティ係数の大きさによって左右され、計算時間を縦軸、ペナルティ係数の値を横軸にとったときに下に凸な放物型の関係がある。
- DG-FCM における接合対象が同一の材料である場合、ペナルティ係数に依存せず解を得ることができ、ペナルティ法による近似とは根本的に異なる。
- DG-FCM における接合対象が異なる材料である場合、計算効率が良好なペナルティ係数を選択することにより、高精度な近似が期待できる。
- 高次の有限被覆近似を適用した際には、低次の場合と比較して界面における応力がより滑らかに近似されると同時に、一般化要素における不連続 Galerkin 近似の精度が格段に向上する。
- ペナルティ係数に導入する一般化要素の特性長さは、有限要素には必要のないパラメータであり、一般化要素の不連続 Galerkin 近似における精度や計算効率に影響を与える。

また、今後の課題として、Lagrange 未定乗数法との解析精度の比較・検討や、一般化要素の特性長さを含めたペナルティ係数の設定方法について、より詳細な検討・議論が必要であることを挙げておく。

参考文献

- 1) Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. : Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.37, pp.229–256, 1994.
- 2) Babuška, I., Melenk, J.M. : The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.40, pp.727–758, 1997.
- 3) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report*, No.92–1, U.S. Army Research Office, 1991.
- 4) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉 : 被覆単位で精度をコントロールするマニフォールド法 (FCM) , 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.399–402, 1997.
- 5) Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method

for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.58, pp.1321–1346, 2003.

- 6) Kurumatani, M., Terada, K. : Finite cover method with mortar elements for elastoplasticity problems, *Computational Mechanics*, in press.
- 7) 車谷麻緒, 寺田賢二郎 : 有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究 : 日本計算工学会論文集, 論文番号 20030027, pp.127–136, 2003.
- 8) Terada, K., Kurumatani, M. : Performance assessment of generalized elements in the finite cover method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.41, pp.111–132, 2004.
- 9) 車谷麻緒, 寺田賢二郎 : 高次有限被覆近似に基づく一般化要素の近似性能に関する一考察, 土木学会論文集, 印刷中.
- 10) Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S. : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.56, pp.609–635, 2003.
- 11) Strouboulis, T., Babuška, I., Copps, K. : The design and analysis of the generalized finite element method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.181, pp.43–69, 2000.
- 12) 寺田賢二郎 : 有限要素法の一般化と有限被覆法, 計算工学, Vol.8, No.4, pp.5–9, 2003.
- 13) Simo, J.C., Laursen, T.A. : An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, Vol.42, pp.97–116, 1992.
- 14) Arnold, D.N. : An interior penalty finite element method with discontinuous elements, *SIAM J NUMER. ANAL.*, Vol.19, pp.742–760, 1982.
- 15) Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L.D. : Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J NUMER. ANAL.*, Vol.39, pp.1749–1779, 2002.
- 16) Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P. : A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modeling of failure, *Commun. Numer. Meth. Engng*, Vol.20, pp.511–519, 2004.
- 17) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sherwin, S.J., Peiró, J. : On discontinuous Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.58, pp.1119–1148, 2003.
- 18) Hansbo, P., Larson, M.G. : Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.191, pp.1895–1908, 2002.
- 19) Fernández-Méndez, S., Huerta, A. : Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.193, pp.1257–1275, 2004.
- 20) Taylor, R.L., Zienkiewicz, O.C., Oñate, E. : A hierarchical finite element method based on the partition of unity, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.152, pp.73–84, 1998.

(2005 年 4 月 15 日受付)