

Spline 選点法を用いた扇形 Mindlin 板の曲げおよび振動解析

Vibration and bending of annular sector Mindlin plates using spline collocation method

後藤大輔*, 水澤富作**

Daisuke GOTO and Tomisaku MIZUSAWA

*大同工業大学大学院 院生 建設工学専攻 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学工学部 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents bending and vibration analyses of annular sector Mindlin plates using a semi-analytical method combined spline collocation method with Levy method. No numerical integration is required in the formulation and the resulting matrix has the advantage of being narrow bandwidth. To demonstrate an accuracy and convergence of the present numerical method, some numerical examples are solved and the results are compared with those obtained by analytical method and other numerical methods. It is seen that good accuracy and stable convergence are obtained.

Key Words: spline collocation method, bending, vibration, Mindlin plate, semi-analytical method

1. まえがき

扇形板は、曲線スラブや曲線デッキなどの構造要素として用いられており、その曲げ特性や振動特性を知るとは、設計上重要な課題である¹⁾。横せん断変形や回転慣性などの影響を考慮した扇形厚板の振動問題は、Mindlin 板理論や 3 次元弾性理論に基づく Rayleigh-Ritz 法^{2)~4)}、スプライン要素法^{5)~10)}や有限要素法^{11),12)}などのエネルギー変分法を用いて解析されている。

一方、半径方向の 2 辺が単純支持された扇形 Mindlin 板の曲げと振動解析では、Levy 法とベッセル関数を適用した解析解が Kobayashi・Turvey¹³⁾や McGree ら¹⁴⁾により求められている。また、扇形 Mindlin 板の曲げおよび自由振動に関する支配方程式は、独立したたわみと 2 つの回転角を仮定した 3 元連立偏微分方程式で与えられ、Differential Quadrature 法 (DQ 法)、選点法¹⁵⁾や差分法を用いて直接数値的に解くことができる。

Liew・Liu¹⁶⁾は、DQ 法を用いて扇形 Mindlin 板の自由振動解析を行い、DQ 法の収束性や解析精度について検討を行っている。また、Liu・Liew¹⁷⁾は、DQ 要素法を用いてステップ状の変厚を有する扇形厚板の振動解析を行っている。水澤・近藤¹⁸⁾は、半解析的な DQ 法を定式化し、扇形 Mindlin 板の振動解析を行っている。

Lagrange 多項式から求める重み係数行列を用いた DQ 法の収束性と解析精度は、解析領域に設ける離散点

の取り方や境界条件の導入方法に依存する。また得られる係数行列は非対称な密行列を示し、離散点の数を 40 以上に増大させると、全体関数である Lagrange 多項式の次数が高くなるので、数値計算誤差に伴う不安定な収束性を示すことが報告されている¹⁶⁾。

最近、水澤・後藤¹⁹⁾は、DQ 法で定式化される非対称で密行列になる係数マトリックスを対称化するために、試験関数に区分的多項式である B-spline 関数を仮定した選点最小二乗法を用いて、Mindlin 板の振動解析を行っている。しかしながら、幅厚比 (B/h) が 50 を越えると、収束性が悪くなり、収束解が得られなくなるという問題が見られた。

したがって、離散点の配置に依存せず、また離散点の数の増大に対しても安定した収束性と解析精度が得られる数値解析法の開発が、構造解析上重要な課題と思われる。

本論文では、円周方向に固有関数を Levy 級数展開し、半径方向に spline 選点法を適用した半解析的な数値解析法を定式化し、また半径方向の 2 辺が単純支持され、他の 2 つの円弧辺が任意の境界条件を持つ扇形 Mindlin 板の曲げおよび振動解析への適用について検討を行っている。本手法の収束性や精度に与える選点の数などの影響について検討を行い、また扇形厚板の曲げおよび振動特性に与える幅厚比 B/h 、半径比 R_o/R_i や中心角 ϕ などの影響について明らかにしている。

2. 選点法による定式化

ここでは、3 元連立偏微分方程式で与えられる扇形 Mindlin 板の支配方程式を数値的に解くために、固有関数の直交性と重みつき残差法を適用した半解析的な spline 選点法の定式化について示す。

2.1 spline 選点法

ここでは、B-spline 関数を基底関数に仮定した選点法の定式化を示す。ただし、B-spline 関数で仮定した変位関数は、境界条件と支配方程式を共に満たさない任意の関数であるので、以下に示すように、内部残差と境界残差を考える必要がある。

r を変数にもつ 3 元連立の線形境界値問題を記述する支配方程式と境界条件は、微分演算子 L, B を用いて、それぞれ次式で表される。

$$L(w, \varphi_r, \varphi_\theta) = q(r) \quad \text{領域} [R_i \leq r \leq R_o] \quad (1)$$

$$B(w, \varphi_r, \varphi_\theta) = g(r) \quad \text{境界} (r = R_i, r = R_o) \quad (2)$$

ここで、 $w, \varphi_r, \varphi_\theta$ は、それぞれ独立した変位関数であり、

また $q(r), g(r)$ は、与えられた関数である。したがって、

領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w, \varphi_r, \varphi_\theta) - q(r) \quad (3)$$

$$R_B = B(w, \varphi_r, \varphi_\theta) - g(r) \quad (4)$$

これらの残差を領域内の選点 (N_r 個) と各境界点に導入される境界条件の総数 (M 個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(r_i) = L(w_i, \varphi_{r,i}, \varphi_{\theta,i}) - q(r_i); i = 1, 2, \dots, 3N_r \quad (5)$$

$$R_B(r_{3N_r+j}) = B(w_{3N_r+j}, \varphi_{r,3N_r+j}, \varphi_{\theta,3N_r+j}) - g(r_{3N_r+j}) \quad (6)$$

$$; j = 1, 2, \dots, M$$

独立した 3 つの変位関数 $w, \varphi_r, \varphi_\theta$ は、B-spline 関数を用いて、それぞれ次式で仮定する。

$$\varphi_r = \sum_{m=1}^{i_r} A_m N_{m,k}(r), \quad \varphi_\theta = \sum_{m=1}^{i_r} B_m N_{m,k}(r), \quad (7)$$

$$w = \sum_{m=1}^{i_r} C_m N_{m,k}(r); i_r = N_r + k - 2$$

ここで、 $N_{m,k}(r)$ は、正規化された B-spline 関数であり、 N_r と $k-1$ は、それぞれ区分点の数と spline 次数

である。また、 A_m, B_m, C_m は、それぞれ未定係数である。

したがって、式(7)を式(5)、(6)に代入して選点法を用いれば、次式の代数方程式が得られる。

$$\{R\} = \{R_L\} + \{R_B\} = [Z]\{\Delta\} - \{P\} = 0 \quad (8)$$

上式の係数マトリックス $[Z]$ は、 $k-1$ を 3 次に仮定すると $3i_r \times (3N_r + M)$ の正方行列になる。また、未定係数ベクトルは、

$$\{\Delta\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_{i_r}, B_1, B_2, \dots, B_{i_r}, C_1, C_2, \dots, C_{i_r}\}$$

である。

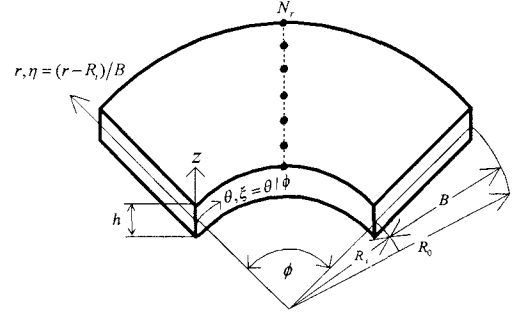


図-1 扇形 Mindlin 板と座標系

2.2 扇形 Mindlin 板の支配方程式

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では²⁰⁾、任意の点 (θ, r, z) の変位は、それぞれ独立した 3 つの変位関数を用いて、次式で仮定される。また、 z は中央面からの厚さ方向の座標値である。

$$\begin{aligned} u_r &= z \varphi_r(\theta, r) \times e^{i\alpha x} \\ u_\theta &= z \varphi_\theta(\theta, r) \times e^{i\alpha x} \\ w &= w(\theta, r) \times e^{i\alpha x} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 u_r, u_θ, w は、それぞれ r, θ と z 方向の変位であり、また φ_r と φ_θ は、それぞれ θ 軸と r 軸回りの回転角であり、 w はたわみであり、 ω は円振動数である。

図-1 に示すような一様厚さで、等分布荷重 q を受ける等方性な扇形 Mindlin 板の運動方程式は、次式のように 3 元連立偏微分方程式で与えられる¹⁸⁾。

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) - Q_r = \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} - Q_\theta = \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q \quad (10c)$$

ここで、曲げモーメント、ねじりモーメントとせん断力は、

$$M_r = D \left[\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left(\varphi_r + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \quad (11a)$$

$$M_\theta = D \left[\frac{1}{r} \left(\varphi_r + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right] \quad (11b)$$

$$M_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} - \varphi_\theta \right) + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right] \quad (11c)$$

$$Q_r = \kappa G h \left(\varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (11d)$$

$$Q_\theta = \kappa G h \left(\varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (11e)$$

で表される。ただし、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 ρ は密度、 ν はポアソン比、 h は板厚、 κ はせん断修正係数である。また、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。

式の定式化には、次の無次元極座標系を用いる。

$$\xi = \theta/\phi, \quad \eta = (r - Ri)/B \quad (12)$$

ここで、 $B = Ri(\lambda - 1)$ は扇形板の幅、 $\lambda = Ro/Ri$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また Ri と Ro は、それぞれ扇形板の内径と外径を示す。

次に、扇形板の自由振動は調和振動するので、無次元極座標系で式(10a) - (10c)を書き換えれば、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2 \phi} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R \phi} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \varphi_\theta \\ & + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2 \phi^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \xi^2} \\ & - \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\varphi_\theta + \frac{h}{B R \phi} \frac{\partial W'}{\partial \xi} \right) + \frac{\rho h^3 B^2}{12 D} \omega^2 \varphi_\theta = 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} - \frac{3-\nu}{2 R^2 \phi} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \xi} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R \phi} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \eta \partial \xi} \\ & + \frac{1-\nu}{2 R^2 \phi^2} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R^2} \varphi_r - \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\varphi_r + \frac{h}{B} \frac{\partial W'}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} \varphi_r = 0 \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G B^4}{D h} \left(\frac{h}{B} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} + \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 W'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R \phi} \frac{h}{B} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \xi} \right. \\ & + \frac{1}{R^2 \phi^2} \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 W'}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R B} \varphi_r + \frac{1}{R} \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial W'}{\partial \eta} \Big) \\ & + \frac{\rho h \omega^2 B^4}{D} W' + \frac{q B^4}{D h} = 0 \end{aligned} \quad (13c)$$

ここで、 $W' = w/h$, $R = (\eta + 1)/(\lambda - 1)$ 、また ω は円振動数である。

半径方向の2つの直線辺が単純支持($W' = 0$, $\varphi_r = 0$, $M_\theta = 0$)された扇形 Mindlin 板では、円周方向に固有

関数を Levy 級数展開すると、変位関数は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \sum \sum A_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m \pi \xi \\ &= [N] \{A\} \sin m \pi \xi \\ \varphi_\theta &= \sum \sum B_{mn} N_{n,k}(\eta) \cos m \pi \xi \\ &= [N] \{B\} \cos m \pi \xi \\ W' &= \sum \sum C_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m \pi \xi \\ &= [N] \{C\} \sin m \pi \xi \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i,k}(\eta)]$,

$$\{A\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_i\}, \{B\}^T = \{B_1, B_2, \dots, B_i\},$$

$$\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_i\}, i_r = N_r + k - 2$$

であり、 N_r は r 軸方向に配置される選点の数である。また、 m は、 r 方向に Levy 級数展開される固有関数の級数項である。

したがって、式(14)を式(13a) - 式(13c)へ代入すると、次式に示す3元連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{2} \frac{m \pi}{R^2 \phi} [N^{(0)}] \{A\} + \frac{1+\nu}{2} \frac{m \pi}{R \phi} [N^{(1)}] \{A\} - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} [N^{(0)}] \{B\} \\ & + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R} [N^{(1)}] \{B\} + \frac{1-\nu}{2} [N^{(2)}] \{B\} - \frac{m \pi^2}{R^2 \phi^2} [N^{(0)}] \{B\} \\ & - \frac{\kappa G h B^2}{D} \left([N^{(0)}] \{B\} + \frac{h}{B} \frac{m \pi}{R \phi} [N^{(0)}] \{C\} \right) + \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} [N^{(0)}] \{B\} = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} & [N^{(0)}] \{A\} + \frac{1}{R} [N^{(1)}] \{A\} + \frac{3-\nu}{2} \frac{m \pi}{R^2 \phi} [N^{(0)}] \{B\} \\ & - \frac{1+\nu}{2} \frac{m \pi}{R \phi} [N^{(1)}] \{B\} - \frac{1-\nu}{2} \frac{m \pi^2}{R^2 \phi^2} [N^{(0)}] \{A\} - \frac{1}{R^2} [N^{(0)}] \{A\} \\ & - \frac{\kappa G h B^2}{D} \left([N^{(0)}] \{A\} + \frac{h}{B} [N^{(1)}] \{C\} \right) + \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} [N^{(0)}] \{A\} = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G B^4}{D h} \left\{ \frac{h}{B} [N^{(0)}] \{A\} + \left(\frac{h}{B} \right)^2 [N^{(2)}] \{C\} - \frac{h}{B} \frac{m \pi}{R \phi} [N^{(0)}] \{B\} \right. \\ & - \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{m \pi^2}{R^2 \phi^2} [N^{(0)}] \{C\} + \frac{h}{B} \frac{1}{R} [N^{(0)}] \{A\} \\ & + \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{1}{R} [N^{(1)}] \{C\} \Big\} + \frac{\rho h^3 \omega^2 B^4}{D} [N^{(0)}] \{C\} + \frac{q B^4}{D h} = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

ここで、 $[N^{(i)}(\eta)] = d^{(i)} N_{n,k}(\eta)/d\eta^{(i)}$ である。ただし、 i は導関数の次数を示す。また、 q は $4q/m\pi$ で与えられる。

先に述べたように、 η 軸に平行な2辺は単純支持を仮定しているが、 ξ 軸に平行な他の2辺の円弧辺での境界条件は、以下に示すように独立した3つの条件式で定義される。

$\eta = 0$ の辺での境界条件式は、以下のようになる。

(a) 固定辺 (C)

$$W' = 0, \varphi_\theta = 0, \varphi_r = 0 \quad (16a)$$

(b) 単純支持 (S)

$$W' = 0, \varphi_\theta = 0, M_r = 0 \quad (16b)$$

(c) 自由辺 (F)

$$M_r = 0, M_{r\theta} = 0, Q_r = 0 \quad (16c)$$

したがって、式(14)を式(16a) - (16c)に代入すれば、 $\eta = 0$ では、それぞれ次式で表される。

(a) 固定辺 (C)

$$[N^{(0)}]\{C\} = 0, [N^{(0)}]\{B\} = 0, [N^{(0)}]\{A\} = 0 \quad (17a)$$

(b) 単純支持 (S)

$$[N^{(0)}]\{C\} = 0, [N^{(0)}]\{B\} = 0, \frac{D}{B} \left[[N^{(1)}]\{A\} + \frac{\nu}{\eta + \frac{1}{\lambda - 1}} \left([N^{(0)}]\{A\} - \frac{1}{\phi} [N^{(0)}]\{B\} \right) \right] = 0 \quad (17b)$$

(c) 自由辺 (F)

$$\frac{D}{B} \left[[N^{(1)}]\{A\} + \frac{\nu}{\eta + \frac{1}{\lambda - 1}} \left([N^{(0)}]\{A\} - \frac{1}{\phi} [N^{(0)}]\{B\} \right) \right] = 0, \frac{1 - \nu}{2} \frac{D}{B} \left[\frac{1}{\eta + \frac{1}{\lambda - 1}} \left(\frac{1}{\phi} [N^{(0)}]\{A\} - [N^{(0)}]\{B\} \right) + [N^{(1)}]\{B\} \right] = 0, \kappa G h \left([N^{(0)}]\{A\} + \frac{h}{B} [N^{(1)}]\{C\} \right) = 0 \quad (17c)$$

同様に、 $\eta = 1$ についても定式化できる。

したがって、領域内の各選点で式(15a), (15b), (15c)から内部残差が求められ、また2つの円弧辺の境界条件を表す式(17a), (17b), (17c)から、境界残差が導かれるので、残差Rから、選点法を用いれば、次式の代数方程式が求められる。

$$\{R\} = \{R_L\} + \{R_B\} = [Z]\{\Delta\} - n^* [M]\{\Delta\} + \{P\} = 0 \quad (18)$$

ただし、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h / D}$ は振動数パラメータ、 $\{P\}$ は荷重ベクトルであり、また $[Z]$, $[M]$ はそれぞれ係数行列と質量マトリックスであり、非対称行列になる。したがって、式(18)で、質量マトリックス $[M]$ をはずせば、曲げ問題になり、また荷重ベクトル $\{P\}$ をはずせば、固有値問題になるので、固有値計算を行なえば、振動数と固有ベクトルが求められる。

3. 数値計算例および考察

3.1 扇形 Mindlin 板の曲げ解析

ここでは、2つの半径方向の直線辺が単純支持され、

他の2つの円弧辺が任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の曲げ解析への spline 選点法の適用について示す。また、扇形 Mindlin 板のたわみおよび断面力に与える幅厚比、半径比や中心角などの影響について示す。なお、相対する他の2つの円弧辺の境界条件はC-Fのように表し、それぞれ2辺($\eta=0, 1$)が固定辺(C)と自由辺(F)に相当している。

以下の数値計算例では、spline 次数k-1は3次に固定し、ポアソン比 ν は0.3、せん断修正係数 κ は5/6に仮定している。また、選点は解析領域で等間隔に配置する。

表-1には、等分布荷重を満載する扇形 Mindlin 板のたわみおよび断面力の収束性と精度比較が示してある。ここで、相対する2つの円弧辺を固定とし、中心角 $\phi=60^\circ$ 、半径比 $R_o/R_i=2$ に仮定している。また、幅厚比 B/h を5, 10, 50, 100, 選点の数 N_r を11から501まで変化させ、比較のために Kobayashi・Turvey による解析解¹³⁾も示してある。

これより、たわみおよび断面力ともに選点の数 N_r を増大させると、一定値への安定した収束性が得られており、また Kobayashi・Turvey による解析解¹³⁾と比較すると、誤差1%以内の精度が得られている。しかし、比較的薄い板になると収束状態が非常にゆっくりになるので、選点の数を高める必要がある。

表-1 扇形 Mindlin 板のたわみと断面力の収束性と精度比較：C-C, $\phi=60^\circ, R_o/R_i=2$

B/h	Nr	$\xi=0.5, \eta=0.5$			$\xi=0, \eta=0$	$\xi=0.5, \eta=0$
		W	Mt	Mr	Mtr	Gr
5	11	3.766	1.919	3.940	-2.252	5.869
	51	3.966	2.041	4.136	-2.116	6.359
	101	3.972	2.045	4.142	-2.111	6.375
	151	3.973	2.046	4.144	-2.110	6.378
	201	3.974	2.046	4.144	-2.109	6.380
	251	3.974	2.046	4.144	-2.109	6.380
	Exact ¹³⁾	3.974	2.047	4.145	-2.109	6.381
10	11	2.331	1.405	3.322	-1.415	4.758
	51	2.868	1.806	4.071	-1.264	6.504
	101	2.889	1.822	4.099	-1.256	6.578
	151	2.892	1.824	4.105	-1.254	6.592
	201	2.894	1.825	4.107	-1.253	6.597
	251	2.894	1.826	4.107	-1.253	6.599
	Exact ¹³⁾	2.896	1.827	4.109	-1.252	6.603
50	11	0.321	0.129	0.504	-0.266	0.520
	51	2.031	1.343	3.281	-0.322	4.750
	101	2.390	1.633	3.854	-0.304	6.080
	151	2.470	1.698	3.981	-0.298	6.405
	201	2.499	1.721	4.027	-0.296	6.525
	251	2.513	1.732	4.049	-0.295	6.580
	Exact ¹³⁾	2.538	1.753	4.088	-0.293	6.686
100	11	0.086	0.039	0.137	-0.102	0.140
	51	1.247	0.734	2.017	-0.166	2.470
	101	2.021	1.341	3.280	-0.164	4.750
	151	2.275	1.546	3.688	-0.158	5.680
	201	2.379	1.630	3.853	-0.155	6.090
	251	2.430	1.672	3.935	-0.153	6.290
	301	2.459	1.695	3.980	-0.152	6.410
	351	2.476	1.710	4.008	-0.151	6.490
	401	2.488	1.719	4.026	-0.151	6.530
	451	2.496	1.725	4.039	-0.150	6.570
	501	2.501	1.730	4.048	-0.150	6.590
	Exact ¹³⁾	2.526	1.750	4.087	-0.149	6.697
multipliers ($qB^4 \times 10^{-3}/D$)		$qB^2 \times 10^{-2}$	$qB^2 \times 10^{-2}$	$qB^2 \times 10^{-2}$	$qB^2 \times 10^{-2}$	$qB \times 10$

表-2 種々の境界条件を持つ扇形 Mindlin 板のたわみと断面力の収束性に与える離散点の数の影響: $\phi=60^\circ$, $R_0/R_i=2$, $B/h=10$

B/C	Nr	$\xi=0.5, \eta=0.5$			$\xi=0.5, \eta=0$
		W	Mt	Mr	Qr
C-C	11	2.331	1.405	3.322	4.758
	51	2.868	1.806	4.071	6.504
	101	2.889	1.822	4.099	6.578
	151	2.892	1.824	4.105	6.592
	201	2.894	1.825	4.107	6.597
	251	2.894	1.826	4.107	6.599
Exact ⁽¹³⁾		2.896	1.827	4.109	6.603
S-S	11	7.270	4.215	7.325	4.642
	51	8.253	4.848	8.324	5.297
	101	8.288	4.870	8.360	5.320
	151	8.295	4.875	8.366	5.325
	201	8.297	4.876	8.369	5.326
	251	8.298	4.877	8.370	5.327
Exact ⁽¹³⁾		8.300	4.885	8.372	5.328
	Nr	$\xi=0.5, \eta=0.5$			$\xi=0, \eta=0.5$
		W	Mt	Mr	Q _q
F-F	11	149.2	40.33	-0.463	7.793
	51	128.9	36.03	1.035	7.372
	101	128.4	35.94	1.087	7.365
	151	128.4	35.92	1.097	7.364
	201	128.3	35.91	1.100	7.364
	251	128.3	35.91	1.102	7.364
Exact ⁽¹³⁾		128.3	35.90	1.104	7.363
multipliers ($qB^4 \times 10^{-3}$)/D $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB \times 10$					

表-3 扇形 Mindlin 板のたわみと断面力に与える中心角の影響: C-C, $R_0/R_i=2$, $N_r=251$

B/h	ϕ	$\xi=0.5, \eta=0.5$			$\xi=0.5, \eta=0$
		W	Mt	Mr	Qr
5	30	2.213	3.050	2.557	4.323
	60	3.974	2.046	4.144	6.380
	90	4.143	1.431	4.212	6.319
	120	4.097	1.298	4.146	6.173
10	30	1.622	2.763	2.596	5.216
	60	2.894	1.826	4.107	6.599
	90	3.015	1.361	4.185	6.317
	120	2.990	1.280	4.139	6.176
50	30	1.405	2.615	2.593	5.860
	60	2.513	1.732	4.049	6.580
	90	2.625	1.328	4.130	6.205
	120	2.609	1.262	4.094	6.085
multipliers ($qB^4 \times 10^{-3}$)/D $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB \times 10$					

表-2 には、2つの円弧辺で任意の境界条件を有する等分布荷重を満載する扇形 Mindlin 板のたわみおよび断面力の収束性に与える選点の数の影響が示してある。ここで、中心角 $\phi=60^\circ$ 、半径比 $R_0/R_i=2$ 、幅厚比 $B/h=10$ に仮定している。また、選点の数 N_r を 11 から 251 まで変化させ、比較のために Kobayashi・Turvey による解析解¹³⁾も示してある。

これより、たわみおよび断面力ともに、選点の数を増大させると境界条件にかかわらず一定値へ安定した収束性が得られており、また Kobayashi・Turvey による解析解¹³⁾ともよく一致した結果が得られている。

表-3 には、等分布荷重を満載する扇形 Mindlin 板のたわみおよび断面力に与える中心角の影響が示してある。ここで、相対する 2つの円弧辺を固定とし、半径比 $R_0/R_i=2$ 、選点の数 $N_r=251$ に仮定している。また、

表-4 扇形 Mindlin 板のたわみと断面力に与える幅厚比と半径比の影響: C-C, $\phi=60^\circ$, $N_r=251$

B/h	R_0/R_i	$\xi=0.5, \eta=0.5$			$\xi=0, \eta=0$	$\xi=0.5, \eta=1.0$
		W	Mt	Mr	Mtr	Qr
5	1.2	4.035	1.253	4.162	-1.594	-4.812
	1.5	4.100	1.316	4.210	-1.777	-4.674
	2.0	3.974	2.046	4.144	-2.109	-4.598
	3.0	3.149	2.856	3.493	-2.490	-4.222
	4.0	2.532	2.961	2.979	-2.383	-3.911
	5.0	2.145	2.892	2.640	-2.122	-3.703
10	1.2	2.961	1.252	4.162	-0.931	-4.805
	1.5	2.993	1.287	4.190	-1.046	-4.644
	2.0	2.894	1.826	4.107	-1.253	-4.567
	3.0	2.314	2.545	3.477	-1.628	-4.267
	4.0	1.874	2.701	2.984	-1.773	-4.004
	5.0	1.590	2.681	2.656	-1.751	-3.819
50	1.2	2.589	1.238	4.116	-0.218	-4.755
	1.5	2.611	1.267	4.138	-0.245	-4.590
	2.0	2.513	1.732	4.049	-0.295	-4.515
	3.0	2.003	2.389	3.435	-0.398	-4.245
	4.0	1.625	2.551	2.957	-0.476	-4.005
	5.0	1.381	2.552	2.639	-0.528	-3.835
multipliers ($qB^4 \times 10^{-3}$)/D $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB^2 \times 10^{-2}$ $qB \times 10$						

幅厚比 B/h を 5, 10, 50, 中心角 ϕ を 30° , 60° , 90° , 120° と変化させ検討を行った。

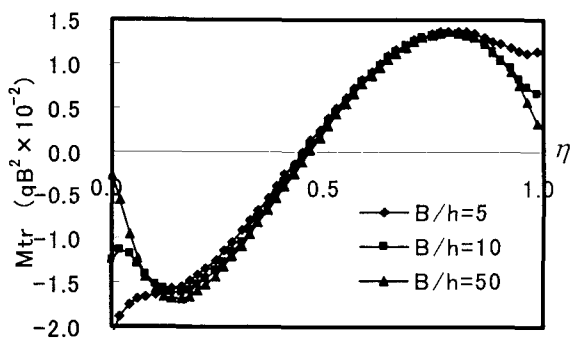
これより、幅厚比が小さくなると、横せん断変形の影響によりたわみおよび曲げモーメントの値は増大しているが、せん断力 Q_r の値は、中心角の値により変化し、複雑な性状を示している。中心角の増大に伴う中央点のたわみの減少は、扇形板の幾何特性によるもので、中心角が 90° を越えると、板周辺からの拘束により、中央部が節となるような局所変形が生じるからである。

表-4 には、等分布荷重を満載する扇形 Mindlin 板のたわみおよび断面力に与える半径比の影響について示してある。ここで、相対する 2つの円弧辺を固定とし、中心角 $\phi=60^\circ$ 、選点の数 $N_r=251$ に仮定している。また、幅厚比 B/h を 5, 10, 50, 半径比 R_0/R_i を 1.2 から 5.0 まで変化させ検討を行った。

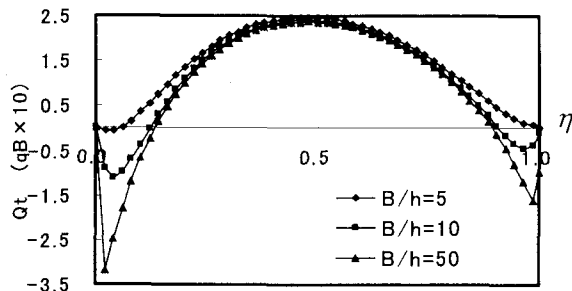
これより、幅厚比が小さくなると、横せん断変形の影響により、たわみ W および曲げモーメント Mt , Mr の値は R_0/R_i の値にかかわらず減少しているが、せん断力 Q_r の値は、 R_0/R_i が小さくなると、大きな値を示している。

図-2 には、2つの円弧辺が固定された扇形 Mindlin 板の単純支持辺($\xi=0$)における断面力 Mtr と Qt の分布に与える幅厚比の影響が示してある。ここで、半径比 $R_0/R_i=2$ 、中心角 $\phi=60^\circ$ とし、幅厚比 B/h を 5, 10, 50 と変化させ検討を行った。

これより、ねじりモーメントおよびせん断力は非対称な分布性状を示し、また隅角点近傍の値は、幅厚比に大きく依存することがわかる。この理由として、薄板理論で定義される隅角点での集中反力や換算せん断力に対して、Mindlin 板理論では、ねじりモーメントとせん断力を独立した 3つの変位で表すので、隅角部近傍の値は幅厚比の値により、異なった力学的性状を示すものと考えられる。

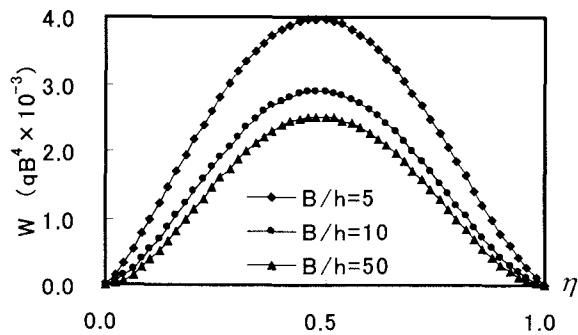


a) ねじりモーメント M_{tr}

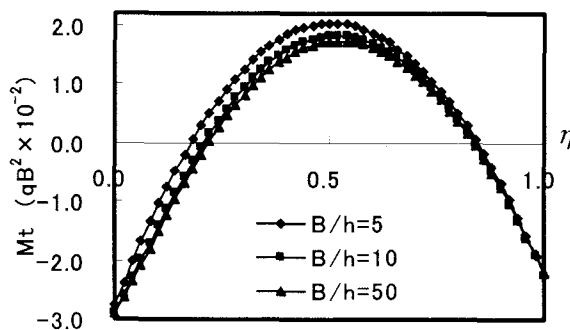


b) せん断力 Q_t

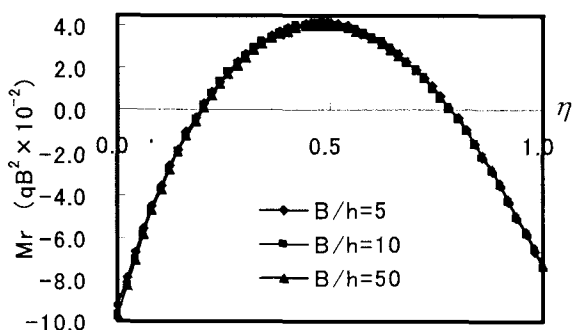
図-2 断面力に与える幅厚比の影響 : C-C, $\phi=60^\circ$, $\xi=0$



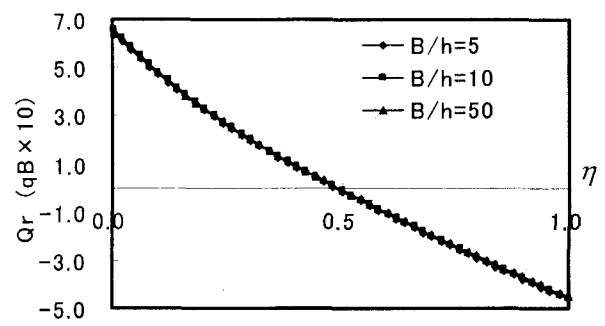
a) たわみ W



b) 曲げモーメント M_t



c) 曲げモーメント M_r



d) せん断力 Q_r

図-3 たわみおよび断面力の分布に与える幅厚比の影響 : C-C, $\phi=60^\circ$, $\xi=0.5$

図-3には、2つの円弧辺が固定された扇形厚板の中央断面 ($\xi=0.5$) におけるたわみ W , 断面力 M_t , M_r , および Q_r の分布に与える幅厚比の影響が示してある。ここで、半径比 $R_o/R_i=2$, 中心角 $\phi=60^\circ$ とし、幅厚比 B/h を 5, 10, 50 と変化させ検討を行った。

これより、幅厚比が小さくなると、たわみおよび曲げモーメントの最大値は大きくなり、また短い円弧辺での負曲げモーメントが長い円弧辺上の値と比較して大きな値を示す。一方、 Q_r に与える幅厚比 B/h の影響は、比較的小さく、 Q_r の分布は、非対称な性状を示している。

3.2 扇形 Mindlin 板の振動解析

ここでは、2つの半径方向の直線辺が単純支持され、他の2辺が任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の振動解析への spline 選点法の適用性について示す。また、以下の数値計算例では、spline 次数 $k-1$ は3次に固定し、ポアソン比 ν は 0.3, せん断修正係数 κ は $\pi^2/12$ に仮定している。

図-4には、扇形 Mindlin 板の基本振動数パラメータ $n*1$ の収束性に与える幅厚比の影響が示してある。ここで、相対する2つの円弧辺を単純支持とし、半径比 $R_o/R_i=2$, 中心角 $\phi=60^\circ$ に仮定している。また、幅厚比 B/h を 5, 10, 100, 選点の数 N を 11 から 161 まで変化させ検討を行った。これより、幅厚比にかかわらず選点の数を増大させると、一定値へ安定した収束性が得られているが、 B/h が大きくなると収束性がゆるやかになる。

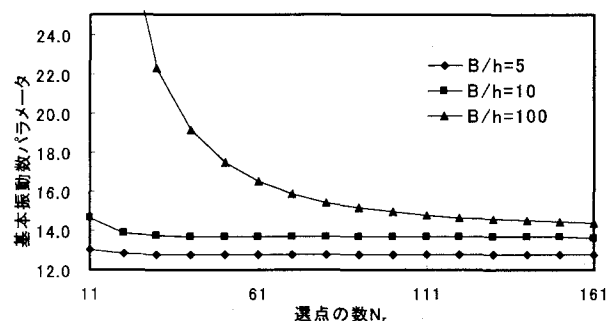


図-4 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n*1$ の収束性に与える幅厚比の影響 : S-S, $\phi=60^\circ$, $R_o/R_i=2$

表-4 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ精度比較

: $R_0/R_i=2$, $\phi=60^\circ$

B.C	B/h	Modes					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
S-S	5	SCM	12.75	22.12	34.65	35.18	42.81
		DQM	12.75	22.12	34.65	35.18	42.81
		SSM	12.75	22.12	34.65	35.18	42.81
	10	SCM	13.64	24.71	40.85	41.51	52.04
		DQM	13.64	24.71	40.84	41.51	52.03
		SSM	13.64	24.71	40.84	41.51	52.03
	20	SCM	13.90	25.56	43.15	43.86	55.73
		DQM	13.91	25.55	43.13	43.85	55.71
		SSM	13.90	25.55	43.13	43.85	55.71
	100	SCM	14.09	25.92	44.52	44.79	57.54
		DQM	14.01	25.86	43.93	44.78	57.13
		SSM	13.99	25.85	43.97	44.71	57.10
C-C	5	SCM	19.23	25.92	37.60	41.83	47.90
		DQM	19.23	25.92	37.60	41.83	47.90
		SSM	19.23	25.92	37.60	41.83	47.90
	10	SCM	22.87	31.05	46.28	55.52	63.69
		DQM	22.87	31.05	46.28	55.51	63.68
		SSM	22.87	31.05	46.28	55.51	63.68
	20	SCM	24.23	33.09	49.95	62.03	71.60
		DQM	24.22	33.08	49.94	61.99	71.57
		SSM	24.22	33.08	49.94	61.99	71.57
	100	SCM	25.03	34.10	51.58	65.60	75.76
		DQM	24.73	33.87	51.40	64.67	74.95
		SSM	24.71	33.86	51.40	64.67	74.95
F-C	5	SCM	10.19	22.31	23.96	35.71	36.72
		DQM	10.19	22.31	23.96	35.71	36.72
		SSM	10.19	22.31	23.96	35.71	36.72
	10	SCM	11.03	25.49	28.27	43.80	44.63
		DQM	11.03	25.49	28.27	43.80	44.63
		SSM	11.03	25.49	28.27	43.80	44.63
	20	SCM	11.31	26.58	29.94	47.20	47.80
		DQM	11.07	26.46	30.05	46.94	47.78
		SSM	11.31	26.58	29.93	47.19	47.79
	100	SCM	11.51	27.07	30.92	48.87	49.13
		DQM	11.44	26.81	30.64	48.63	48.97
		SSM	11.44	26.97	30.70	48.68	49.00
F-F	5	SCM	2.763	10.60	10.74	21.59	24.04
		DQM	2.764	10.60	10.74	21.59	24.04
		SSM	2.764	10.60	10.74	21.59	24.04
	10	SCM	2.823	11.41	11.43	24.18	27.25
		DQM	2.824	11.41	11.43	24.19	27.25
		SSM	2.823	11.41	11.43	24.19	27.25
	20	SCM	2.842	11.65	11.69	25.09	28.38
		DQM	2.848	11.64	11.72	25.12	28.40
		SSM	2.843	11.65	11.69	25.09	28.37
	100	SCM	2.847	11.73	11.87	25.43	28.85
		DQM	2.891	11.83	11.94	25.58	28.93
		SSM	2.855	11.76	11.85	25.49	28.84

SCM:Spline 選点法

表-4 には、2つの円弧辺で任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ の精度比較が示してある。ここで、中心角 $\phi = 60^\circ$, $R_0/R_i = 2$, 選点の数 $N_r = 301$ に仮定し、幅厚比 B/h は 5 から 100 まで変化させている。比較のために、スプライン帯板法 (SSM) を用いた数値解⁵⁾と DQ 法 (DQM) を用いた数値解¹⁸⁾が示してある。

これより、本手法で求めた値と他の数値解析法で求めた解を比べてみると、幅厚比や境界条件に関係なく、よく一致した結果が得られている。

表-5 には、それぞれ半径比が 2 と 5 に仮定した中心角の大きな扇形 Mindlin 板(C-C)の振動数パラメータ

表-5 大きな中心角を持つ扇形 Mindlin 板の振動数

パラメータ : C-C, $B/h=5$

R_0/R_i	ϕ	Modes					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
2.0	120	SCM	17.94	19.23	21.84	25.92	31.30
		DQM	17.93	19.23	21.84	25.92	31.29
	150	SCM	17.80	18.57	20.10	22.54	25.92
		DQM	17.80	18.57	20.09	22.54	25.92
	180	SCM	17.73	18.24	19.23	20.80	23.04
		DQM	17.73	18.24	19.23	20.80	23.04
	210	SCM	17.69	18.05	18.74	19.82	21.37
		DQM	17.68	18.05	18.74	19.82	21.37
	270	SCM	17.64	17.86	18.24	18.84	19.68
		DQM	17.64	17.85	18.24	18.84	19.68
5.0	120	SCM	18.92	26.27	37.26	41.92	49.26
		DQM	18.92	26.27	37.25	41.92	49.26
	150	SCM	18.20	22.66	30.45	39.61	40.99
		DQM	18.20	22.66	30.45	39.61	40.98
	180	SCM	17.85	20.71	26.27	33.42	40.50
		DQM	17.85	20.71	26.27	33.41	40.49
	210	SCM	17.66	19.60	23.62	29.21	35.60
		DQM	17.66	19.60	23.61	29.21	35.59
	270	SCM	17.47	18.49	20.71	24.18	28.54
		DQM	17.46	18.49	20.71	24.18	28.54

が示してある。ここで、幅厚比 $B/h=5$, 選点の数 $N_r=251$ と仮定し、中心角 ϕ は、 120° から 270° まで変化させ検討を行った。また、比較のために DQ 法による結果¹⁸⁾も示してある。これより、本手法で求めた解と DQ 法で求めた解を比べてみると、よく一致した結果を示しているの、本手法を用いれば、扇形 Mindlin 板の精度の高い解析が可能である。

4. あとがき

本論文では、円周方向に固有関数を Levy 級数展開し、半径方向に spline 選点法を適用した半解析的な数値解析法を定式化し、また半径方向の 2 辺が単純支持され、他の 2 つの円弧辺が任意の境界条件を持つ扇形 Mindlin 板の曲げおよび振動解析への適用について検討を行った。

本文で得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

- 1) 局所基底を有する B-spline 関数を選点法の試験関数に適用するので、得られる係数行列は非密行列になり、数値安定性の高い解析結果が得られている。
- 2) Spline 選点法を適用すれば、3 元連立微分方程式で表される扇形 Mindlin 板の支配方程式と与えられた境界条件は、容易に連立一次元方程式に離散化され、また境界条件が各境界辺で厳密に導入できる。
- 3) 本手法を用いて求めたたわみと断面力および振動数パラメータは、選点の数の増大とともに、安定した収束状態を示し、また一定値に収束する結果が得られえている。
- 4) Spline 選点法を用いて求めた値は、他の解析解や数値解と比較して、幅厚比や境界条件にかかわら

ず、よく一致した結果が得られている。

- 5) 数値積分公式を用いる必要がないので、プログラミングが容易であり、また数値積分に必要な計算時間が短縮できる。

今後は、平板の非線形応答解析への応用について検討していきたい。

最後に、貴重なご意見を頂いた査読者に対して謝意を表します。

参考文献

- 1) Kobayashi, H., Ishikawa, K. and Furuichi, T. : A survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ., Vol. 33, pp. 115-136, 1992.
- 2) Xiang, Y., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. : Transverse vibration of thick annular sector plates. J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 119, pp. 1579-1599, 1993.
- 3) Liew, R.M., Kitipornchai, S. and Xiang, Y. : Vibration of annular sector Mindlin plates with internal radial line and circumferential arc supports. J. Sound and Vibr., Vol. 183, pp. 401-419, 1995.
- 4) Liew, K.M., Ng, T.Y. and Wang, B.P. : Vibration of annular sector plates from three-dimensional analysis. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 110, pp. 233-242, 2001.
- 5) Mizusawa, T., Kito, H. and Kajita, T. : Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method. Comput. and Struct., Vol. 53, pp. 1205-1215, 1994.
- 6) Mizusawa, T. : Vibration of thick annular sector plates using finite strip models. Journal of Sound and Vibration, Vol. 150(2), pp. 245-259, 1991.
- 7) 高木信治, 水澤富作 : Spline Prism 法を用いた扇形厚板の三次元解析について, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 1-12, 1994.
- 8) 水澤富作, 加藤秀一 : Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol. 45A, pp. 1-8, 1999.
- 9) 木村健一, 近藤八重, 水澤富作 : スプライン要素法を用いた2方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析, 構造工学論文集, Vol. 48A, pp. 19-26, 2002.
- 10) 水澤富作, 田中宏明 : Spline layer 法を用いた扇形厚板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp. 1-9, 1998.
- 11) Bapu Rao, M.N., Guruswamy, P. and Sampath Kumaran, K.S. : Finite element analysis of thick annular and sector plates. International Journal of Nuclear Engineering and Design, Vol. 41, pp. 247-255, 1977.
- 12) Guruswamy, P. and Yang, T.Y. : A sector element for dynamic analysis of thick plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 505-516, 1979.
- 13) Kobayashi, H. and Turvey, G.J. : Elastic small deflection analysis of annular sector Mindlin plates. Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, pp. 811-827, 1994.
- 14) McGee, O.G., Huang, C.S. and Leissa, A.W. : Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges. Int. J. Mech. Sci., Vol. 37, pp. 537-566, 1995.
- 15) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. Comput. Struct., Vol. 18, pp. 425-431, 1984.
- 16) Liew, K.M. and Liu, F.L. : Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates. J. Sound and Vibr., Vol. 230, pp. 335-356, 2000.
- 17) Liu, F.L. and Liew, K.M. : Differential quadrature element method: a new approach for free vibration analysis of polar Mindlin plates having discontinuities. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 179, pp. 407-423, 1999.
- 18) 水澤富作, 近藤八重 : Differential Quadrature 法を用いた扇形 Mindlin 板の振動解析. 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp. 221-230, 2000.
- 19) 後藤太輔, 水澤富作 : Spline 選点最小二乗法を用いた厚板の振動解析. 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 203-211, 2004.
- 20) Mindlin, R.D. : Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. Journal of Applied Mechanics, Vol. 73, pp. 31-38, 1951.

(2005年4月15日受付)