

ケーブル構造の形状決定に関する一計算法

A numerical method for shape finding of cable structures

Dang Tung Dang*・岩崎英治**・長井正嗣***

Dang Tung DANG, Eiji IWASAKI and Masatugu NAGAI

*学生会員 工修 長岡技術科学大学博士後期課程 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

A cable element has been developed in our papers for flexible cable structures with pulley. This element is formulated by modified functional of variational principle and has the same features as usual finite element based on the displacement method in which displacements are unknown variables. In this paper some functions are appended for shape finding of many cable structures such as cable net, suspension bridge and cable stayed bridge. Some numerical examples are to show the accuracy and efficiency of the proposed numerical method.

Key Words : FEM, cable element, shape finding, pulley

1. はじめに

ケーブル部材を有限要素法で解析する場合には、直線要素を多数用いた方法が簡便であるが、自重や風荷重のような分布荷重が作用し、大きなサグが生じるような柔ケーブル構造の場合には、多数の要素を必要とする。このため、中間節点を設けた曲線ケーブル要素が開発されている^{1),2)}。これらの研究のように、中間節点を多数設けた高次要素を用いれば、少ない自由度で精度の良い解析が可能になるが、通常のラグランジュ多項式を用いた要素では、剛性行列の条件数が大きくなり、次数をあまり高くできない。

一方、ケーブル部材の応力状態は非常に単純で、平衡方程式の一般解を容易に誘導できる。このため、応力法に基づいたケーブル構造の解析法³⁾が開発されている。この手法は、ケーブル端での適合条件式を解く方法であり、一般の有限要素法とは異なり汎用性に欠ける。また、ケーブル形状の解析解を用いて、変位法による剛性方程式に相当する式を誘導する方法が示されている^{4),5)}。これらの方法は、少ない自由度で高精度の解を得ることができるが、ケーブルの自重に相当する等分布荷重の基での解析解を用いていることから、汎用性の面で若干の制限を受ける。

ところで、ケーブル構造には、架設途中には支点や、他のケーブル上を滑動し、完成時に拘束する形式のものが少なくなく、この完成前のケーブルの変形や反力を把握しておく必要がある。このような状態は、ケーブル要素端部に滑車を導入することで表現できる。このような滑車を有するケーブル構造の解析には、真柄ら⁶⁾、McDonaldら⁷⁾や Aufaure⁸⁾の研究がある。

ケーブル構造の形状は、自重やプレストレス、外力等が作用するまで確定しないので、形状決定の問題も重要である。このような形状決定の問題は、つり合い状態での形状やケーブル軸力などが予め設定された目標値に近くなるように、初期ケーブル長やケーブル交

点の座標値を決めることになる。そのような問題の解を、最適値問題として解く方法^{9),10)}や、ケーブル軸力やつり合い状態での座標値を、ケーブル長や変位前の節点位置の関数として表して解く方法^{3),11)}などがある。

形状決定の条件は種々あるが、各ケーブルの軸力が等しくなるような条件を考える場合には、プレストレスや自重などの荷重が作用する間は、支点や他のケーブル上の交点でケーブルが移動可能な状態になっていると、これらの点で隣接するケーブル部材の軸力を等しくすることが可能である。このような状態は見かけ上、ケーブルが滑車内を通して支点や他のケーブルに接続しているものと見なすことで表現できる。

このような等張力場での形状決定、厳密には自重によりケーブル軸に沿って張力は変化するため、ケーブルの交差部において隣接するケーブル軸力が等しくなるような張力のもとでの形状決定を行えるような、滑車を有するケーブル要素が共著者らにより誘導されている^{12),13)}。この滑車を有するケーブル要素を用いることにより、等張力場での形状決定が行える。また、その後、滑車として扱った節点での滑り変位を拘束し、通常の節点として扱うことで、形状決定後のケーブル構造に作用した荷重による構造解析が行え、形状決定と構造解析を同一の手法により行える特長を有している。

ところで、吊橋や斜張橋のような吊形式橋梁では、自重の作用した状態で塔に曲げが作用しないように、また、桁の曲げを最小に抑えるために、桁とケーブルの接続部で自重による鉛直変位が生じないようにケーブルの形状決定を行うことが多い。このような問題も著者らの研究^{12),13)}を拡張することにより扱える。塔に曲げが生じないようにするには、塔に取り付けられた前後のケーブルの橋軸方向水平分力が等しくなるようにすれば良い。また、桁とケーブルの取り付け位置が鉛直方向に移動しないようにするには、鉛直変位がゼロになるようにケーブルプレストレスを決定すればよい。

そこで、本論文では、文献^{12),13)}に示したケーブル要

素を修正し、水平分力が等しくなるような拘束条件を含んだ汎関数を考えることで、水平分力が等しくなるような位置へ移動する滑車を含んだケーブル要素を誘導する。また、任意な節点の変位が規定値になるように、任意な滑車でのケーブル張力を決定する方法を示す。さらに、文献^{12),13)}に示した滑車を有するケーブル要素を用いて、著者らの一連の研究により開発したケーブル要素の有用性を示すために、ケーブルネット、吊橋、斜張橋を例に、種々の拘束条件を含んだ構造の形状決定と構造解析の具体的な計算方法を示す。

2. ケーブル要素

文献^{12),13)}に誘導したケーブル要素の基礎式を示す。定式化には更新型ラグランジュの手法を用い、ケーブル要素を誘導する上で、通常用いられる以下の仮定を設けている。

- 1) ケーブルには軸力のみ生じる。
- 2) ケーブルの曲げ剛性は無視できる。
- 3) ケーブルの断面積は、軸力の大きさによらず一定。

2.1 汎関数

ある増分ステップにおいて平衡条件および適合条件を満たした解が得られているものとする。独立変分量に要素両端の変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{u}_a, \Delta \mathbf{u}_b$ と要素中央の軸力増分ベクトル $\Delta \mathbf{N}_c$ を用いたときの次の増分ステップまでの汎関数は、次式のように表される。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + (F_x^* - N^*) \right\} dx + [(\mathbf{N}^* - n_x \mathbf{Q}^*)^T \Delta \mathbf{u}]_0^l \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Q}^*$ は次の増分ステップでのケーブル要素端の集中荷重ベクトル、 $\mathbf{N}^*$ は次の増分ステップでの軸力ベクトル、 n_x はケーブル端部の断面の外向き法線ベクトルとケーブルに沿った x 軸との間の方向余弦、 ΔN は軸力増分、 EA は伸び剛性、 l は前増分ステップでのケーブル長である。また、 F_x^* と $\mathbf{N}^*$ は軸力ベクトル $\mathbf{N}^*$ から次式のように与えられる。

$$F_x^* = \mathbf{e}^T \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{N}^* = |\mathbf{N}^*|, \quad \Delta N = N^* - N \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{e}$ は、前増分ステップでのケーブルの単位接線ベクトルである。なお、次の増分ステップでの単位接線ベクトル $\mathbf{e}^*$ は、 $\mathbf{N}^*/N^*$ で与えられる。

式(1)において、 $\mathbf{N}^*$ は要素内での平衡方程式を満たしている必要があり、要素中央での軸力ベクトル $\mathbf{N}_c^*$ と分布荷重ベクトル $\mathbf{q}^*$ から次式のように表す。

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N}_c^* - \int_{l/2}^x \mathbf{q}^* dx \quad (3)$$

2.2 停留条件式

式(1)の独立変分量は、ケーブル要素両端の変位増分 $\Delta \mathbf{u}_a (= \Delta \mathbf{u}(0))$ 、 $\Delta \mathbf{u}_b (= \Delta \mathbf{u}(l))$ と要素中央の軸力増分 $\Delta \mathbf{N}_c$ であり、停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ \mathbf{e} - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) \mathbf{e}^* \right\} dx + [\Delta \mathbf{u}]_0^l = \mathbf{0} \quad (4a)$$

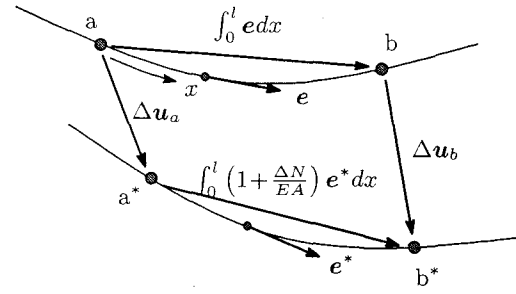


図-1 適合条件

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (4b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (4c)$$

ここで、 $N_a^*, Q_a^*, N_b^*, Q_b^*$ は、 $\mathbf{N}^*$ や $\mathbf{Q}^*$ の a 端 ($x=0$) や b 端 ($x=l$) での値を表している。

式(4a)の $\int_0^l \mathbf{e} dx$ は前増分ステップでの a 端から b 端までのベクトルを、 $\int_0^l (1 + \Delta N/EA) \mathbf{e}^* dx$ は次の増分ステップでの a^* 端から b^* 端までのベクトルを表しており、図1のように、増分変位前後のケーブルの適合条件を表している。また、式(4b)、式(4c)はそれぞれ両端での力の釣り合いを表している。

2.3 停留条件式の解法

式(4)を増分量に関して線形化すると、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} -H & -I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta N_c \\ \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \begin{Bmatrix} -\bar{u}_c \\ \bar{p}_a \\ \bar{p}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_a + N_a \\ Q_b - N_b \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、荷重 $\mathbf{Q}$ や q は、基準荷重 $\bar{\mathbf{Q}}, \bar{q}$ と荷重倍率 λ の積で表現する¹⁴⁾ことにし、増分荷重も基準荷重と荷重倍率増分 $\Delta \lambda$ の積で表している。

$$\bar{u}_c = \int_0^l \left(\frac{\mathbf{e} \mathbf{e}^T}{EA} + \frac{\mathbf{I} - \mathbf{e} \mathbf{e}^T}{N} \right) \int_{l/2}^x \bar{q} dx dx \quad (6a)$$

$$\bar{p}_a = \bar{Q}_a + \int_0^{l/2} \bar{q} dx \quad (6b)$$

$$\bar{p}_b = \bar{Q}_b + \int_{l/2}^l \bar{q} dx \quad (6c)$$

$$H = \int_0^l \left(\frac{\mathbf{e} \mathbf{e}^T}{EA} + \frac{\mathbf{I} - \mathbf{e} \mathbf{e}^T}{N} \right) dx \quad (6d)$$

なお、線形化に際して、軸力は $N \neq 0$ と扱っている。

式(5)を、全ケーブル要素について組み立てた方程式から求められる解は、増分量に関して線形化したことによる誤差を含んでいる。そこで、この値を初期値 $\Delta \mathbf{N}_{c(0)}, \Delta \mathbf{u}_{a(0)}, \Delta \mathbf{u}_{b(0)}$ として、反復計算により正確な解を求める必要がある。式(4)のニュートン法による反復公式は、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} -H^{(k)} & -I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{N}_c \\ \Delta \hat{u}_a \\ \Delta \hat{u}_b \end{Bmatrix}$$

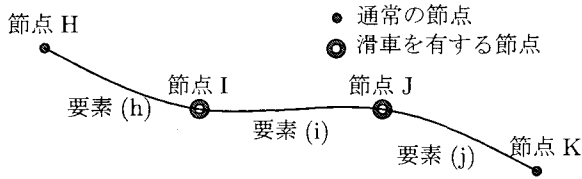


図-2 滑車を有するケーブル

$$= \Delta \hat{\lambda} \begin{Bmatrix} -\bar{u}_{c(k)} \\ \bar{p}_a \\ \bar{p}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\Delta v_{c(k)} \\ Q_{a(k)}^* + N_{a(k)}^* \\ Q_{b(k)}^* - N_{b(k)}^* \end{Bmatrix} \quad (k \geq 0) \quad (7)$$

ここで、

$$\bar{u}_{c(k)} = \int_0^l h_{(k)} \int_{l/2}^x \bar{q} dx dx \quad (8a)$$

$$\Delta v_{c(k)} = \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N_{(k)}}{EA} \right) e_{(k)}^* \right\} dx + [\Delta u_{(k)}]_0^l \quad (8b)$$

$$H_{(k)} = \int_0^l h_{(k)} dx \quad (8c)$$

$$h_{(k)} = \frac{e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{EA} + \left(1 + \frac{\Delta N_{(k)}}{EA} \right) \frac{I - e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{N_{(k)}^*} \quad (8d)$$

これらより、

$$\Delta N_{c(k+1)} = \Delta N_{c(k)} + \Delta \hat{N}_c \quad (9a)$$

$$\Delta u_{a(k+1)} = \Delta u_{a(k)} + \Delta \hat{u}_a \quad (9b)$$

$$\Delta u_{b(k+1)} = \Delta u_{b(k)} + \Delta \hat{u}_b \quad (9c)$$

これらの式 (5) や (7) において、 ΔN_c は個々の要素に独立な値であるので、構造全体の式を組み立てる前に、消去することができる。

ここに示した基礎式において、分布荷重 q が等分布荷重の場合のように x に関して単純な式で表される場合には、多少式が煩雑になるが、文献^{3),5)}などのように解析的に積分が行える。しかし、本論文では、一般性を考慮して、これらの積分計算には、文献¹³⁾に示した数値積分法を用いる。

3. 滑車を有するケーブル

文献¹³⁾に示した滑車内を通して接続された2本のケーブルの軸力が等しいような滑車を有するケーブル要素、滑車部でケーブルに力を直接作用させる方法を簡単に示す。新たに、任意の方向の分力が等しくなるような滑車を有するケーブル要素と、任意の節点での変位成分が、与えられた値になるように、任意の滑車部のケーブルに力を作用させる方法について述べる。

3.1 軸力が等しい滑車を有するケーブル

図-2のように、ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車内を通して接続されたケーブルの系を考える。滑車内を通して接続されたケーブルの軸

力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}, \Pi_C^{(i)}, \Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C^{total} &= \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ &\quad + \Delta \tilde{u}_I \{ N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)} \} \\ &\quad + \Delta \tilde{u}_J \{ N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)} \} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I, \Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルのずれ変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている。また、式中の $N_I^{*(h)}$ の添え字は、要素 (h) と節点 I を表している。

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のひとつのケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} N^*]_0^l \quad (11)$$

上式の独立変分量は、要素両端の変位と要素中央の軸力のほかに、両端の滑り変位 $\Delta \tilde{u}_a, \Delta \tilde{u}_b$ が含まれ、停留条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx \\ + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (12b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (12c)$$

$$-e_a^{*T} N_a^* = 0 \quad (12d)$$

$$e_b^{*T} N_b^* = 0 \quad (12e)$$

式 (12a) は、 ΔN_c に関する停留条件であり、増分変位前後の適合条件を表している。式 (12b), (12c) は、それぞれ増分変位 $\Delta u_a, \Delta u_b$ に関する停留条件、式 (12d), (12e) は、それぞれ滑車の滑り変位増分 $\Delta \tilde{u}_a, \Delta \tilde{u}_b$ に関する停留条件である。最後の2式は、便宜上、一つの要素の停留条件を誘導したために右边がゼロとなっているが、実際には、構造全体に組み立てると隣接要素の軸力と等しくなる条件を表す。

これらの停留条件式を線形化したり、ニュートン法の反復公式を求めると、要素端に滑車を含んだケーブルの有限要素方程式が得られる。この方程式には、滑車部での滑り変位に関する方程式が含まれることになる。なお、分布荷重 q^* は、ケーブルに直接作用しているが、集中荷重 Q^* は、ケーブルではなく、滑車 (節点) に作用していることに注意する必要がある。

3.2 滑車部でケーブルに力が作用する場合

図-3のように、ケーブル要素 (i) が節点 I, J に取り付けられた滑車内を通して接続されたケーブルの系において、滑車部 I, J に滑りを起こさせるような力 T_I^* と T_J^* が、直接、ケーブルに作用する場合を考える。この状態を表す一要素の汎関数は次のようになる。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} (N^* - n_x T^*)]_0^l \quad (13)$$

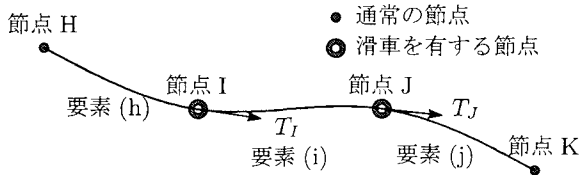


図-3 滑車部でケーブルに力が作用する場合

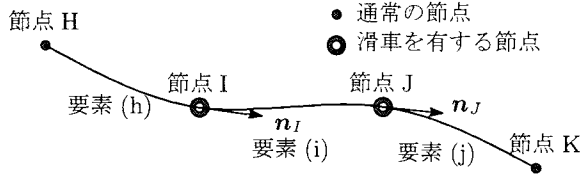


図-4 分力が等しい滑車を有するケーブル

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx \\ + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (14a) \\ -N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (14b) \\ N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (14c) \\ -e_a^{*T} N_a^* - T_a^* = 0 \quad (14d) \\ e_b^{*T} N_b^* - T_b^* = 0 \quad (14e) \end{aligned}$$

最後の2式より、滑車部において、ケーブルに直接、力を与えるには、滑り変位に対応する停留条件式に、力を作用させると良いことが分かる。

3.3 分力が等しい滑車を有するケーブル

図-4 のように、ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車内を通して接続されたケーブルの系を考える。各滑車では、単位ベクトル n_I や n_J 方向の軸力の成分が等しくなるものとする。この条件を汎関数に含めると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C^{total} = \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ + \Delta \tilde{u}_I n_I^T \{ N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)} \} \\ + \Delta \tilde{u}_J n_J^T \{ N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)} \} \quad (15) \end{aligned}$$

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のひとつのケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} n^T N^*]_0^l \quad (16)$$

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx \\ + [\Delta u + \Delta \tilde{u} n]_0^l = 0 \quad (17a) \\ -N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (17b) \\ N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (17c) \end{aligned}$$

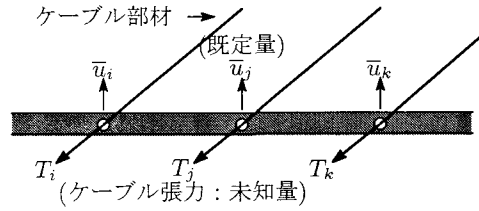


図-5 ケーブルの張力

$$-n_a^T N_a^* = 0 \quad (17d)$$

$$n_b^T N_b^* = 0 \quad (17e)$$

上式の最後の2式は、便宜上、一つの要素の停留条件を求めたために右边がゼロとなっていることに留意する必要がある。

これらの停留条件式を線形化したり、ニュートン法の反復公式を求めると、要素端に滑車を含んだケーブルの有限要素方程式が得られる。

3.4 ケーブル張力の決定法

図-5 のように梁部材にケーブル部材が滑車内を通して接続されている状態を考える。節点 i, j, k などの変位が規定値 $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k$ になるように、滑車内を通っているケーブルの張力 T_i, T_j, T_k などを決める方法を示す。なお、変位 u_i, u_j, u_k などが規定される節点や方向とケーブル張力 T_i, T_j, T_k などを与える節点は、一般には異なる。

全体の平衡方程式は、次のように表される。

$$KD = F \quad (18)$$

ここで、

$$D = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (19)$$

この方程式は、変位ベクトル D と荷重ベクトル F に未知量と既知量が混在しているため、何らかの処理を行う必要がある。通常の支持条件の処理方法を適用することもできるが、規定の値を与える変位成分と張力が同一節点の同一成分ではないため、通常の支持条件の処理を行うと剛性行列の対称性が失われ数値計算上、好ましくない。そこで、以下のような方法を用いる。

元の方程式を次のように表す。

$$\begin{aligned} KD^{(0)} &= F^{(0)} \\ &\vdots \\ KD^{(i)} &= F^{(i)} \\ KD^{(j)} &= F^{(j)} \\ KD^{(k)} &= F^{(k)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{F}^{(0)}$ は、未知の張力 T_i, T_j, T_k 等をゼロとおいた荷重ベクトル、 $\mathbf{F}^{(i)}$ は T_i に相当する成分を '1'、他の成分を '0' とおいた荷重ベクトルである。

これらの方程式の解 $\mathbf{D}^{(0)}, \mathbf{D}^{(i)}, \dots$ から、式 (19) は次のように表される。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(0)} + \dots + T_i \mathbf{D}^{(i)} + T_j \mathbf{D}^{(j)} + T_k \mathbf{D}^{(k)} + \dots \quad (21)$$

上式を $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k, \dots$ 等に関する成分だけ抜き出すと、

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i^{(0)} \\ u_j^{(0)} \\ u_k^{(0)} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & u_i^{(i)} & u_j^{(j)} & u_k^{(k)} & \cdots \\ \cdots & u_j^{(i)} & u_j^{(j)} & u_j^{(k)} & \cdots \\ \cdots & u_k^{(i)} & u_k^{(j)} & u_k^{(k)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (22)$$

上式を解くことにより、張力 T_i, T_j, T_k などが求められる。なお、 $u_i^{(0)}$ は変位ベクトル $\mathbf{D}^{(0)}$ の成分、 $u_i^{(j)}$ などは $\mathbf{D}^{(j)}$ の成分である。

4. 計算例

前述の滑車を用いることにより、ケーブルネット、吊橋や斜張橋などの種々のケーブル構造の形状決定が行えることを具体的に示し、本論文で提案する滑車を用いた形状決定法の有用性を示す。

4.1 固定境界ケーブルネット

図-6 のような周辺部の節点が固定されたケーブルネットの等張力下での形状決定とその後の集中荷重による変形解析を行う。この図は、解析を行う前の初期形状を表し、各節点の z 座標値は次のように与えている。

$$z = \frac{y^2 - x^2}{125} \quad (|x|, |y| \leq 50)$$

$x = -50\text{m}$ の y - z 面と、 $y = -50\text{m}$ の z - x 面以外の節点が滑車を有する節点として表現されている。このケーブルの伸び剛性は $EA=13.37\text{MN}$ である。

ケーブルネット内の 2 本のケーブルが交差する節点は、図-7(a) のように、 C_1 と C_2 ケーブルが滑車内を通過して接続され、 C_3 と C_4 ケーブルも滑車内を通過して接続されている。これより、この節点には、 C_1 - C_2 ケーブルと C_3 - C_4 ケーブルの 2 種類の滑り変位成分を有することになる。また、 $x = 50\text{m}$ の y - z 面と $y = 50\text{m}$ の z - x 面の節点には、図 (b) のように、滑車内のケーブルに直接、プレストレス力として $T=5\text{kN}$ を作用させる。

これにより、ケーブルの交点は、ケーブル軸力が T に等しくなる位置へ移動する。図-8 の太破線は、このときの形状を表している。この状態のケーブルに自重に相当する下向きの等分布荷重 $q=7.74\text{N/m}$ が作用したときのケーブル形状が図中に細実線で示している。この状態で、等張力下でのケーブルネットの形状決定が行われたことになる。

引き続き、外力による構造解析を行うために、滑車部での滑り変位を拘束し、この計算例では、一つの節

表-1 ケーブル諸元

	境界ケーブル	内部ケーブル
ヤング係数 $E(\text{GN/m}^2)$	200	200
断面積 $A(\text{m}^2)$	0.02	0.004
自重 $q(\text{kN/m})$	1.5	0.3
初期張力 $T(\text{kN})$	500	100

点に鉛直下向きの集中荷重 $P=30\text{kN}$ を作用させたときの形状を太実線で示している。

このように、滑車を用いることで、等張力下での形状決定とその後の構造解析が同一手法で行える。

4.2 境界ケーブルを有するケーブルネット

図-9 のように 4 個の支点で支持された境界ケーブルを有するケーブルネットの等張力の条件での形状決定を行い、さらに集中荷重を作用させたときの構造解析を行う。ケーブルの諸元は表-1 に示している。初期形状での各節点の z 座標値は次式により与えている。

$$z = 3(1 + \xi\eta); \quad \xi = \frac{x-y}{12}, \quad \eta = \frac{x+y}{12}$$

等張力の条件での形状決定を行うには、ケーブルが交差するすべての節点に滑車を設けると良いが、境界ケーブル上の節点において、境界ケーブルと内部ケーブルの交点に滑車を導入し、境界ケーブルと内部ケーブルが共に滑車を通るような条件を与えると、滑車が一箇所に集まりケーブルネットとしては意味の無い形状になるため、境界ケーブル上の節点は、 z 軸方向に移動しないような拘束条件を与えて形状決定を行う。

図-10 のように、境界ケーブルには $T_b=500\text{kN}$ 、内部ケーブルには $T_i=100\text{kN}$ の張力を与える。図-11 は、境界ケーブルと内部ケーブルの交点での滑車のモデル化の方法を示している。図 (a) は、2 本の内部ケーブルの交差部に滑車を導入し、 C_1 と C_2 のケーブル、 C_3 と C_4 のケーブルがこの滑車内を通して、それぞれ接続される。図 (b) は支点でのケーブルの接続状況を表している。境界ケーブル C_3 と内部ケーブル C_2 は滑車に接続し、境界ケーブル C_1 には、滑車内を通して張力 T_b を作用させている。図 (c) も支点でのケーブルの接続状況を表している。ここでは、境界ケーブル C_3 が滑車に接続し、境界ケーブル C_1 と内部ケーブル C_2 には、滑車内を通してそれぞれ張力 T_b と T_i を作用させている。図 (d) は、境界ケーブルと内部ケーブルの交差部を表し、内部ケーブル C_3 と C_4 はこの滑車内を通して接続され、境界ケーブル C_1 と C_2 もこの滑車内を通して接続されている。また、滑車が鉛直方向に移動しないような張力 T_r をケーブル C_1 に作用させる。図 (e) も、境界ケーブルと内部ケーブルの交差部を表し、境界ケーブル C_1 と C_2 は滑車内を通して接続され、滑車が鉛直方向に移動しないような張力 T_r をケーブル C_1 に作用させる。内部ケーブル C_4 は滑車に接続され、内部ケーブル C_3 には滑車内を通して張力 T_i が作用している。図 (f) も同様に、境界ケーブルと内部ケーブルの交差部を表し、境界ケーブル C_1 と C_2 は滑車内を通して接続され、滑車が鉛直方向に移動しないような張力

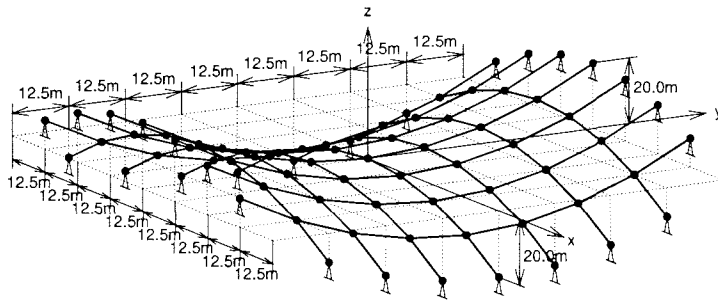


図-6 固定境界ケーブルネットの初期形状

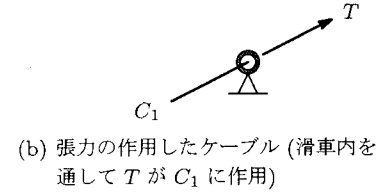
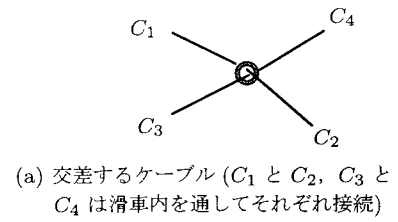


図-7 滑車を通るケーブルのモデル化

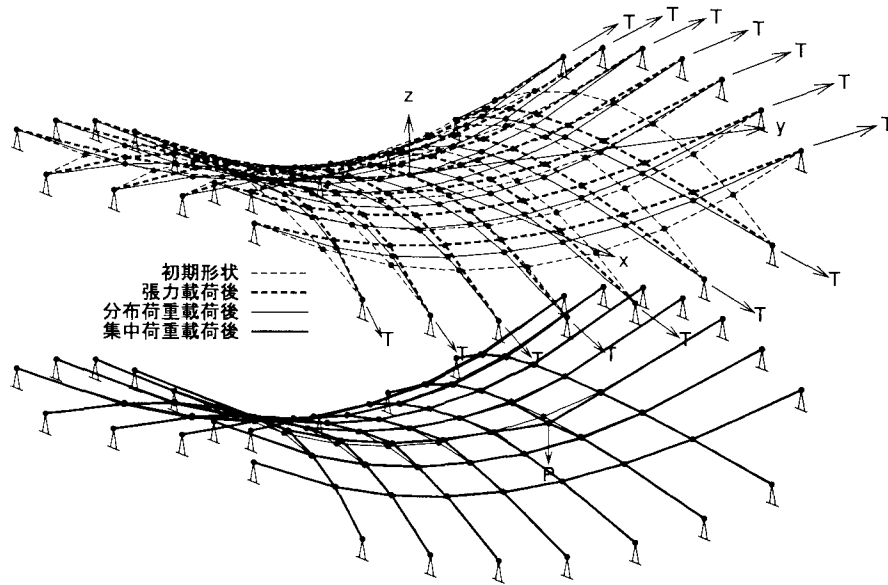


図-8 固定境界ケーブルネットの計算結果

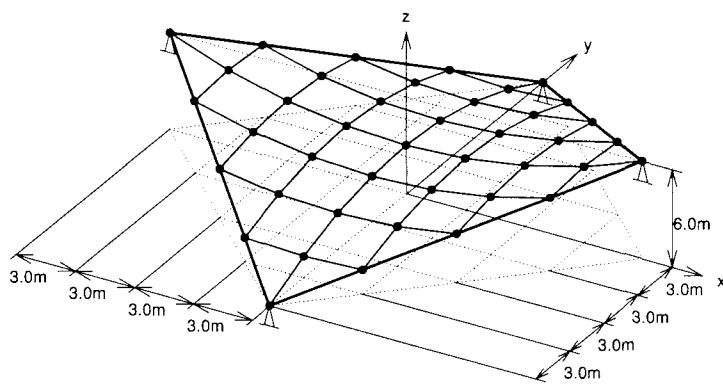


図-9 境界ケーブルを有するケーブルネットの初期形状

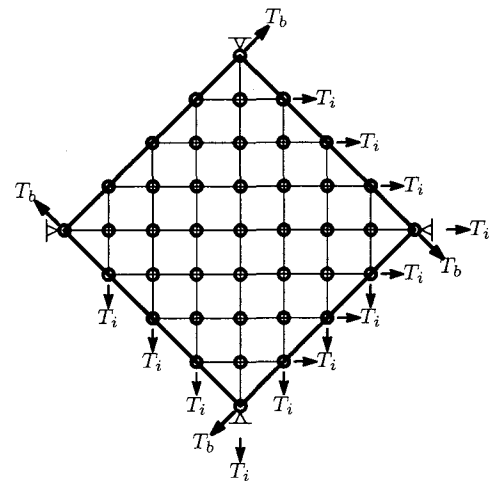


図-10 境界ケーブル、内部ケーブルの張力

T_r をケーブル C_1 に作用させる。内部ケーブル C_3 と C_4 にはそれぞれ滑車内を通して張力 T_i が作用している。ただし、 C_3 と C_4 は接続されていない。なお、これらの張力 T_r の大きさは、3.4 節の方法で求められる。

図-12 の細破線は、ケーブルプレストレス力を用

させたときの形状を、細実線はさらに自重に相当する等分布荷重を作用させたときの形状を表している。これでケーブルの形状決定が行われたので、境界ケーブル上の滑車の z 軸方向変位の拘束を開放し、すべての滑車部での滑り変位を拘束して、構造解析の一例とし

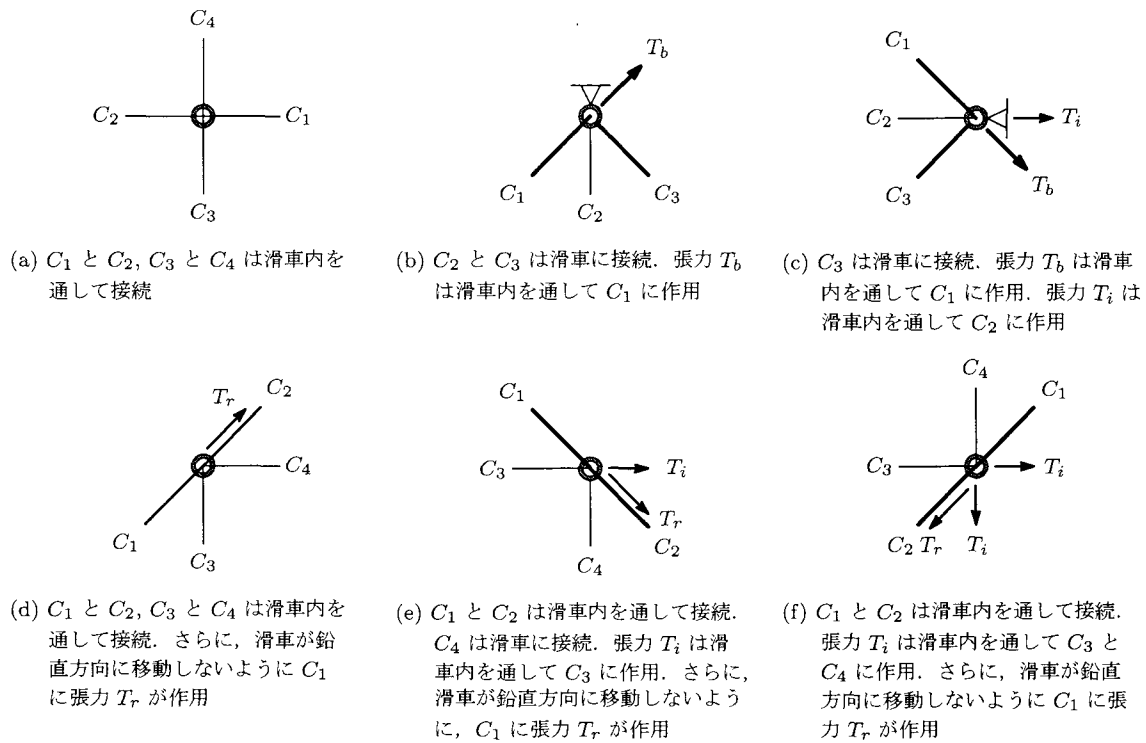


図-11 境界ケーブル, 内部ケーブルの滑車のモデル化

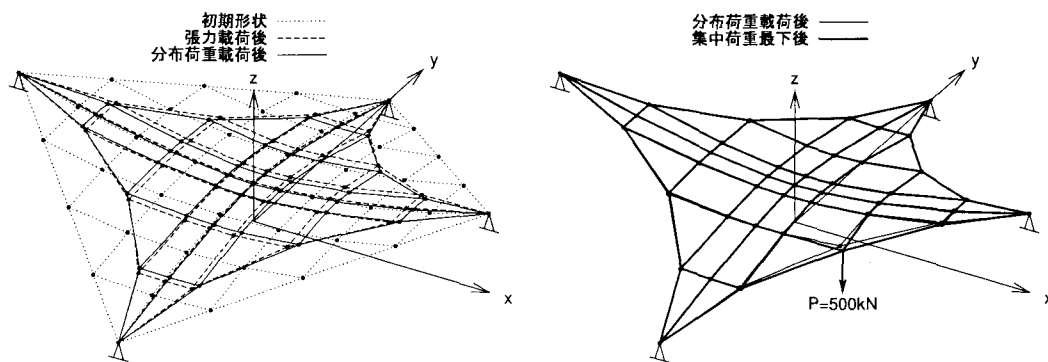


図-12 境界ケーブルを有するケーブルネットの計算例

て, 境界ケーブル上の節点に集中荷重 $P=500\text{kN}$ を作用させたときの変形状態を図に太実線で示している.

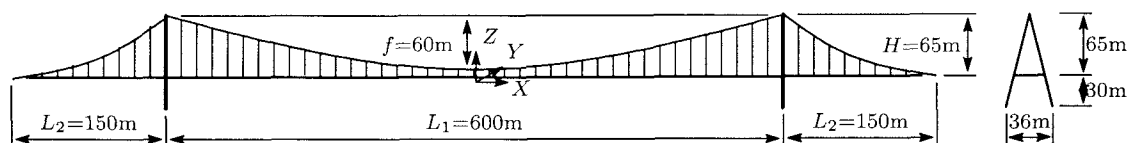
このように, 等張力状態での形状決定だけでなく, 滑車の移動を拘束する制約条件を与えての形状決定も, 境界条件を変えるだけで行える.

4.3 吊橋

吊橋の計算例として, 桁自重の作用下で図-13 のような諸元の MONO-DUO 形式吊橋を対象とする. 図中のハンガーケーブルは, 15m 間隔で取り付けられている. この吊橋の形状決定を行うために, ここでは図-14 のような初期形状を用い, 以下のような条件下での形状決定を行う.

- 塔には曲げが発生しない.
- 桁とハンガーの接続位置は鉛直方向に移動しない.
- ハンガーは橋軸方向に傾かない.
- 主ケーブルのサグは $f=60\text{m}$ とする.

これらの条件は, 図-15 のような滑車のモデル化を行うことで実現できる. 桁自重により塔に曲げモーメントが生じないよう (図 (a)) に, 塔と主ケーブルの取り付け位置に滑車を導入し, 塔 C_3 は滑車に接続, 主ケーブル C_1 と C_2 は滑車内を通して接続する. このときの滑車には, C_1 と C_2 の橋軸方向の分力が等しくなるような条件を与える. 桁が自重により鉛直方向に移動しないよう (図 (b)) に, 桁 C_1 - C_2 とハンガーケーブル C_3 の接続位置に滑車を導入し, ハンガーは滑車内を通して, 滑車の鉛直変位がゼロになるような張力 T_r を与える. ハンガーが橋軸方向に傾かないよう (図 (c)) に, 主ケーブルとハンガーの接続位置に滑車を導入し, ハンガー C_3 は滑車に接続, 主ケーブル C_1 と C_2 は滑車内を通して接続し, 主ケーブル C_1 に張力 T_r を与える. また, 主ケーブルのサグを所定の値にするため (図 (d)) に, 主ケーブルの端部にも滑車を導入し, 滑車内を通して主ケーブル C_1 には張力 T_m を与える. これらの張力 T_r , T_m は 3.4 節の方法により決定される.



主ケーブル : $E=200\text{GN/m}^2$, $A=0.13\text{m}^2$
 ハンガーケーブル : $E=140\text{GN/m}^2$, $A=0.0025\text{m}^2$
 桁 : $E=200\text{GN/m}^2$, $A=0.30\text{m}^2$, $I_Y=0.35\text{m}^4$, $I_Z=35\text{m}^4$, $J=1\text{m}^4$
 塔 : $E=200\text{GN/m}^2$, $A=0.6\text{m}^2$, $I_Y=I_Z=5\text{m}^4$, $J=3\text{m}^4$

図-13 吊橋の諸元と形状

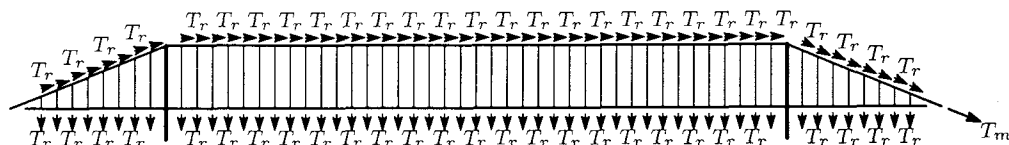


図-14 吊橋の初期形状とケーブルプレストレス

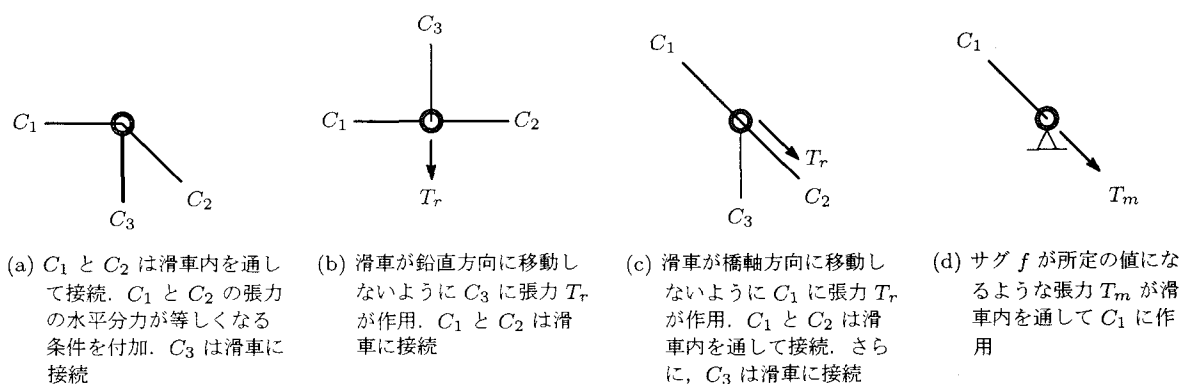


図-15 吊橋の滑車のモデル化

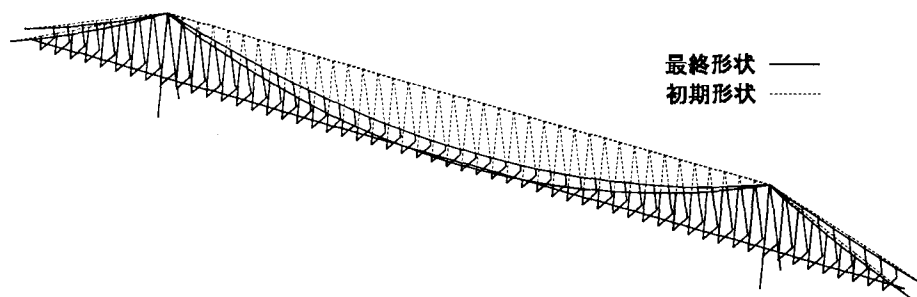


図-16 吊橋の形状決定後の形状

図-16 に, 桁自重を想定した $w_d=70\text{kN/m}$ の等分布荷重を桁に作用させたときの形状決定後の吊橋形状を示す. また, 図-17, 18, 20 には, 形状決定を終えた吊橋の滑車をすべて固定し, 活荷重を想定した $w_l=10\text{kN/m}$ の等分布荷重を桁に作用させたときの桁, 主ケーブル, ハンガーの断面力も示している.

4.4 斜張橋

斜張橋の計算例として, 桁自重の作用下で図-19 のような諸元の斜張橋を対象とする. この斜張橋の形状決定を行うために, 図-19 のような初期形状を用い, 以下のような条件下での形状決定を行う.

- 塔には曲げが発生しない.

- 桁とケーブルの接続位置は鉛直方向に移動しない.

塔に曲げの生じないようなモデル化は, 吊橋の場合と同様, 塔とケーブルの接続位置に, ケーブルの水平分力が等しくなるような滑車を導入すると良い. 一方, 塔から桁に接続された 2 本のケーブルの桁位置での鉛直移動を止めるために図-21(a) のように左右の節点に滑車を導入すると, 塔とケーブルの接続位置にも滑車が導入されているために, ケーブルの滑り変位を拘束する節点が無くなり, 剛性行列が特異になることに注意する必要がある. したがって, 上述の 2 種類の条件を厳密に満足する形状決定は行えない. これは, 桁の鉛直移動を止めるために, ケーブルを滑車内を通して, 滑車の鉛直移動がゼロになるように張力 T_{r1} , T_{r2}

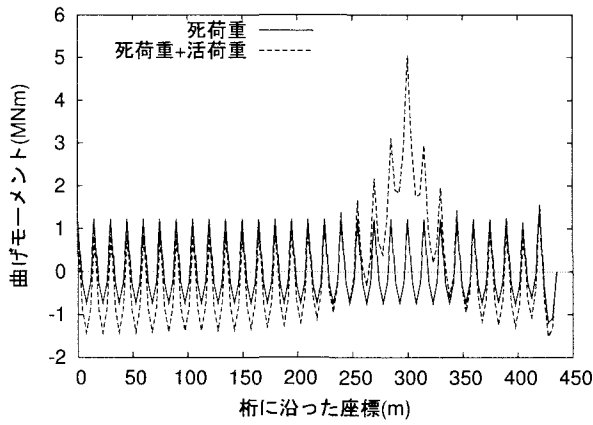


図-17 吊橋の桁の曲げモーメント

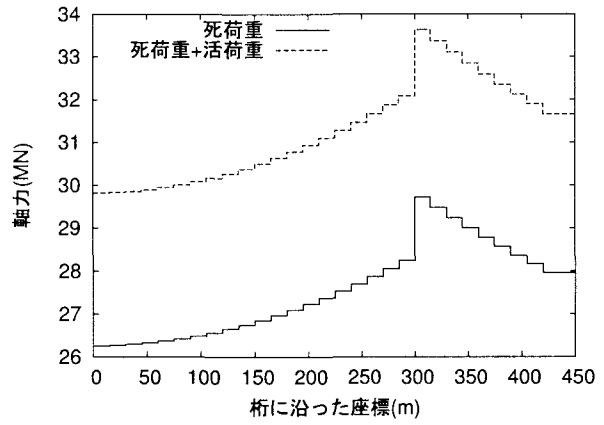


図-18 吊橋の主ケーブルの軸力

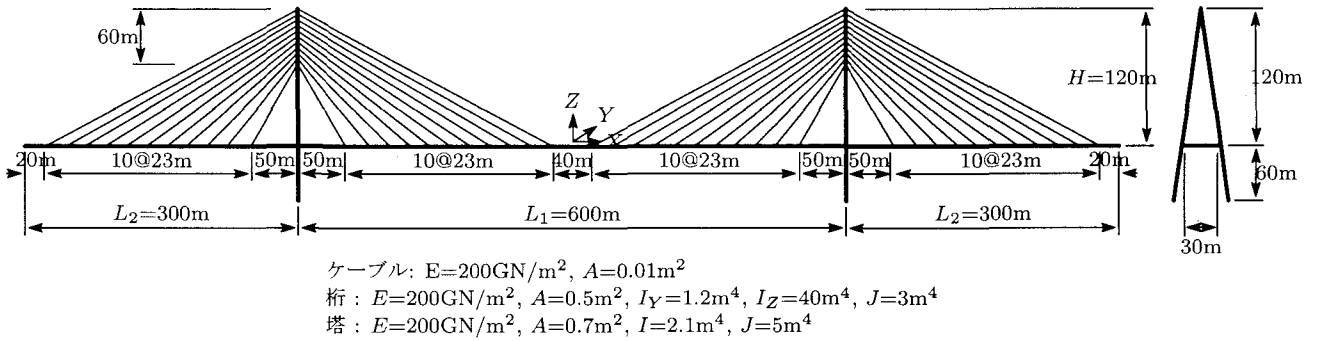


図-19 斜張橋の諸元と形状

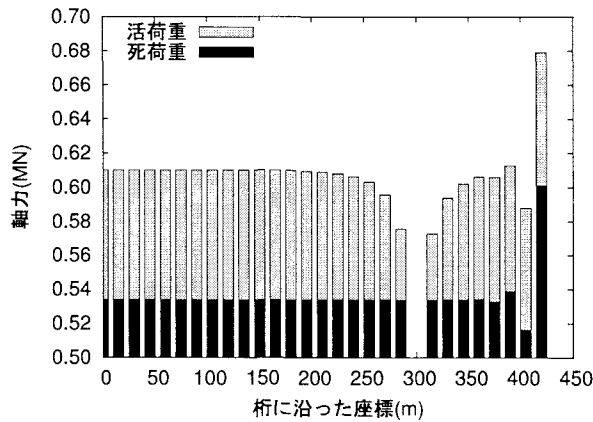


図-20 吊橋のハンガーケーブルの軸力

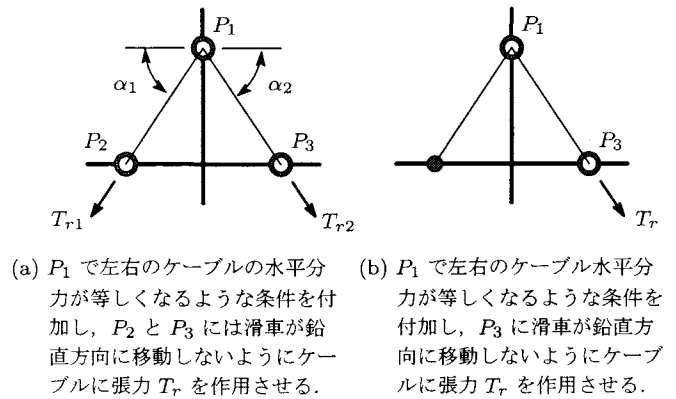


図-21 斜張橋の滑車のモデル化

を決めることになるが、2本のケーブルの塔位置での水平分力が等しくなる条件も含まれるため、張力には $T_{r1} \cos \alpha_1 = T_{r2} \cos \alpha_2$ (α_1, α_2 はケーブルの傾斜角) の関係が生じ、 T_{r1} と T_{r2} に従属関係が生じるために、前後の2箇所の桁とケーブルの接続位置の鉛直変位が、両方ともゼロになるような張力を決められないことと関連している。そこで、同図 (b) のように、一方のケーブルの桁との接続位置にだけ滑車を導入し、鉛直変位がゼロになるような条件を 3.4 節の方法により求めることにする。

図-22 は形状決定後の形状を示している。斜張橋の場合には、自重が作用してもケーブル形状が大きく変化することはないため、初期形状と最終形状にはほと

んど違いが見られない。自重を想定した $w_d=70\text{kN/m}$ の分布荷重と形状決定後に全ての滑車の滑り変位を拘束した後に、活荷重を想定した $w_l=10\text{kN/m}$ の分布荷重を作用させたときの桁の曲げモーメントとケーブルの張力が、図-23, 24 に示されている。

5. あとがき

本論文は、著者らの開発したケーブル要素を元に、軸力が等しくなる条件の他に、任意な方向の軸力成分が等しくなるような滑車を含んだ要素、滑車部でケーブルに直接、張力を作用させる方法、任意の変位成分が規定の値になるように滑車部でのケーブル張力を決め

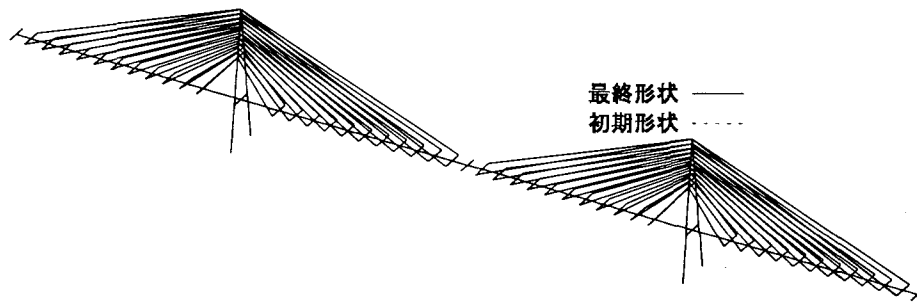


図-22 斜張橋の形状決定後の形状

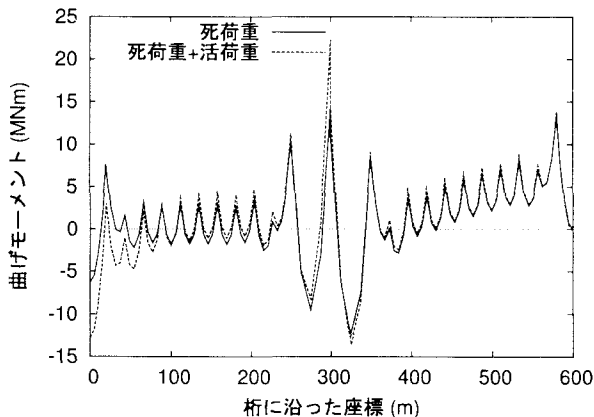


図-23 斜張橋の桁の曲げモーメント

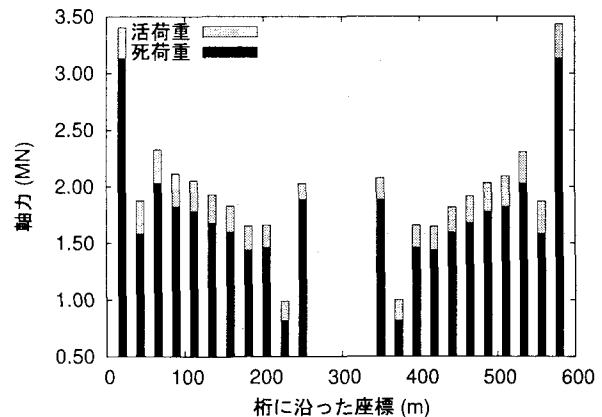


図-24 斜張橋のケーブルの軸力

る方法を開発し、ケーブルネット、吊橋、斜張橋に適用し、種々のケーブル構造の形状決定に適用できることを示した。

本論文で扱っている滑車を用いた形状決定法は、形状決定と構造解析が同一の手法で行うことができるため、簡便にケーブル構造の解析が行える特徴を有している。

参考文献

- 1) 中西 宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第318号, pp.41-50, 1982.
- 2) 謝 旭, 伊藤 学, 山口広樹: Updated Lagrangian手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995年3月.
- 3) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第260号, pp.17-32, 1977.
- 4) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, 第270号, pp.41-49, 1978.
- 5) M. Ai and Y. Ohsumi: The elastic catenary as a displacement-method element, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng., JSCE*, No. 661/I-53, pp.241-246, 2000.
- 6) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析 その(2) 幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第220号, pp.35-45, 1974.
- 7) B. M. McDonald and A. H. Peyrot: Analysis of Cable Suspended in Sheaves, *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol.114, No.3, 1988.
- 8) M. Aufaure: A Finite Element of Cable Passing Through a Pulley, *Computers & Structures*, Vol.46, No.5, pp.807-812, 1993.
- 9) 中西 宏, 波田凱夫: 最適値問題の手法による吊構造の形状決定解析, 日本建築学会論文報告集, 第238号, pp.13-23, 1975.
- 10) Y. Namita and H. Nakanishi: Optimum design analysis of structural cable networks, *Proc. of JSCE*, No.432/I-16, pp.21-30, 1991.
- 11) M. Ai and H. Imai: A shape-finding analysis of suspended structures on the displacement-method equilibrium, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng., JSCE*, No. 752/I-66, pp.27-41, 2004.
- 12) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.3.
- 13) Dang Tung Dang, 岩崎英治, 長井正嗣: ケーブル構造の等張力場における形状決定と構造解析, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.265-276, 2005.3.
- 14) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.8.

(2005年4月15日 受付)