

差分に基づく骨組構造物の応答設計感度係数の精度向上に関する一手法

A method about improvement of accuracy of response design
sensitivity coefficients of framed structures computed by finite difference

樋口幸太郎*, 新延泰生**, 山本学***, 入部佳正****

Kotaro HIGUCHI and Yasuo NIINOBE and Manabu YAMAMOTO and Yoshimasa IRIBE

*学生会員 工修 東洋大学研究生 工学部環境建設学科 (〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100)

**正会員 工博 東洋大学教授 東洋大学工学部環境建設学科 (〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100)

***学生会員 学士 東洋大学大学院 東洋大学大学院工学研究科 (〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100)

****学士 東洋大学大学院 東洋大学大学院工学研究科 (〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100)

It is found that the sum of response design sensitivity coefficients multiplied by sensitivity variables over the whole structure equals the product of a constant and response value⁽¹⁾. Sensitivity coefficients are required in engineering problems such as structural design, optimum design and back analysis. Exact sensitivity coefficients can be computed by sensitivity analysis, but its computational cost is considerably high especially when many iterations are needed. For that reason, practically, sensitivity coefficients are computed approximately by finite difference.

This paper proposes a very simple method of improvement of accuracy of approximate sensitivity coefficients computed by finite difference, using properties of sensitivity coefficients. And also the validity of this method is stated from the computational examples.

Key Words : *response design sensitivity coefficients, properties of sensitivity coefficients, finite difference, improvement of accuracy, framed structures*

1. はじめに

筆者等は、線形弾性構造物の応答感度係数に感度変数を乗じ構造物全体について足し合わせたものが応答値の定数倍となる(感度係数特性)ことを述べた^{1), 4)}。この応答感度係数特性は、計算された感度係数の精度のチェックに利用できるが、本研究では、この感度係数特性を用いて、差分で求めた感度係数の精度を向上するきわめて簡単な一方法を述べる。

感度解析は、種々の最適化問題や逆解析問題など幅広く利用されている。例えば、構造物の最適設計では、外力による変位や応力などの応答あるいは固有振動数、固有モードなどの動的特性が制約条件となり、それらの設計変数に関する偏微分すなわち設計感度係数が必要となる。解析的に感度解析を行えば厳密な設計感度係数が得られるが、一般には、感度解析にかなりの計算時間を要するのが実状である。したがって、実際には、差分法によって近似的に感度係数を求めることが多い。しかし、精度の良い感度係数を得るには感度変数の変動量を0.01 % 程度に抑える必要があり、反復計算を要する問題

では多大の応答解析を繰り返さなければならない。また、一方で変動量を微小にしていくと数値計算上不安定になる場合もある²⁾。

差分による感度係数そのものの精度は、感度変数の変動量を数値計算上の不安定が生じない範囲で微小にすればする程、上がることは明白である。本研究で提案する考え方を適用することが有効な場合は、それほど高い精度を必要としない概略的あるいは中間的な設計過程、または最適化計算や逆解析での反復計算過程で収束解の近傍に至る途中と考えられる。このような状況では感度変数の変動量を微小にすればする程、反復過程で多大の応答解析を行うことになる。このような場合、感度変数の変動量をある程度大きくして差分による感度係数の精度を上げることにより応答解析の回数を減らすことが可能となり有効性が発揮されるものと考えられる。

本研究では、感度係数が前述の応答感度係数特性を満足することを利用し、感度変数の変動量を数%にして差分法で求めた近似的な感度係数の精度を向上する方法を以下に述べることにする。なお、説明を簡単にするために2次元骨組構造物を対象として述べるが、3次元骨組

構造物また一般の線形弾性構造物に対しても同様な考え方が可能である。なお、本論文で提案する考え方については、著者が調べた限りでは類似の文献はなく新しい提案である。

本論文は5つの章から構成されている。すなわち、第2章で差分による感度係数の計算方法を述べ、第3章でそれらの差分に基づく感度係数の精度向上方法について述べている。なお、この方法のもとになっている感度係数特性については Appendix に記述している。第4章では第3章で述べた精度向上方法の有効性を数値計算例を通して述べている。最後に第5章で本研究で得られた結論を述べている。

2. 差分法による感度係数の近似計算

差分法によれば、関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(x)$ は、変数 x の微小変動 Δx ($\Delta x > 0$)を用いて、

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3)$$

で表される。

微小変動 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限が微分係数(厳密解)となるので、 Δx が微小なほど差分で求めた微分係数と厳密解との差は少ない。式(1)が前進差分、式(2)が後進差分、式(3)が中央差分である。本研究では、精度のうえから式(3)の中央差分を用いている(4章で精度について言及している)。

本論文の応答設計感度係数の近似計算では、 $f(x)$ を応答変位あるいは応答断面応力とし、変数 x は部材断面積としている。

3. 感度係数特性を応用した差分近似感度係数の精度向上法

既に述べたとおり、差分法により求められた感度係数は厳密解の近似値である。しかし、精度の良い感度係数を得るためには感度変数の微小変動 Δx を0.01%程度に抑える必要があるが(藤谷,松本³⁾、反復計算を必要とする問題では多大の応答解析を繰り返さなければならない。また変動量を微小にしていくなると数値計算上不安定になることがある。そこで、本研究では感度係数が応答感度係数特性を満足することを利用し、感度変数の変動 Δx が数%の場合でも、差分法で求められた近似的な感度係数を修正することで感度係数の精度を向上する一手法を提案する。

感度変数が A_i のとき、差分法に基づく感度係数の精度向上法について考える。なお、ここで対象とする構造モデルは平面骨組構造とし、修正する感度係数は節点変位と断面応力の感度係数とする。

感度変数 X_i を断面積 A_i とする節点変位の感度係数特性

は Appendix 式(26)より、

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_a A_i = -z_h \quad (4)$$

で表される。式(4)において $(*)_a$ は解析的に導かれた厳密な感度係数である。

差分法により求められた感度係数を近似感度係数 $(*)_d$ とし、骨組要素全体について i から m まで総和をとったものを次のように定義する。

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_d A_i = -\tilde{z}_h \quad (5)$$

ここで、式(5)の両辺に $z_h/\tilde{z}_h$ を乗じて、

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_d \left(\frac{z_h}{\tilde{z}_h} \right) A_i = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_c A_i = -z_h \quad (6)$$

ただし、

$$\left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_d \left(\frac{z_h}{\tilde{z}_h} \right) = \left(\frac{\partial z_h}{\partial A_i} \right)_c \quad (7)$$

である。式(7)において、 $(*)_c$ が差分法による近似感度係数 $(*)_d$ を修正して得られた感度係数で、修正感度係数と呼ぶこととする。断面応力の修正感度係数についても同様に導くことが可能である。

$$\left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial A_i} \right)_d \left(\frac{\sigma_j}{\bar{\sigma}_j} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial A_i} \right)_c \quad (8)$$

本手法は Appendix 式(20)から分かるように感度係数が応答値に比例することに基づいている。また、本手法は任意の骨組構造物についても適用できる。

4. 数値計算例

数値解析モデルとして25部材トラス(図-1)、25部材ラーメン(図-7)および15部材ラーメン(図-8)を取り上げる。数値計算では、まず、25部材トラスモデルを用いて、後進・中央・前進差分の精度の比較を行い、中央差分の精度が他より良好であることを示す。次に、中央差分を用いて、感度変数(断面積)の変動量を1.0%、3.0%、6.0%、9.0%とした場合の近似的な応答感度係数を求めた。そして、第3章で提案した感度係数特性を応用した感度係数の精度向上法により修正応答感度係数を導き、感度解析から得られる厳密な応答感度係数と比較する。

本研究では、個々の厳密な感度係数に対する近似感度係数と修正感度係数の精度を比較する代わりに、ノルムを用いて全体的な比較を行っている。各ノルムの値を次のように定義する。

$$N_a = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_i} \right)_a^2} \quad (9)$$

$$N_{d-a} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_i} \right)_d - \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_i} \right)_a \right]^2} \quad (10)$$

$$N_{c-a} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_i} \right)_c - \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_i} \right)_a \right]^2} \quad (11)$$

式(9)において $(*)_a$ は厳密解で、自由度番号 h の節点変位の感度係数ベクトル $\partial z_h / \partial X_i = (\partial z_h / \partial X_1, \partial z_h / \partial X_2, \dots, \partial z_h / \partial X_m)$ の要素を示し、すべての要素を二乗し骨組全体の総和を

とったものの平方根をノルム N_a とする．ノルムを用いることで構造全体に対しての誤差の比較が可能となる．式(10)は近似感度係数 $(*)_a$ と厳密解 $(*)_n$ の差を要素に持つベクトルについてのノルム N_{d-a} を示す．また，式(11)は修正感度係数 $(*)_c$ と厳密解 $(*)_n$ の差を要素に持つベクトルについてのノルム N_{c-a} を示す．以下の数値計算例では， N_{d-a}/N_a と N_{c-a}/N_a の比較を行い，

$$\frac{N_{c-a}}{N_a} < \frac{N_{d-a}}{N_a} \quad (12)$$

が成立し，差分法により得られた近似感度係数が本手法により修正され，より厳密解に近い修正感度係数が得られることを示す．

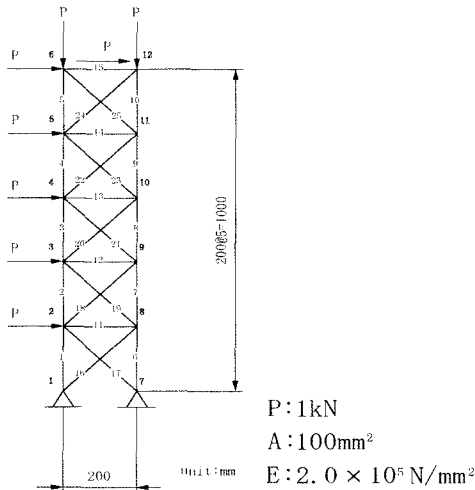


図1 モデル1 (25部材トラス)

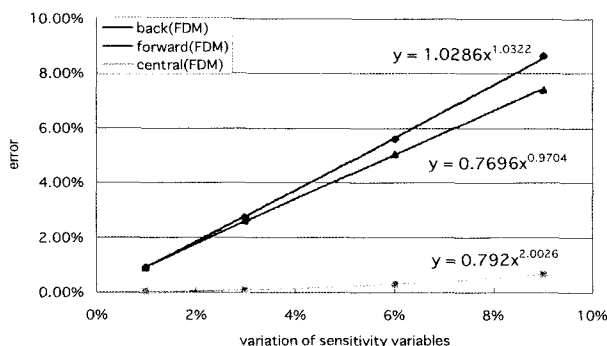


図2 後進・中央・前進差分の誤差比較

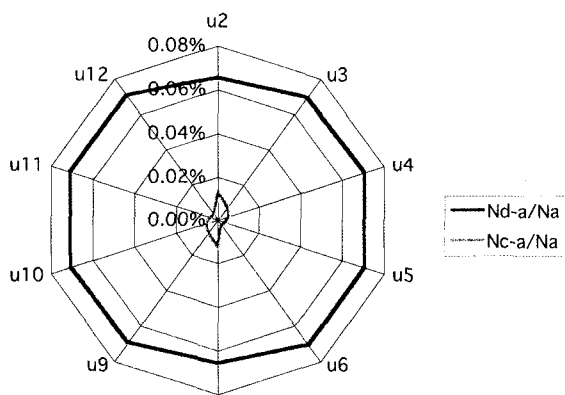


図3 モデル1 水平変位成分ノルム比較

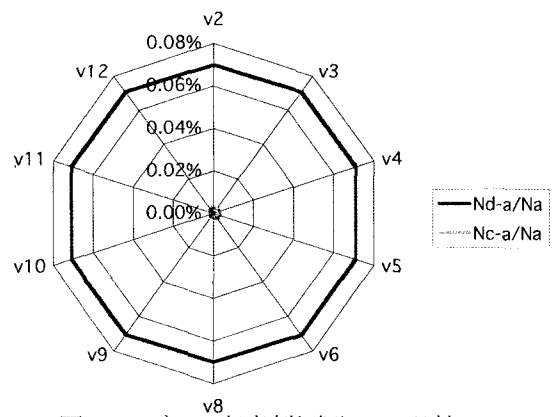


図4 モデル1 鉛直変位成分ノルム比較

4.1. 後進・中央・前進差分の精度比較

図1に示す25部材トラスを用いて3種類の差分法における精度の比較を行う．具体的には，差分を行う際の設計変数変動量を変化させたとき，後進・中央・前進差分，それぞれノルムにおいて厳密解との誤差を比較する．図2は各差分法で求めた水平成分U6の感度係数ノルムについて厳密解との誤差を比較したものである．横軸に感度変数変動量，縦軸に厳密解との誤差をとっている．数式は累乗近似したときのものである．グラフを見てわかるように中央差分の誤差が最も小さいことがわかる．累乗近似した数式から中央差分は2乗曲線的，前進・後進差分は線形的であることがわかる．以降円グラフで示す解析結果は変動率3%の中央差分によるものである．

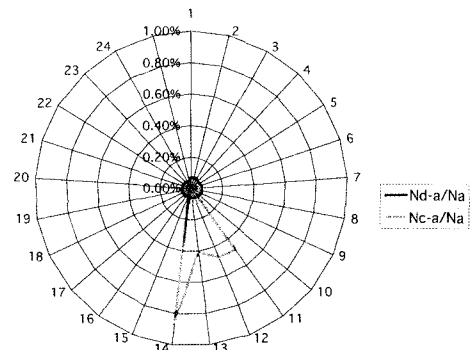


図5 モデル1 軸力ノルム比較

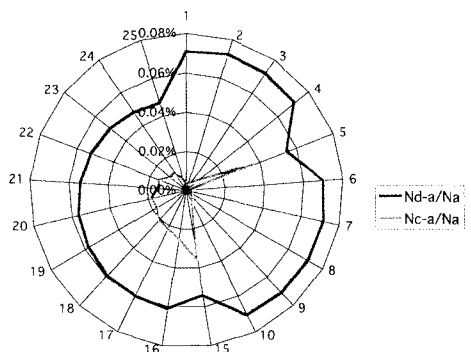


図6 モデル1 部材11～14を除いた軸力ノルム比較

4.2. トラス構造

図-1 に示す 25 部材トラス(以下、モデル 1 と呼ぶ)について解析を行う。円グラフの見方は、青いラインが中央差分と厳密解との誤差、赤いラインが中央差分を修正したものと厳密解との誤差である。青いラインより内側に赤いラインがあれば、良好に修正が行われていることを示すものである。

はじめに、変位感度係数の誤差比較を行う。ノルムを使って、構造全体に対しての誤差比較を行う。図-3、図-4は変位感度係数ノルム(差分・修正差分)の誤差比較である。円周上の項目は変位成分である。変位感度係数ノルムは水平・垂直成分ともに良好な修正が行われている。

次に、応力感度係数の誤差比較を行う。図-5 は軸応力感度係数ノルム(差分・修正差分)の誤差比較である。円周上の項目は軸応力の働く部材番号である。図-6 は図-5 から部材 11~14 のノルムを除いたものである。部材 11~14 を除くすべての箇所では修正されている。

部材 11-14 の軸応力は極めて小さく、したがって感度係数も非常に小さい。このことから変位、応力などの応答値が小さい場合は感度係数も小さく、本手法による修正は困難といえる。一方応答値が大きく感度係数も大き

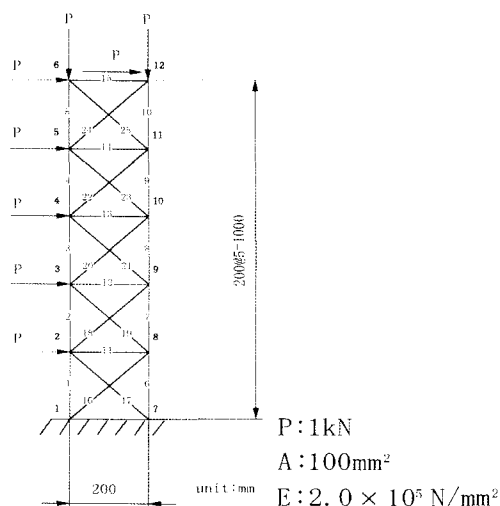


図-7 モデル2 (25 部材オラメン)

い場合は修正度が高いといえる。構造物の部材構成から見た場合、応答値が大きく感度係数も大きい部材が支配的となり、応答値が小さく感度係数が小さい部材は主要部材にはならないと考えて良い。設計上から見てもあまり問題とはならないものと考えられる。

4.3. ラーメン構造

図-7 に示す 25 部材ラーメン構造物(以下モデル 2 と呼ぶ)、図-8 に示す 15 部材ラーメン構造物(以下モデル 3 と呼ぶ)について解析を行った。モデル 3 はモデル 2 の斜材を省いたものとなっている。はじめに、変位感度係数の誤差比較を行う。誤差比較はトラス構造物のときと同様にノルムを使って、構造全体における誤差として厳密解との比較を行う。次に、応力感度係数の誤差比較を行う。円グラフの見方は、これもトラス構造物のときと同様に青いラインが中央差分と厳密解との誤差、赤いラインが中央差分を修正したものと厳密解との誤差である。

図-9、図-10 はそれぞれモデル2 およびモデル3 の解析結果である。図-3、図-4 と同様のグラフであり、変位感度係数をノルムで誤差比較したものである。

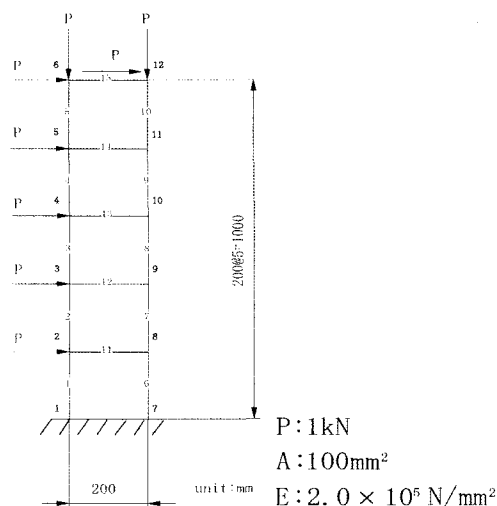


図-8 モデル3 (15部材ラーメン)

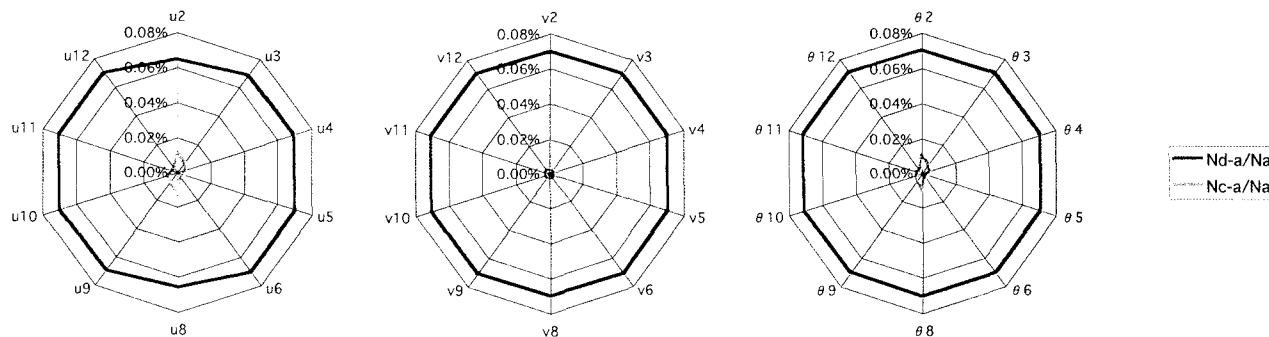


図-9 モデル2 変位成分ノルム比較(水平・鉛直・回転)

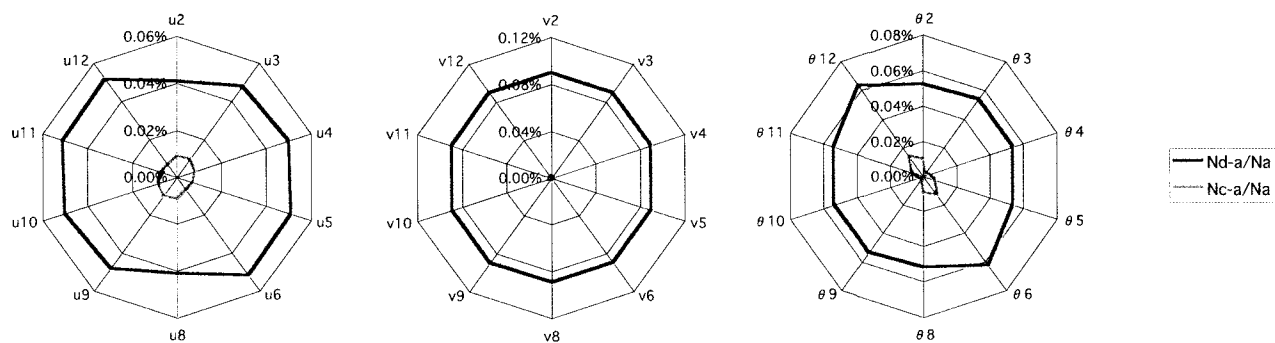


図-10 モデル3 変位成分ノルム比較(水平・鉛直・回転)

これもすべての変位成分において、青い線(中央差分)の内側に赤い線(修正差分)が存在しており、良好に修正されているのがわかる。

次に、応力感度係数の誤差比較は紙面の都合上、曲げ応力感度係数のノルム比較について以下に述べる。図-11はモデル2、図-12はモデル3の曲げ応力感度係数ノルムの誤差比較である。円周上の数字は曲げ応力の働く部材番号である。図-11から修正にばらつきはあるものの全体的にみると修正されていることが分かる。部材24の箇所が修正操作を行うことによって精度の悪化を起こしているが、4.2節のトラス構造と同様に、応力の応答値が小さいところである。部材24の応力の値は -0.880 N/mm^2 で、最大の -29.9 N/mm^2 に対して3%程度の大きさである。図-12はすべての箇所で良好に修正が行われている。

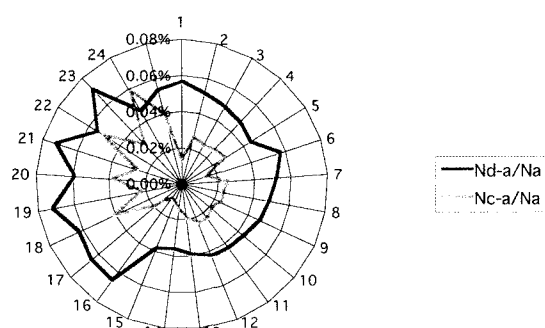


図-11 モデル2 曲げ応力感度係数ノルム比較

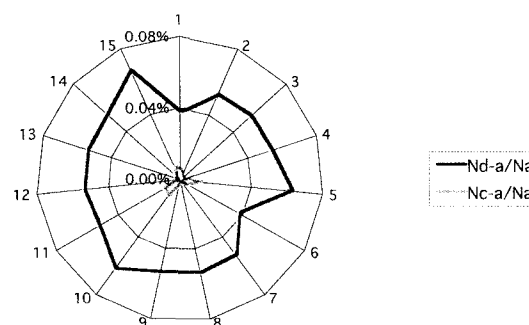


図-12 モデル3 曲げ応力感度係数ノルム比較

4.4 感度変数変動量の割合が誤差に及ぼす影響

感度変数変動量を変化させ、差分感度係数ノルムと修正差分感度係数ノルムの誤差の推移を変位感度係数ノルム(水平成分)、応力感度係数ノルム(部材1)で比較する。モデル1の解析結果を図-13、図-16に、モデル2の解析結果を図-14、図-17に、モデル3の解析結果を図-15、図-18に示す。図中の数式は誤差推移を累乗近似によって表したものである。修正することにより、誤差増加量が大きく抑えられているのがわかる。累乗近似した数式を見るとすべての変数の指数部分はほぼ2乗と考えられるので、係数から修正割合が分かる。図-13、図-14においては修正することによって誤差は約1/23、図-15は約1/8、図-16は1/24、図-17は1/4、図-18は1/7となっていて、この数値は感度変数の変動量とは無関係である。

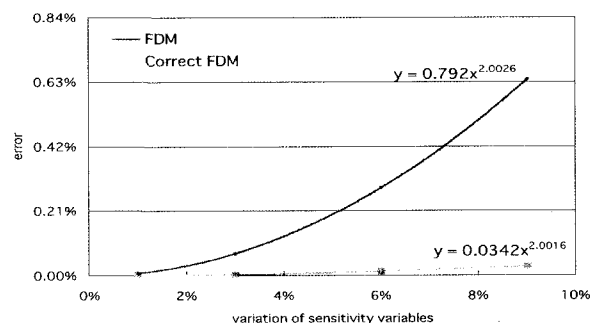


図-13 モデル1 感度変数変動量における
差分・修正差分の誤差比較(変位ノルム-U6)

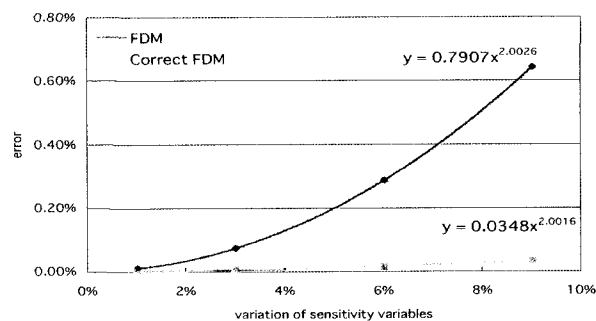


図-14 モデル2 感度変数変動量における
差分・修正差分の誤差比較(変位ノルム-U6)

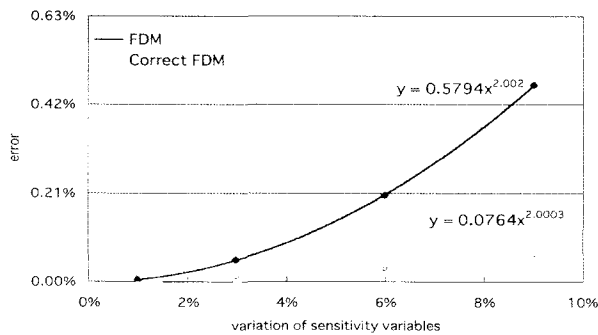


図-15 モデル3 感度変数変動量における
差分・修正差分の誤差比較(変位ノルム- U_6)

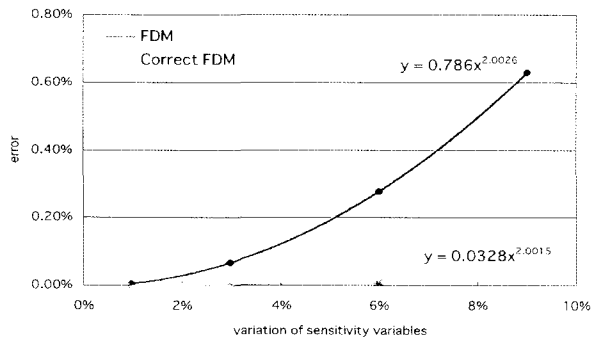


図-16 モデル1 感度変数変動量における差分・修正差分
の誤差比較(軸応力感度係数ノルム- σ_{x1})

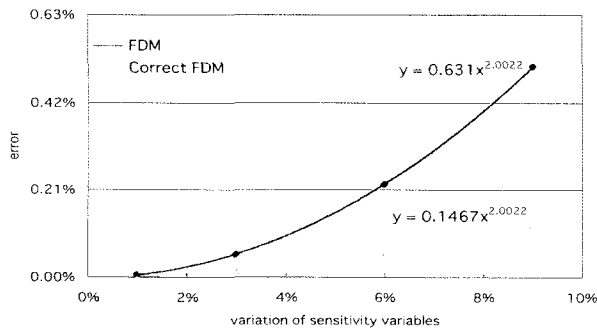


図-17 モデル2 感度変数変動量における差分・修正差分の
誤差比較(曲げ応力感度係数ノルム- σ_{y1})

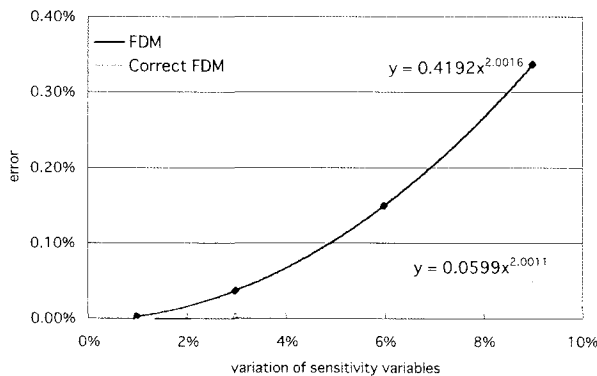


図-18 モデル3 感度変数変動量における差分・修正差分
の誤差比較(軸応力感度係数ノルム- σ_{x1})

5. おわりに

本研究では、平面骨組構造物における感度係数特性を応用することにより、差分法による近似感度係数の精度を向上させる方法について新しい提案を行い、数値計算例を通して手法の有効性を検証した。また、3つの差分法の精度比較において、25部材トラスモデルを例に前進差分、中央差分、後進差分による近似感度係数を求め、それぞれの近似感度係数の厳密解に対する誤差量を具体的数値で表し、それぞれの近似感度係数の精度比較を行った。以下、4.1節～4.4節の数値計算結果から、具体的に得られた事項を列記すると、

1. 修正感度係数の修正度は感度係数の値が大きいほど高くなる。
2. 修正感度係数の修正度は感度変数の変動量とは無関係である。
3. トラス構造物では変位、応力ともに修正感度係数の修正度は同程度であるが、ラーメン構造物では、変位に比較して応力の修正感度係数の修正度は低下する。これは、断面力に基づく応力が変位に比較して微分の次数が上がるのに対して差分近似は式(3)の2点差分をとっていることによるものと考えている。
4. 差分近似感度係数の精度は、前進差分、中央差分、後進差分の中で中央差分によるものが高い。

本論文では感度変数の変動量を1.0%～9.0%としているが、実際の問題に当たっては変動量をどの程度抑えればよいかは一般的には言えないが、本手法により精度が向上することは確認できた。また本手法は式(7)により比例計算をするだけで修正感度係数が得られるので、きわめて計算が簡単であることを付記しておきたい。今後は、この手法を反復計算過程で多数の感度解析を必要とする最適化問題、逆解析などに適用し有効性を検討したい。

本研究を進めるにあたり、当研究室を卒業された佐々木亮氏に御助力頂いた。ここに記して謝意を表します。

Appendix. 骨組構造物の静的感度解析

以下に Appendix として感度解析の定式化と感度係数の特性について文献 4) をもとに記述する。

1. 感度解析 変位法による骨組構造物の状態方程式は、

$$K(X)z = F \quad (13)$$

で表される。式(13)において、 $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ は感度変数ベクトル、 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ は節点変位ベクトル、 $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$ は節点外力ベクトルである。 K は $n \times n$ の剛性マトリクスで、感度変数 X の関数である。式(13)を任意の感度変数 X_i で偏微分すると、

$$K \frac{\partial z}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} z \quad (14)$$

が得られる。式(14)において、 $\partial \mathbf{z} / \partial X_i$ は節点変位の感度係数ベクトルで、 X_i の単位変動量にもなう $\mathbf{z}$ の変化量を表す。式(14)は式(13)と同じ形をしているので $\partial \mathbf{z} / \partial X_i$ を求めるのは容易である。

j 部材の断面力 $\mathbf{r}_j$ は、

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{0j} + \mathbf{k}_j \mathbf{z}_j \quad (15)$$

で表される。式(15)において、 $\mathbf{k}_j$ は第 j 部材の要素剛性マトリクスで、 $\mathbf{z}_j$ は第 j 部材の節点変位ベクトルを表す。また、式(15)の右辺第1項は自重や温度変化による断面力を示し、第2項は節点変位に伴う断面力を示す。式(15)を任意の感度係数 X_i で偏微分すると、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial X_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_{0j}}{\partial X_i} + \frac{\partial \mathbf{k}_j}{\partial X_i} \mathbf{z}_j + \mathbf{k}_j \frac{\partial \mathbf{z}_j}{\partial X_i} \quad (16)$$

となる。式(16)において、 $\partial \mathbf{r}_j / \partial X_i$ は断面力の感度係数ベクトルで、 X_i の単位変動量にもなう $\mathbf{r}_j$ の変化量を表す。以下、自重や温度変化の影響に無視し、式(16)右辺の第1項は削除する。

次に、感度変数 X_i を部材断面積 A_i とした場合の断面応力の感度係数を誘導する。断面応力は部材 j において軸力を N_j とすると、軸応力 $\sigma_{nj} = N_j / A_j$ の感度係数 $\partial \sigma_{nj} / \partial X_i$ は、

$$\frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial A_i} = \frac{\partial N_j}{\partial A_i} \frac{1}{A_j} - \frac{N_j}{A_j^2} \frac{\partial A_j}{\partial A_i} \quad (17)$$

で表される。式(17)において、右辺第一項の $\partial N_j / \partial X_i$ は感度変数 X_i の微小変動による軸力の応答感度係数であり、式(16)の断面力の感度係数ベクトルの軸方向成分である。せん断応力 $\tau_j = k_j Q_j / A_j$ の感度係数 $\partial \tau_j / \partial X_i$ は、

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial A_i} = k_j \frac{\partial Q_j}{\partial A_i} \frac{1}{A_j} - \frac{k_j Q_j}{A_j^2} \frac{\partial A_j}{\partial A_i} \quad (18)$$

で表される。式(18)において右辺第一項の k_j は部材断面の形状に依存する係数で、 $\partial \tau_j / \partial X_i$ は感度変数 X_i の微小変動によるせん断力の応答感度係数であり、式(15)の断面力の感度係数ベクトルのせん断方向の成分である。

曲げ応力 $\sigma_{mj} = M_j / Z_j$ の感度係数 $\partial \sigma_{mj} / \partial X_i$ は、

$$\frac{\partial \sigma_{mj}}{\partial A_i} = \frac{\partial M_j}{\partial A_i} \frac{1}{Z_j} - \frac{M_j}{Z_j^2} \frac{\partial Z_j}{\partial A_i} \quad (19)$$

で表される。式(19)において右辺第一項の Z_j は j 部材の断面係数で、 $\partial \sigma_{mj} / \partial X_i$ は感度変数 X_i の微小変動による曲げモーメントの応答感度係数であり、式(15)の断面力の感度係数ベクトルの回転方向の成分である。

2. 応答感度係数特性 節点外力ベクトルは感度変数の関数でないとは定すれば $\partial \mathbf{F} / \partial X_i = 0$ となり、式(14)より、感度変数 X_i の変動に対する自由度 h 番目の節点変位 z_h の感度係数は、

$$\frac{\partial z_h}{\partial X_i} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{z} \right)_h \quad (20)$$

で表される。式(20)において、 $(*)_h$ は自由度 h 番目に対応する要素を示している。式(20)の両辺に X_i を乗じ、 i について1から m まで総和をとると、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_i} X_i = - \left\{ \mathbf{K}^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right) \mathbf{z} \right\}_h \quad (21)$$

となる。以下で式(21)の右辺は、節点変位 z_h に定数を乗じたものとなることを示し、この定数を特性値 C と呼ぶこととする。

また、 j 部材の断面力 $\mathbf{r}_j$ について、同様に、式(16)の両辺に感度変数 X_i を乗じ骨組全体について i が1から m まで総和をとると、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial X_i} X_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{k}_j}{\partial X_i} X_i \mathbf{z}_j + \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_j \frac{\partial \mathbf{z}_j}{\partial X_i} X_i \quad (22)$$

となる。同様に式(22)の右辺が $C \mathbf{r}_j$ (C :定数)で表されることを以下に示す。

骨組構造物の感度解析において、断面レベルの感度変数 X_i は、部材断面積 A_i 、部材断面二次モーメント I_i 、ねじり剛性 J_i 等が考えられる。本研究では平面トラス構造および平面ラーメン構造を対象とし、感度変数 X_i を部材断面積 A_i とする。

平面トラス構造において、平面トラス構造物の剛性マトリクスの性質から剛性マトリクスを感度変数 A_i で偏微分することは容易である。しかし、平面ラーメン構造の剛性マトリクスの要素には曲げ剛性の成分である断面二次モーメント I_i が含まれており、この断面二次モーメント I_i と断面積 A_i の関係式が必要である。ここでは、断面積 A_i と断面二次モーメント I_i との間に次のような関係を仮定する。

$$I_i = \alpha_i A_i L_i^2 \quad (23)$$

式(23)において、 L_i は要素番号が i 番目の要素の長さであり、細長比を λ_i とすると係数 α_i は $\alpha_i = 1 / \lambda_i^2$ のように表される。文献4)においても述べているが、断面積が与えられて断面形状を決定する部材断面の設計では、細長比 $\lambda_i = L_i / \sqrt{I_i / A_i} = \sqrt{1 / \alpha_i}$ を最初に仮定して設計するケースが多いと考えられる。したがって、断面形状は α_i に依存すると考えられる。ただし、 α_i は部材毎に異なるものとする。部材断面の設計では、断面積 A が変動すれば断面二次モーメント I も一般的に変動すると考えられるが、 I と A を独立に考え、感度変数 X を1部材2個としても感度係数特性式(21)、(22)は成立する⁵⁾。ここでは、議論を簡単化するとともに通常の断面設計の場合を想定して、式(23)の関係を導入した。

また、同様に断面積 A_i と断面係数 Z_i との間に次のような関係を仮定する。

$$Z_i = \beta_i A_i L_i \quad (24)$$

式(24)において、 β_i は断面の形状に依存する定数である。感度変数 X_i が断面積 A_i であり式(23)が仮定されている場合、剛性マトリクスの要素構成より

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i = \mathbf{K} \quad (25)$$

となることは明らかである。よって式(21)は、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_i} X_i = - (K^{-1} K z)_h = - z_h = (-1) \times z_h \quad (26)$$

となる。式(26)より感度変数 X_i が断面積 A_i の場合、節点変位の感度係数特性値 C は -1 となる。また、式(26)はすべての骨組構造物について成り立つ。

一般の線形弾性構造物に対しては、剛性マトリクスの成分要素が線形結合で示される量を感度変数に取れば感度係数特性式(26)は成立する。弾性連続体構造物の場合では、感度変数 X_i としてヤング係数 E_i あるいは要素厚 t などが考えられる。

部材の断面力の感度係数特性は、式(22)において、右辺第1項の自重や温度変化による断面力 r_{0j} を考慮しないと、第3項に式(26)の節点変位の感度係数特性を適用すると、断面力の感度係数特性は、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_{0j}}{\partial X_i} X_i = k_j z_j - k_j z_j = 0 \quad (27)$$

となる。式(27)は断面力の感度係数特性値 C は 0 になることを示している。また、式(27)はすべての骨組構造物について成り立つ。

軸応力 σ_{Nj} の感度係数特性値は、式(17)の両辺に感度係数を乗じ骨組全体の総和を導くと、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_{Nj}}{\partial X_i} X_i = - \frac{N_j}{A_j} = (-1) \times \sigma_{Nj} \quad (28)$$

となる。

同様に、せん断応力の τ_j の感度係数特性値は、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \tau_j}{\partial X_i} X_i = - k_j \frac{Q_j}{A_j} = (-1) \times \tau_j \quad (29)$$

曲げ応力の感度係数特性は、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_{Mj}}{\partial X_i} X_i = - \frac{M_j}{Z_j} = (-1) \times \sigma_{Mj} \quad (30)$$

のように導かれる。ただし、式(29)、(30)中の Q_j 、 M_j はそれぞれせん断力、曲げモーメントを示す。式(28)、(29)、(30)の感度係数を成分にもつ i 部材の断面応力の感度係数ベクトルを $\partial \sigma_j / \partial X_i$ とすると、

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_j}{\partial X_i} X_i = (-1) \times \sigma_j \quad (31)$$

と表すことができる。式(31)は断面応力の感度係数特性値 C が -1 となることを示している。

参考文献

- 1) 新延泰生, 松井邦人, 菊田征勇: 骨組構造物の応答感度係数の特性, 土木学会論文集, No.450/I-20, pp.75-83, 1992.7.
- 2) K.K.Choi, Nam-Ho Kim: Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1 Linear Systems, Springer, 2005, pp.22~24
- 3) 藤谷義信, 松本慎也: 建築鉄骨骨組構造の最適解析, 日本建築学会応用力学シリーズ 10 建築構造物の創造的数理設計手法の展望, pp.70, 2002.9.
- 4) 樋口幸太郎, 新延泰生, 武内隆政: 弾性構造物の感度係数の特性とその応用, Transactions of JSCES, Paper No.20050020, 2005.5.
- 5) 榎本覚雄, 新延泰生: 骨組構造物の応答感度係数特性に基づく感度解析法, 土木学会論文集, No525/I-33, pp.127-137, 1995.10.

(2005 年 4 月 15 日 受付)