

Spline-Ritz 法を用いた Mindlin 板の高次振動解析

Vibration analysis of high frequencies of Mindlin plates using spline-Ritz method

水澤富作*, 渡辺晶子**

Tomisaku MIZUSAWA and Akiko WATANABE

*大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学大学院 院生 建設工学専攻 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

To avoid mechanical resonance and fatigue damage in engineering designs, it is crucial to predict and understand the responses of structure due to high frequency vibration and noise. This paper presents high frequency vibration analysis of Mindlin plates using spline Ritz method. To demonstrate an accuracy and convergence of the present method, some numerical examples are solved and the results are compared with those obtained by analytical method and other numerical methods. We also demonstrate the present method for high frequency vibration analysis by providing accurate frequencies for Mindlin plates vibrating in the first 5000 modes.

Key Words: spline Ritz method, high frequency vibration, Mindlin plate, rectangular plate

1. まえがき

超高速車両や物体の衝突を受ける構造物には、非常に高次の振動や衝撃音が誘発されるので、高次振動や衝撃音による疲労問題が設計上重要な課題になっている¹⁾。数百Hzから数千Hzの高次振動は、高速運動するスペースシャトル、ジェットエンジンから誘発され、また高速回転するハードディスク、携帯電話や超音波加振を受ける物体からも高次振動が発生するが、比較的低周波域(数十次以内の振動数)での動的応答と比較して、平板の高次振動については、理論的にさほど解明されていない。汎用性の高い有限要素法を適用しても、構造物に対して非常に小さな波長を伴う高次振動の解明は、計算機の計算時間と容量の制限や数値誤差などの問題により、精度の高い解析結果を得ることが困難な問題とされている²⁾。また、構造物の高次振動を解析するためには、横せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなる。

Beslin・Nicolas³⁾は、Bardell⁴⁾のLegendre多項式を補間関数に用いたハイアラーキ有限要素法による高次振動解析の数値不安定性を改善するために、三角関数を適用したハイアラーキ有限要素法を提案している。両者のハイアラーキ要素を用いた周辺単純支持板の高次振動解析から、Bardellの多項式型ハイアラーキ要素(46次の多項式)では、400次を越えると数値不安定性が現れるが、三角関数を適用したハイアラーキ要素(2048の級数項)

を用いると、800次以内であれば、精度の高い振動数が求められている。

最近、Zhaoら⁵⁾とWeiら⁶⁾は、先に述べた平板の高次振動解析におけるBeslinとNicolasらのハイアラーキ要素の数値不安定問題を解決するために、ウェブレット理論に基づくDSC計算法(discrete singular convolution algorithm)を提案して、薄板の1次から5000次までの正確な振動数を求めている。また、Ngら⁷⁾は、differential quadrature法(DQ法)の重み関数を、局所的Lagrange多項式で表したkernel関数に適用したDSC法を誘導し、周辺単純支持された正方形板の高次振動解析への適用について検討している。全体関数であるLagrange多項式から誘導された重み関数を用いるDQ法では、2000次を越えると数値不安定が現れているが、DSC法は、9000次までの振動数が、薄板理論に基づく厳密解に対して、正確な値を示している。しかしながら、Zhaoら⁵⁾やNgら⁷⁾の提案しているDSC法には、自由の境界条件を取り扱うことができないという欠点がある。

先に示した高次振動解析では、横せん断変形や回転慣性の影響を無視した薄板理論に基づく平板を対象にしており、実現象とは、かなり異なった結果を示していると考えられる。

一方、比較的低次の振動を対象にして、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した1次せん断変形板理論や3

次せん断変形板理論に基づく平板の振動解析が行われているが⁸⁾⁻¹³⁾、せん断変形や回転慣性を考慮した平板の高次振動解析に関する研究が報告されていない。Xiangら¹⁴⁾は、単純支持されたMindlin板の解析解を、薄板理論の振動数から推定する方法を提案しているが、両者のモード形状を同一であるとする仮定が設けられている。

以上述べたように、平板の曲げ変形モードを対象にした高次振動解析では、数値計算上の特別な配慮をしなければ、数値的な不安定が現れ、高次の振動数や振動モードが正しく求められないという問題を抱えている。

本論文で定式化するspline-Ritz法は、解析領域において区分的多項式であるB-spline関数を変位関数に仮定し、系の全ポテンシャルエネルギーを最小化する離散化手法である。得られる係数行列は、正値対称性を示し、またB-spline関数の局所基底の性質により、係数行列のバンド幅も小さくできるので、非対称な密行列を取り扱うDQ法や正値性を有しない対称行列を対象にした選点最小二乗法と比較して、大次元の固有値計算において計算誤差が低く抑えられる。さらに、先に第一著者により発表しているspline帯板法¹²⁾は、解析領域を帯板要素に分割する必要があるが、本手法は、spline基底関数を生成するための区分点(離散点)を解析領域に設けたメッシュレス法の一手法である。

本研究では、平板の数百次から数千次の振動数や振動モードを精度よく求めるために、高次振動で重要になる横せん断変形や回転慣性の影響を考慮したMindlin板理論に基づくspline-Ritz法を用いて、相対する2辺が単純支持され、他の2辺が任意の境界条件を有するMindlin板の高次振動解析を行い、本手法の収束性や精度比較について検討を行っている。また、Mindlin板の高次振動特性に与える幅厚比や境界条件などの影響も明らかにしている。

2. Spline-Ritz法による定式化

ここでは、Levy法とMindlin板理論⁸⁾に基づく半数値解析法の定式化について示す。本手法は、図-1に示すように、長手(x軸)方向に固有関数をFourier級数展開し、幅(y軸)方向に区分的多項式であるB-spline関数を仮定したspline-Ritz法である。

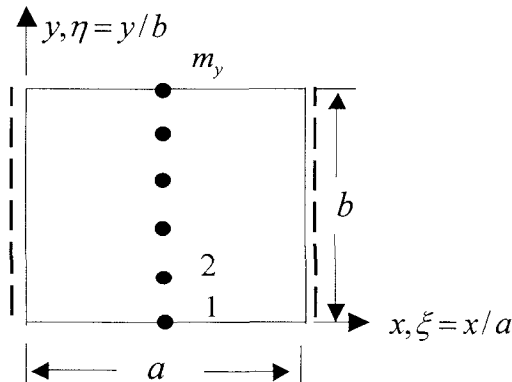


図-1 長方形Mindlin板と座標系

定式化には、次式の無次元座標系を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, W' = w/h \quad (1)$$

ただし、 a, b, h は、それぞれ長さ、幅と板厚である。

横せん断変形や回転慣性の影響を考慮したMindlin板理論では、それぞれ独立したたわみと2つの回転角が未知変位になる。したがって、それぞれの変位関数は、一方向に固有関数をフーリエ級数展開し、他の方向にspline関数を仮定すれば、次式で表される。

$$\begin{aligned} \theta_x(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot \bar{Y}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] \bar{Y}_m(\xi) \{\delta_A\}_m \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_B\}_m \\ W'(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_C\}_m \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_y,k}(\eta)], \{\delta_A\}_m = \{A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{i_y,m}\}^T,$$

$$\{\delta_B\}_m = \{B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{i_y,m}\}^T, \{\delta_C\}_m = \{C_{1m}, C_{2m}, \dots, C_{i_y,m}\}^T$$

である。ただし、 $i_y = k-1 + M_y$ 、 $Y_m(\xi)$ と $\bar{Y}_m(\xi)$ は与えられた境

界条件を満たした固有関数である。 $N_{n,k}(\eta)$ は正規化され

たB-spline関数であり、 $k-1$ はspline次数、 M_y は離散点

の数である。また、 r は固有関数の級数項を示す。

式(2)をマトリックス表示すると、

$$\{Z\} = [S]_m \{\Delta\}_m \quad (3)$$

$$\{Z\} = \{\theta_x, \theta_y, W'\}^T, \{\Delta\}_m = \{\{\delta_A\}_m, \{\delta_B\}_m, \{\delta_C\}_m\}^T \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $[S]_m$ は次式で表される。

$$[S]_m = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} [N] \bar{Y}_m(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & [N] Y_m(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & [N] Y_m(\xi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

次に、Mindlin板理論で定義される曲げひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}_s$ を無次元座標系 (ξ, η) で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}_b = \begin{Bmatrix} (z/a) \partial \theta_x / \partial \xi \\ (z/b) \partial \theta_y / \partial \eta \\ (z/b) \partial \theta_x / \partial \eta + (z/a) \partial \theta_y / \partial \xi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \theta_x + (b/a) \partial W' / \partial \xi \\ \theta_y + \partial W' / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 z は板の中央面から厚さ方向の位置である。

したがって、式 (3)を式(6)と(7)に代入すれば、ひずみベクトル $\{\chi\}$ は、次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_b \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T] \{Z\} = [T] [S]_m \{\Delta\}_m = [B]_m \{\Delta\}_m \quad (8)$$

ただし、ひずみマトリックス $[B]_m$ と微分演算子 $[T]$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[B]_m = \sum_{n=1}^r \begin{bmatrix} (1/a) [N] Y'_m(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & (1/b) [N] Y_m(\xi) & 0 \\ (1/b) [N] Y_m(\xi) & (1/a) [N] Y'_m(\xi) & 0 \\ [N] Y_m(\xi) & 0 & (b/a) [N] Y'_m(\xi) \\ 0 & [N] Y_m(\xi) & [N] Y_m(\xi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a) \partial / \partial \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1/b) \partial / \partial \eta & 0 \\ (1/b) \partial / \partial \eta & (1/a) \partial / \partial \xi & 0 \\ 1 & 0 & (b/a) \partial / \partial \xi \\ 0 & 1 & \partial / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $\bar{Y}'_m(\xi) = \partial \bar{Y}_m(\xi) / \partial \xi$, $Y'_m(\xi) = \partial Y_m(\xi) / \partial \xi$, $[N] = \partial [N] / \partial \eta$ である。

等方性材料よりなる Mindlin 板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[D]_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[D]_s = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 h は板厚である。また、 κ はせん断修正係数である。

したがって、長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= (1/2) \iint \left[\{\varepsilon\}_b^T [D]_b \{\varepsilon\}_b + \{\varepsilon\}_s^T [D]_s \{\varepsilon\}_s \right] d\xi d\eta \\ &= (D/2)(a/b) \iint \left[(b/a)^2 (\partial \theta_x / \partial \xi)^2 + (\partial \theta_y / \partial \eta)^2 \right. \\ &\quad + 2\nu(b/a) (\partial \theta_x / \partial \xi) (\partial \theta_y / \partial \eta) \\ &\quad + 0.5(1-\nu) \{ (\partial \theta_x / \partial \eta) + (b/a) (\partial \theta_y / \partial \xi) \}^2 \\ &\quad + 6(1-\nu)\kappa(b/h)^2 \{ (b/a) (\partial W' / \partial \xi) + \theta_x \}^2 \\ &\quad \left. + \{ (\partial W' / \partial \eta) + \theta_y \}^2 \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性である。

また、運動エネルギー T は、次式で与えられる。

$$T = (\rho h / 2) \omega^2 ab^3 \iint \left[W'^2 + (1/12)(h/b)^2 (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right] d\xi d\eta \quad (14)$$

ここで、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

したがって、板の全ポテンシャルエネルギー Π は、

$$\Pi = U - T \quad (15)$$

で与えられる。式(2)を上式に代入し、全ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_s = \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^r \left([K]_{ms} \{\Delta\}_m - \omega^2 [M]_{ms} \{\Delta\}_m \right) = 0 \quad (16)$$

また、剛性マトリックス $[K]_{ms}$ と質量マトリックス、 $[M]_{ms}$ は、それぞれ次式で表される。

$$[K]_{ms} = D \cdot (a/b) \begin{bmatrix} [K \theta_x \theta_y] & [K \theta_x \theta_y] & [K \theta_x W'] \\ [K \theta_y \theta_x] & [K \theta_y \theta_y] & [K \theta_y W'] \\ [KW' \theta_x] & [KW' \theta_y] & [KW' W'] \end{bmatrix}_{ms}$$

$$[M]_{ms} = \rho h \omega^2 ab^3 \begin{bmatrix} [M \theta_x \theta_x] & 0 & 0 \\ 0 & [M \theta_y \theta_y] & 0 \\ 0 & 0 & [MW' W'] \end{bmatrix}_{ms} \quad (17)$$

ただし、剛性マトリックス $[K]_{ms}$ と質量マトリックス、 $[M]_{ms}$ の

大きさは、 $3 \times (k + M_y - 1)$ であり、またサブマトリックスは、

文献12)に示してある。 $k-1$ と M_y は、先に示したように

Spline 関数の次数と離散点の数である。

相対する2辺が単純支持されている場合には、固有関数は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{Y}_m(\xi) &= \cos(m \pi \xi) \\ Y_m(\xi) &= \sin(m \pi \xi) \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots, r \quad (18)$$

したがって、固有関数の直交性により、連成項が消えるので、各級数に対して、式(16)は、次式で表される。

$$([K]_{nq}]_m \{\Delta\}_m - \omega^2 [M]_{nq}]_m \{\Delta\}_m) = 0; \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots,r \\ n,q=1,2,\dots,i_y \end{matrix} \quad (19)$$

ここで、各特性マトリックスの計算は、Gauss の数値積分公式を適用して求めている。また、Gauss の積分点は、スプライン次数 $k-1$ に 1 を足した k 個の積分点を用いている。

3. 数値計算例および考察

ここでは、y 軸に平行な 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が任意の境界条件を有する Mindlin 板の高次振動解析の収束性や解析精度について示す。ただし、ポアソン比 ν とせん断修正係数 κ は、ことわりが無い限り 0.3 と $\pi^2/12$ に仮定し、また円振動数パラメータ n^* は、次式で表し、以後振動数パラメータと呼ぶことにする。

$$n^* = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D} \quad (20)$$

境界条件の示し方の SS-CF のように示し、それぞれ $\xi = 0$ と $\xi = 1$ で単純支持(S)であり、 $\eta = 0$ で固定(C)、 $\eta = 1$ で自由(F)とする。

3.1 本手法の収束性に与える離散点の数 M_y と spline 次数 $k-1$ の影響

表-1 には、周辺単純支持された正方形薄板 ($\nu = 0.3$, $b/h=1000$, $a/b=1$) の 1 次から 5000 次までの振動数パラメータ n^* の収束性に与える離散点の数 M_y の影響が示してある。ここで、 $k-1=5$ 次に仮定し、 M_y は、51, 101, 201, 251 に変化させている。なお、級数の項数 r は、固有値の漏れがないように、301 にとっている。

表-1 振動数パラメータ n^* に与える離散点の数 M_y の影響: SS-SS, $a/b=1$, $b/h=1000$, $\nu=0.3$, $k-1=5$

振動次数	$M_y=251$		$M_y=201$		$M_y=101$		$M_y=51$	
	m	n	m	n	m	n	m	n
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	2	1	2	1	2	1	2	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2
5	1	3	1	3	1	3	1	3
6	3	1	3	1	3	1	3	1
7	2	3	2	3	2	3	2	3
8	3	2	3	2	3	2	3	2
9	1	4	1	4	1	4	1	4
10	4	1	4	1	4	1	4	1
50	8	3	8	3	8	3	8	3
100	8	9	8	9	8	9	8	9
200	7	15	7	15	7	15	7	15
300	18	9	18	9	18	9	18	9
400	23	3	23	3	23	3	23	3
500	23	12	23	12	23	12	23	12
600	4	28	4	28	4	28	4	28
700	12	28	12	28	12	28	12	28
800	24	22	24	22	24	22	24	22
900	17	30	17	30	17	30	17	30
1000	15	33	15	33	15	33	15	33
2000	47	20	47	20	47	20	47	20
2500	57	2	57	2	57	2	57	2
3000	23	58	23	58	23	58	23	58
3500	7	67	7	67	7	67	7	67
4000	72	2	72	2	72	2	72	2
4500	40	65	40	65	40	65	40	65
5000	79	15	79	15	79	15	79	15

モード次数(m,n)は、それぞれx方向とy方向の正弦波の半波長の数を示す。表の中で、モード次数(m,n)が一致しない場合には、空白にしてある。また、1次から5000次までの振動数パラメータ n^* に与える M_y の影響を図-2 示す。

表-1 より、モード次数(m,n)を一致させた場合には、 M_y を 201 以上にすると、5000 次までの振動数パラメータが、有効桁数 5 桁の一致を示している。一方、図-2 より、 M_y が少ないと、振動次数の増大とともに、収束値からかなりかけ離れた収束状態を示す。

しかしながら、幅厚比が 10 の厚い板では、表-2 に示す

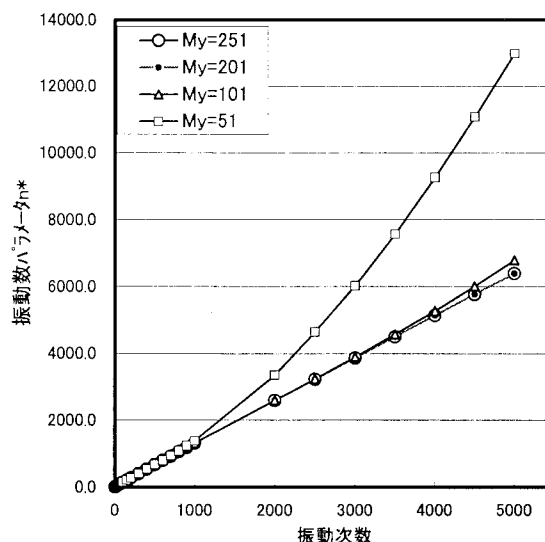


図-2 振動数パラメータ n^* の収束図: SS-SS,

$a/b=1$, $b/h=1000$, $k-1=5$

表-2 振動数パラメータ n^* に与える離散点の数 M_y の影響: SS-SS, $a/b=1$, $b/h=10$, $\nu=0.3$, $k-1=5$

振動次数	$M_y=251$		$M_y=201$		$M_y=101$		$M_y=51$	
	m	n	m	n	m	n	m	n
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	2	1	2	1	2	1	2	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2
5	1	3	1	3	1	3	1	3
6	3	1	3	1	3	1	3	1
7	2	3	2	3	2	3	2	3
8	3	2	3	2	3	2	3	2
9	1	4	1	4	1	4	1	4
10	4	1	4	1	4	1	4	1
100	8	9	8	9	8	9	8	9
200	13	7	13	7	13	7	13	7
500	3	41	3	41	3	41	3	41
700	22	7	22	7	22	7	22	7
1000	10	50	10	50	10	50	10	50
2000	29	34	29	34	29	34	29	34
3000	28	61	28	61	28	61	28	61
4000	45	23	45	23	45	23	45	23
5000	23	113	23	113	23	113	23	113

ように、 M_y が少なくても、比較的高次の振動数パラメータが、モード次数を含めて良く一致した収束性を示している。また、他の 2 辺の境界条件を変化させて、検討を行ってみたが、周辺単純支持板と同様な結果が得られている。

これらの本手法の収束性に与える M_y の結果より、以後の数値計算例では、断りが無い限り M_y を 201 に仮定する。

次に、Mindlin 板の高次振動特性に与える spline 次数 $k-1$ の影響について示す。

表-3 には、幅厚比 $b/h=1000$ を有する周辺単純支持された正方形板の 1 次から 1 万次までの振動数パラメータ n^* とモード次数(m,n)に与える spline 次数 $k-1$ の影響が示してある。また、薄板理論に基づく Levy 法による厳密解¹⁵⁾を基準にした振動数パラメータ n^* の相対誤差(%)に与える $k-1$ の影響を図-3 に示す。ここで、 M_y は 251 に仮定し、 $k-1$ は 3 次から 6 次まで変化させている。表中の空白は、モード次数(m,n)の不一致を示している。

これらの図と表より、spline 次数を高めると、10000 次まで、よく一致した振動数パラメータ n^* とモード次数(m,n) が得られている。また、相対誤差を調べてみると、 $k-1$ の次数を高めれば、0.5%から 0.001%に低減できる。

表一3 振動数パラメータ n^* に与える spline 次数 $k-1$ の影響:SS-SS, $a/b=1$, $b/h=1000$, $\nu=0.3$, $My=251$

振動次数	k-1=3		k-1=4		K-1=5		K-1=6	
	m	n	m	n	m	n	m	n
1	1	1	2.0000	1	1	2.0000	1	1
2	1	2	5.0000	1	2	5.0000	1	2
3	2	1	5.0000	2	1	5.0000	2	1
4	2	2	7.9999	2	2	7.9999	2	2
5	1	3	9.9998	1	3	9.9998	1	3
6	3	1	9.9998	3	1	9.9998	3	1
7	2	3	13.000	2	3	13.000	2	3
8	3	2	13.000	3	2	13.000	3	2
9	1	4	17.000	1	4	17.000	1	4
10	4	1	17.000	4	1	17.000	4	1
20	4	4	31.998	4	4	31.998	4	4
30	6	3	44.996	6	3	44.996	6	3
40	5	6	60.993	5	6	60.993	5	6
50	8	3	72.990	8	3	72.990	8	3
100	8	9	144.96	8	9	144.96	8	9
200	7	15	273.86	7	15	273.86	7	15
300	18	9	404.70	18	9	404.70	18	9
400	3	23	537.47	23	3	537.47	23	3
500	12	23	672.17	23	12	672.17	23	12
1000	33	15	1310.8	15	33	1310.8	15	33
2000	20	47	2596.9	47	20	2596.6	47	20
3000				23	58	3865.5	23	58
4000				2	72	5139.5	72	2
5000				15	79	6391.1	79	15
6000							88	3
7000							94	14
8000							54	86
9000							19	106
10000							86	74

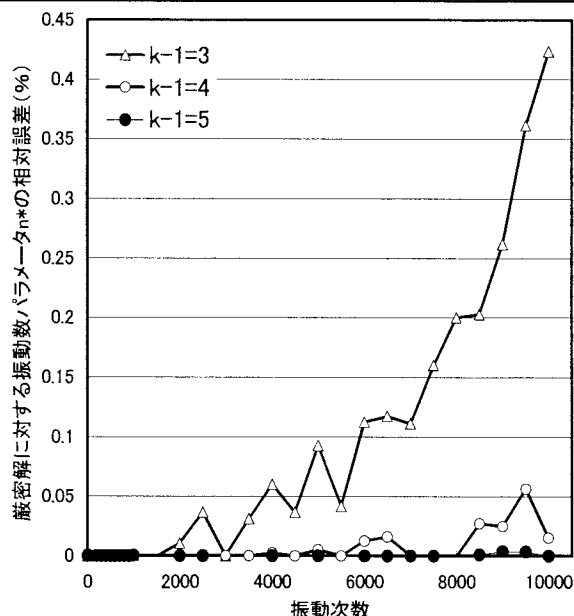


図-3 振動数パラメータ n^* に与える $k-1$ の影響:

SS-SS, $a/b=1$, $b/h=1000$, $My=251$

一方, 比較的板厚の大きな $b/h=10$ の正方形 Mindlin 板の高次振動に与える $k-1$ の影響が, 表一4 に示してある。

これより, 板厚が増大すると, 比較的低次の $k-1$ を用いても, 1 万々までの振動数パラメータとモード次数 (m, n) の一致が得られている。

したがって, 以後の数値計算では, 比較的板厚の薄い板と厚い板の高次振動解析を対象にするので, $k-1$ を 5 次に仮定する。

3.2 高次振動解析の精度比較

表一5 には, 他の 2 辺が固定された正方形薄板(SS-CC)の 1 次から 5 千々までの振動数パラメータ n^* の精度比較が

表一4 振動数パラメータ n^* に与える spline 次数 $k-1$ の影響:SS-SS, $a/b=1$, $b/h=10$, $\nu=0.3$, $My=251$

振動次数	k-1=3		k-1=4		k-1=5		k-1=6	
	m	n	m	n	m	n	m	n
1	1	1	1.93102	1	1	1.93102	1	1
2	1	2	4.60483	1	2	4.60483	1	2
3	2	1	4.60483	2	1	4.60483	2	1
4	2	2	7.06378	2	2	7.06378	2	2
5	1	3	8.60484	1	3	8.60484	1	3
6	3	1	8.60484	3	1	8.60484	3	1
7	2	3	10.7923	2	3	10.7923	2	3
8	3	2	10.7923	3	2	10.7923	3	2
9	1	4	13.5133	1	4	13.5133	1	4
10	4	1	13.5133	4	1	13.5133	4	1
20	4	4	22.2916	4	4	22.2916	4	4
30	6	3	28.6759	6	3	28.6759	6	3
40	5	6	35.5279	5	6	35.5279	5	6
50	8	3	40.1396	8	3	40.1396	8	3
100	8	9	62.2561	8	9	62.2561	8	9
200	13	7	79.3881	13	7	79.3881	13	7
300	16	5	91.8644	16	5	91.8644	16	5
400	2	37	102.731	2	37	102.731	2	37
500	3	41	113.290	3	41	113.290	3	41
1000	10	50	153.558	10	50	153.558	10	50
2000	29	34	212.587	29	34	212.587	29	34
3000	28	61	257.654	28	61	257.654	28	61
4000	45	23	296.167	45	23	296.167	45	23
5000	23	113	330.384	23	113	330.384	23	113
6000				49	61	360.916	49	61
7000				59	30	389.412	59	30
8000				59	61	415.915	59	61
9000				65	53	440.557	65	53
10000				60	88	464.041	60	88

表一5 振動数パラメータ n^* の精度比較:SS-CC, $a/b=1$, $b/h=10000$, $\nu=0.3$, $My=251$

振動次数			Exact			相対誤差	
	m	n	SRM	Levy法	DSCM	SRM(%)	DSCM(%)
1	1	1	2.93331	2.93330	2.93330	0.00	0.00
10	3	3	20.2450	20.2450	20.2451	0.00	0.00
50	7	5	76.8785	76.8786	76.8798	0.00	0.00
100	11	5	147.991	147.991	147.993	0.00	0.00
300	17	11	415.678	415.682	415.709	0.00	0.01
500	24	10	679.584	679.593	679.631	0.00	0.01
700	29	10	944.008	944.025	944.076	0.00	0.01
1000	23	28	1333.83	1333.87	1334.31	0.00	0.03
1500	36	26	1986.23	1986.31	1986.91	0.00	0.03
2000	51	6	2637.51	2637.64	2637.72	0.00	0.00
2500	29	49	3282.93	3283.09	3285.66	0.00	0.08
3000	62	9	3925.89	3926.18	3930.66	-0.01	0.11
3500	61	29	4573.10	4572.10	4585.86	0.02	0.30
4000	72	6	5219.95	5220.45	5245.00	-0.01	0.47
4500	55	53	5868.24	5867.87	5925.60	0.01	0.98
5000	31	74	6512.10	6504.22	6633.36	0.12	1.99

示してある。この表には, Wei らにより Levy 法を適用して求められた薄板の厳密解⁵⁾に対する本手法(SRM)と Zhao らの DSC 法(DSCM)⁵⁾による値の相対誤差(%)も示してあり, その結果が図一4 にも示してある。ただし, 薄板理論の結果と比較するために $b/h=10000$ を用いている。同様に, 表一6 と図一5 には, 周辺単純支持された正方形薄板(SS-SS, $b/h=10000$)の高次振動数パラメータ n^* の精度比較が示してある。これらの表と図には, 薄板の厳密解¹⁵⁾を基準に仮定して求めた本手法(SRM)と Zhao らの DSC 法⁵⁾による値(DSCM)の相対誤差(%)も示してある。また, 参考までに, Xiang ら¹⁴⁾が提案している薄板理論に基づく振動数パラメータと Mindlin 板の振動数パラメータの関係式から求めた解析解(Mindlin Exact)が表一6 に示してある。

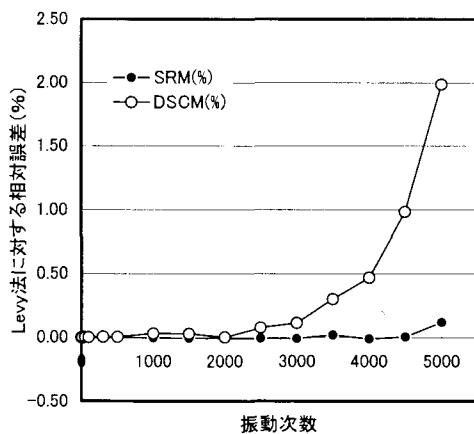


図-4 振動数パラメータ n^* の相対誤差 (%) の比較:

SS-CC, $a/b=1$, $b/h=10000$, $M_y=251$

これらの表-5と表-6の結果より, Mindlin 板理論に基づく本手法で求めた値は, 境界条件の相違に係わらず b/h を 10000 に仮定すれば, 薄板理論により求めた厳密解やモード次数 (m, n) と非常に良く一致した結果が得られている。また, Zhao らの DSC 法³⁾による数値解よりも, 精度の高い解析結果が得られている。しかしながら, 本手法で求めた周辺単純支持された板の高次振動のモード次数 (m, n) が薄板理論で求めた結果と異なる振動数パラメータが, 2, 3 現れ

表-6 振動数パラメータ n^* の精度比較: SS-SS, $a/b=1$, $b/h=10000$, $\nu=0.3$, $M_y=251$

振動次数	m		n		SRM		DSCM		Thin Exact		Mindlin Exact		相対誤差	
	m	n	m	n	SRM	DSCM	m	n	Thin Exact	Mindlin Exact	SRM (%)	DSCM (%)	SRM (%)	DSCM (%)
1	1	1	1	1	2.00000	2.00000	1	1	2.00000	1.98548	0.000	0.000	0.000	0.000
10	4	1	4	1	17.0000	17.0000	4	1	17.0000	17.0026	0.000	0.000	0.000	0.000
50	8	3	8	3	72.9999	73.0000	8	3	73.0000	73.0008	0.000	0.000	0.000	0.000
100	8	9	8	9	145.000	145.000	8	9	145.000	144.999	0.000	0.000	0.000	0.000
300	18	9	18	9	404.997	405.000	18	9	405.000	404.997	-0.001	0.000	-0.001	0.000
500	23	12	23	12	672.992	673.000	23	12	673.000	672.992	-0.001	0.000	-0.001	0.000
700	12	28	12	28	927.983	928.000	12	28	928.000	927.984	-0.002	0.000	-0.002	0.000
1000	15	33	15	33	1313.97	1314.00	15	33	1314.00	1313.97	-0.002	0.000	-0.002	0.000
1500	21	39	21	39	1961.93	1962.00	21	39	1962.00	1961.93	-0.004	0.000	-0.004	0.000
2000	47	20	47	20	2608.87	2609.01	47	20	2609.00	2608.87	-0.005	0.000	-0.005	0.000
2500	2	57	2	57	3252.82	3253.48	2	57	3253.00	3252.81	-0.006	0.015	-0.006	0.015
3000	62	7	62	7	3892.72	3893.64	23	58	3893.00	3892.72	-0.007	0.016	-0.007	0.016
3500	67	7	67	7	4537.62	4545.38	67	7	4538.00	4537.62	-0.008	0.163	-0.008	0.163
4000	2	72	2	72	5187.92	5205.57	2	72	5188.00	5187.50	-0.002	0.339	-0.002	0.339
4500	76	7	40	65	5824.38	5873.33	40	65	5825.00	5824.38	-0.011	0.830	-0.011	0.830
5000	15	79	15	79	6466.50	6575.00	15	79	6466.00	6465.23	0.008	1.686	0.008	1.686

表-7 高次の振動数パラメータ n^* に与えるせん断修正係数 κ の影響: SS-CC, $a/b=1, M_y=201$

振動次数	$b/h=1000$									$b/h=10$								
	m	n	$\kappa=\pi^2/12$	m	n	$\kappa=5/6$	m	n	$\kappa=5/(6-\nu)$	m	n	$\kappa=\pi^2/12$	m	n	$\kappa=5/6$	m	n	$\kappa=5/(6-\mu)$
1	1	1	2.9333	1	1	2.9333	1	1	2.9333	1	1	2.6997	1	1	2.7021	1	1	2.7111
2	2	1	5.5466	2	1	5.5466	2	1	5.5466	2	1	4.9711	2	1	4.9762	2	1	4.9957
3	1	2	7.0242	1	2	7.0242	1	2	7.0242	1	2	5.9899	1	2	5.9992	1	2	6.0349
4	2	2	9.5833	2	2	9.5833	2	2	9.5833	2	2	7.9723	2	2	7.9854	2	2	8.0359
5	3	1	10.356	3	1	10.356	3	1	10.357	3	1	8.7866	3	1	8.7991	3	1	8.8471
6	1	3	13.080	1	3	13.080	1	3	13.080	1	3	10.249	1	3	10.271	1	3	10.357
7	3	2	14.205	3	2	14.205	3	2	14.205	3	2	11.333	3	2	11.354	3	2	11.436
8	2	3	15.682	2	3	15.682	2	3	15.682	2	3	12.023	2	3	12.049	2	3	12.153
9	4	1	17.259	4	1	17.259	4	1	17.259	4	1	13.611	4	1	13.637	4	1	13.738
10	3	3	20.244	3	3	20.244	3	3	20.244	3	3	14.992	3	3	15.028	3	3	15.165
50	7	5	76.867	7	5	76.867	7	5	76.867	7	5	40.772	7	5	40.932	7	5	41.554
100	11	5	147.95	11	5	147.95	11	5	147.95	1	12	62.408	1	12	62.707	9	8	63.875
500	24	10	678.73	24	10	678.74	24	10	678.78	13	21	114.44	11	26	114.72	19	7	116.65
1000	23	28	1330.5	23	28	1330.6	23	28	1330.7	5	58	155.00	14	39	155.53	19	29	158.52
2000	17	48	2624.8	17	48	2625.0	17	48	2625.5	25	45	213.91	22	51	214.80	13	74	217.21
3000	62	9	3898.2	62	9	3898.5	62	9	3899.5	41	17	259.40	10	100	260.32	36	39	263.67
4000	60	40	5171.0	60	40	5171.5	60	40	5173.4	44	32	297.95	16	110	298.78	50	2	302.52
5000	31	74	6426.9	31	74	6427.7	31	74	6430.6	38	73	331.88	49	37	332.91	39	71	337.19

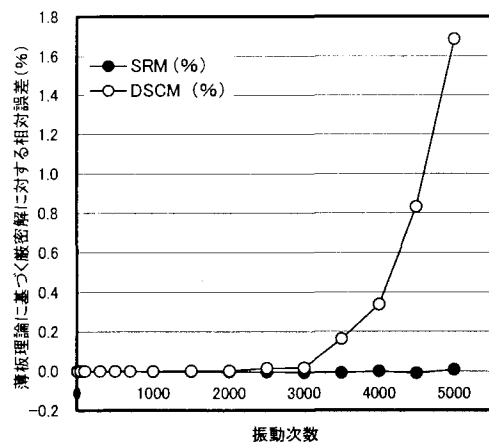


図-5 振動数パラメータ n^* の相対誤差 (%) の比較:

SS-SS, $a/b=1$, $b/h=10000$, $M_y=251$

ている。これは, 数千次の高次振動には, 前後の振動数が近くなるためと考えられる。

3.3 Mindlin 板の高次振動に与えるせん断修正係数 κ , ポアソン比 ν および回転慣性の影響

(1) 高次振動特性に与えるせん断修正係数 κ の影響

表-7 には, 他の 2 辺が固定された Mindlin 板(SS-CC)

の 1 次から 5000 次までの高次振動に与えるせん断修正係数 κ の影響が示してある。ここで, b/h は, それぞれ 1000 と 10 に仮定し, また κ の値は, $\pi^2/12$, $5/6$ および $5/(6-\nu)$ に変化させている。これより, 薄板問題 ($b/h=1000$) では, 高次の振動数パラメータ n^* およびモード次数 (m, n) に与える κ の影響は, さほど大きく見られない。しかしながら, 板厚が増大すると κ の値により, 100 次を越えると, モード次数 (m, n) の値が, かなり異なってくる。

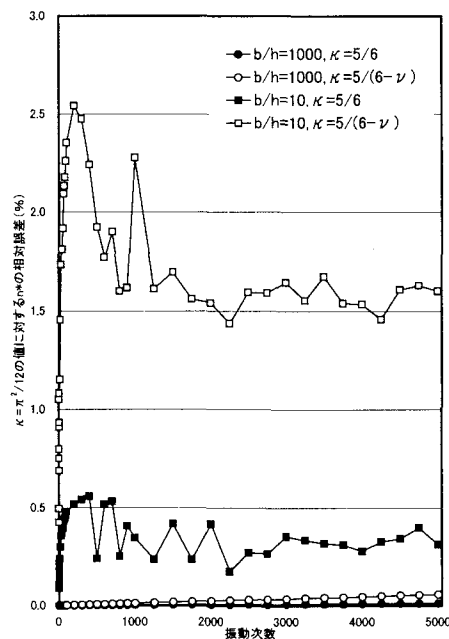


図-6 振動数パラメータ n^* の相対誤差(%)に与えるせん断修正係数 κ の相違の影響:SS-CC, $a/b=1$ $M_y=251$

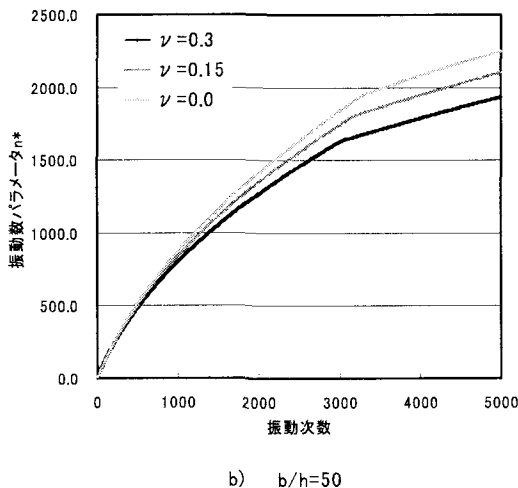
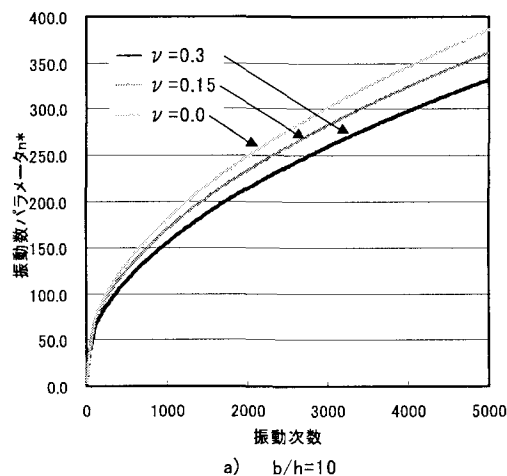


図-7 振動数パラメータ n^* に与えるポアソン比 ν の影響:SS-CC, $a/b=1$

n^* に与える κ の影響を調べるために, $\kappa = \pi^2/12$ に仮定して求めた値に対する他の κ による値の相対誤差(%)を図-6に示す。これより, 2000 次を越えると, 相対誤差が幅厚比の値に係わらず, 振動次数に対してほぼ一定の値を示している。1000 次以内の振動では, 比較的大きな相違が見られるが, n^* の相対誤差に与える κ の相違による影響は, 1~2.5%の範囲内である。

(2) 高次振動特性に与えるポアソン比 ν の影響

図-7には, 正方形Mindlin 板(SS-CC)の5千次までの振動数パラメータ n^* に与えるポアソン比 ν の影響が示してある。ここで, 幅厚比 b/h は10と50に仮定し, また ν は, 0.3, 0.15と0.0を用いている。図より, 振動数パラメータに与える ν の影響は, 高次振動に顕著に見られる。 b/h が小さくなると, b/h が50の場合と比較して, 振動次数パラメータに与える ν の影響が比較的低次の振動数から現れる。また, 両者の振動モード(m, n)に与える ν の影響を調べてみると, $b/h=10$ の場合には, 振動次数が115次を越えると, また $b/h=50$ では, 1872 次を越えると, ν の値により振動モード(m, n)に不一致が現れてくる。

(3) 高次振動特性に与える回転慣性の影響

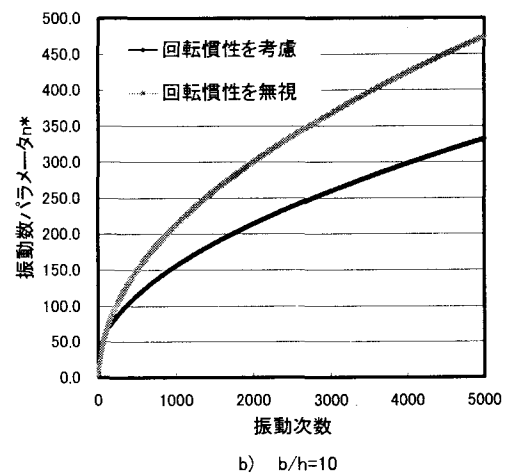
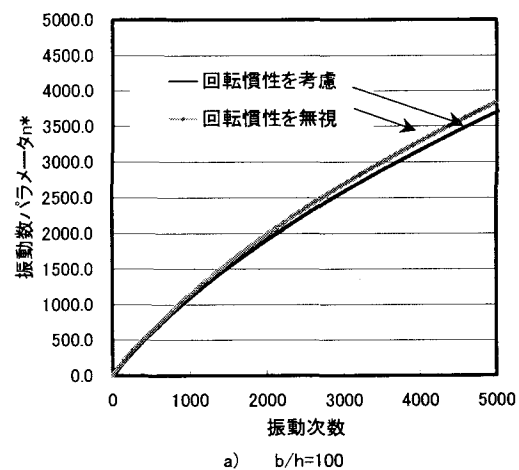


図-8 振動数パラメータ n^* に与える回転慣性の影響:SS-CC, $a/b=1$, $\nu=0.3$

表-8 Mindlin 板の振動数パラメータ n^* と振動モード(m,n)に与える b/h の影響:SS-CC, $a/b=1$, $M_y=201$

振動次数	m	n	b/h=1000	m	n	b/h=100	m	n	b/h=50	m	n	b/h=10	m	n	b/h=5
1	1	1	2.9333	1	1	2.9306	1	1	2.9224	1	1	2.6997	1	1	2.2603
2	2	1	5.5466	2	1	5.5394	2	1	5.5179	2	1	4.9711	2	1	4.0281
3	1	2	7.0242	1	2	7.0107	1	2	6.9704	1	2	5.9899	1	2	4.5054
4	2	2	9.5833	2	2	9.5605	2	2	9.4932	2	2	7.9723	2	2	5.9128
5	3	1	10.356	3	1	10.335	3	1	10.271	3	1	8.7866	3	1	6.6434
6	1	3	13.080	1	3	13.037	1	3	12.911	1	3	10.249	1	3	7.1213
7	3	2	14.205	3	2	14.161	3	2	14.031	3	2	11.333	3	2	8.1063
8	2	3	15.682	2	3	15.623	2	3	15.450	2	3	12.023	2	3	8.2921
9	4	1	17.259	4	1	17.203	4	1	17.037	4	1	13.611	4	1	9.5923
10	3	3	20.244	3	3	20.153	3	3	19.886	3	3	14.992	3	3	9.9319
20	4	4	34.906	4	4	34.650	4	4	33.915	4	4	22.966	4	4	14.520
30	7	1	50.136	7	1	49.683	7	1	48.396	3	6	29.579	1	8	17.566
40	3	7	64.576	3	7	63.714	3	7	61.336	6	5	35.899	6	4	19.351
50	7	5	76.867	7	5	75.734	7	5	72.653	7	5	40.772	1	12	21.138
60	1	9	91.166	1	9	89.496	9	3	85.382	2	9	44.989	4	9	22.226
70	4	9	105.31	4	9	103.12	4	9	97.365	6	8	49.687	3	12	23.504
80	7	8	118.94	7	8	116.24	7	8	109.24	10	4	54.294	3	14	24.985
90	5	10	133.96	5	10	130.51	5	10	121.71	8	8	57.869	6	8	25.723
100	11	5	147.95	11	5	144.04	11	5	134.16	1	12	62.408	3	17	27.134
200	14	9	281.50	14	9	267.89	14	9	237.63	10	11	80.115	9	13	36.406
300	17	11	415.35	17	11	387.04	17	11	330.30	15	8	93.381	8	21	43.253
400	22	8	549.99	22	8	502.91	7	22	413.78	17	8	104.46	13	16	49.343
500	24	10	678.73	24	10	609.36	23	12	489.61	13	21	114.44	13	22	54.603
600	21	19	812.92	21	19	715.42	20	20	560.63	16	17	123.86	17	15	59.342
700	29	10	942.38	4	30	814.92	14	27	626.45	23	4	132.45	15	27	64.078
800	24	22	1072.0	29	15	913.23	24	22	689.31	19	17	140.70	3	54	68.039
900	20	28	1203.4	20	28	1007.8	5	34	748.00	23	12	148.31	6	54	71.864
1000	23	28	1330.5	31	19	1099.2	17	32	804.28	5	58	155.00	8	55	75.520
1500	36	26	1979.0	38	23	1530.3	21	39	1055.9	30	12	186.89	12	63	91.831
2000	17	48	2624.8	29	42	1913.4	2	51	1268.7	25	45	213.91	32	17	105.69
2500	54	19	3263.1	48	31	2267.1	56	11	1457.4	35	22	237.82	15	83	117.65
3000	62	9	3898.2	6	62	2587.4	58	23	1625.7	41	17	259.40	16	92	128.54
3500	4	67	4533.5	44	51	2890.9	62	20	1712.3	41	31	279.16	23	85	138.67
4000	60	40	5171.0	66	29	3179.2	59	33	1789.8	44	32	297.95	26	84	147.83
4500	13	75	5804.7	74	19	3446.8	60	36	1864.3	53	9	315.39	22	108	156.79
5000	31	74	6426.9	68	43	3702.8	58	43	1934.3	38	73	331.88	51	23	165.17

は、2700 次を越えると、回転慣性を無視すれば、振動モード(m,n)に不一致が現れてくる。

3.4 Mindlin 板の高次振動特性

種々の境界条件を持つ Mindlin 板の高次振動特性に与える幅厚比 b/h の影響について示す。

表-8 には、他の2辺が固定された Mindlin 板(SS-CC)の1次から 5000 次までの振動数パラメータ n^* およびモード次数(m,n)に与える b/h の影響が示してある。ここで、 b/h は、1000, 100, 50, 10 と 5 を用いている。また、図-9 は、振動数パラメータ n^* と振動次数の関係に与える b/h の影響を示している。

同様に、表-9 と図-10 には、他の 2 辺が自由である Mindlin 板(SS-FF)の高次振動特性に与える b/h の影響が示してある。

これらの図と表より、 b/h が 1000 では、振動次数と振動数パラメータが高次の振動領域では、直線関係を示すが、 b/h が小さくなると、高次振動に与える横せん断変形の影響が大きくなり、振動次数と振動数パラメータが曲線関係になる。また、同一の境界条

表-9 他の 2 辺が自由である Mindlin 板の振動数パラメータ n^* と振動モード(m,n)に与える b/h の影響:SS-FF, $a/b=1$, $\nu=0.3$, $M_y=201$

振動次数	m	n	b/h=1000	m	n	b/h=100	m	n	b/h=50	m	n	b/h=10	m	n	b/h=5
1	1	1	0.9758	1	1	0.9754	1	1	0.9746	1	1	0.9702	1	1	0.9096
2	1	2	1.6345	1	2	1.6309	1	2	1.6261	1	2	1.6065	1	2	1.4266
3	1	3	3.7203	1	3	3.7092	1	3	3.6927	1	3	3.6184	1	3	3.4288
4	2	1	3.9458	2	1	3.9417	2	1	3.9318	2	1	3.8701	2	1	3.1627
5	2	2	4.7350	2	2	4.7252	2	2	4.7070	2	2	4.6083	2	2	3.6365
6	2	3	7.1659	2	3	7.1408	2	3	7.0966	2	3	6.8710	2	3	5.0101
7	1	4	7.6266	1	4	7.6040	1	4	7.5606	1	4	7.3255	1	4	5.3062
8	3	1	8.9145	3	1	8.8969	3	1	8.8503	3	1	8.5595	3	1	6.0235
9	3	2	9.7299	3	2	9.7034	3	2	9.6423	3	2	9.2846	3	2	6.3920
10	2	4	11.246	2	4	11.195	2	4	11.098	2	4	10.595	2	4	7.0147
20	4	4	23.933	4	4	23.785	4	4	23.438	4	4	21.561	4	4	11.849
30	6	1	35.809	6	1	35.563	6	1	34.881	6	1	31.172	6	1	15.420
40	4	7	48.254	4	7	47.718	4	7	46.430	4	7	40.165	4	7	17.423
50	4	8	60.168	4	8	59.385	4	8	57.465	4	8	48.491	4	8	18.833
60	7	6	72.215	8	4	71.164	8	4	68.542	8	4	56.573	8	4	20.317
70	5	9	83.707	5	9	82.271	5	9	78.744	5	9	63.599	5	9	21.473
80	7	7	97.757	7	7	95.892	7	7	91.231	7	7	72.032	7	7	22.320
90	8	8	110.04	8	8	107.68	8	8	101.89	8	8	78.966	8	8	24.053
100	10	6	123.50	10	6	120.68	10	6	113.61	10	6	86.492	8	9	24.809
200	15	6	248.47	16	16	237.78	16	16	213.65	16	16	143.44	10	20	33.979
300	16	12	372.81	16	12	349.73	16	12	302.42	16	12	187.87	6	24	40.722
400	19	13	500.47	19	13	460.64	19	13	385.56	19	13	226.80	7	27	46.850
500	22	13	623.52	22	13	563.99	22	13	459.56	22	13	259.67	7	35	52.140
600	7	28	752.12	18	22	668.19	27	6	531.37	21	17	275.83	3	46	57.167
700	19	24	875.51	13	28	765.50	13	28	596.13	8	34	290.91	20	12	61.471
800	28	16	1002.5	28	16	862.83	28	16	659.30	12	30	305.46	3	53	65.432
900	14	32	1129.7	3	35	958.31	16	31	719.53	13	34	318.84	10	46	69.430
1000	8	36	1253.3	8	36	1048.0	8	36	775.33	15	33	331.56	23	15	73.309
2000	28	43	2508.3	21	47	1853.0	32	40	1238.0	12	73	440.43	23	49	103.09
3000	3	63	3765.3	60	15	2529.8	5	63	1593.7	9	99	528.23	18	87	126.00
4000	68	22	5012.3	19	70	3116.5	64	21	1770.1	16	109	602.82	24	91	145.31
5000	13	80	6261.4	3	81	3643.7	20	94	1913.9	54	23	669.22	9	133	162.52

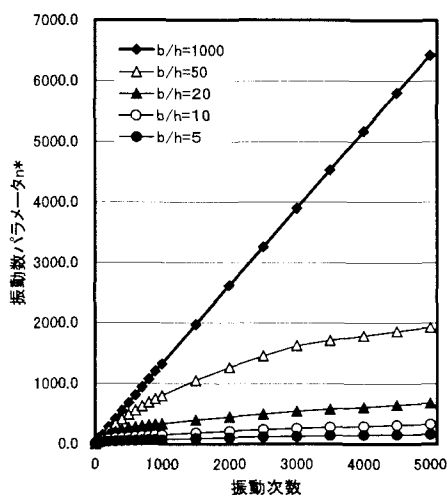


図-9 振動数パラメータ n^* に与える b/h の影響: SS-CC, $a/b=1$

図-8 には、正方形 Mindlin 板(SS-CC)の5千次までの振動数パラメータ n^* に与える回転慣性の影響が示してある。ここで、幅厚比 b/h は 10 と 100 に仮定している。既に指摘されているように、回転慣性の影響を無視すると、振動数パラメータは増大し、 b/h が 100 の場合には、回転慣性の影響を考慮した場合と無視した場合の差が 3% 以内の結果になっている。一方、 b/h が 10 になると、振動次数の増大とともに、回転慣性の影響が大きく現れてくる。また、振動モード(m,n)に与える回転慣性の影響を調べてみると、 $b/h=10$ の場合には、振動次数が 100 次を越えると、また $b/h=100$ で

件であっても、幅厚比の値が変化すると、比較的低次の振動モード(m,n)の値が、大きく異なっている。

図-11, 12 には、それぞれ b/h が 10 と 1000 である正方形 Mindlin 板(SS-CC)の 100 次、1000 次および 2000 次のモード図が示してある。これより、同じ振動次数であっても、 b/h が異なると、異なるモード図が得られている。

したがって、高次振動域での応答解析では、 b/h の影響を無視することができなくなると考えられる。

最後に, Xiang ら¹⁴⁾が提案している周辺単純支持された Mindlin 板の振動数パラメータの解析解と本手法による数値解との比較検討について示す. Xiang らは, Navier 法を適用し, 3 元連立常微分方程式を厳密に解き, 薄板理論で求めた振動数パラメータと Mindlin 板の振動数パラメータの関係式を導いている.

図-13 には, それぞれ周辺単純支持された正方形 Mindlin 板の 5 千次までの振動数パラメータ n^* を対象にして, Xiang らの解析解と本手法で求めた数値解(SRM)の比較が示してある. ここで, b/h を 10, 20, 50, 100 に仮定している. これらの図より, b/h を減少させると, 両者の結果に大きな差が見られ, 振動次数の増大に伴い, Xiang らの解析解は, 本手法により求めた解より, かなり大きな値を示している. また, 振動モード (m, n) は, b/h が 100 では 5 千次まで両者の結果は一致するが, b/h が 50, 20, 10 では, それぞれ, 3011 次, 468 次, 113 次までしか一致していない. また, 図に示していないが, b/h が 5 の場合には, 27 次までしか一致しない.

この相違の理由として, Xiang らが提案している薄板理論で求めた振動数パラメータと Mindlin 板の振動数パラメータの関係式は, Mindlin 板の振動モード (m, n) が薄板理論で求めた振動モード (m, n) と同一であることを仮定しているが, Mindlin 板では, 横せん断変形の影響により, 連成モード(結合モード)が多数生じてくるので¹⁶⁾, 薄板理論では

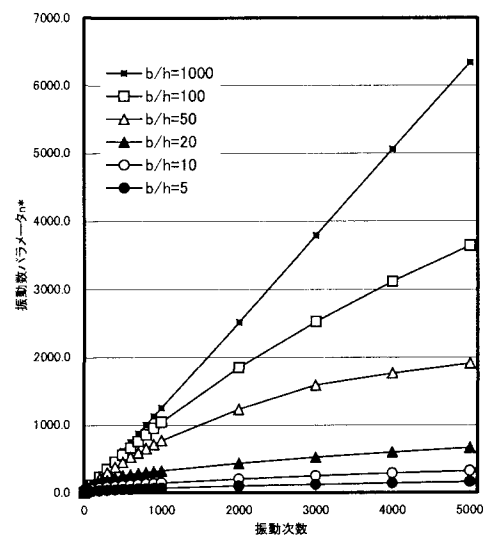


図-10 振動数パラメータ n^* に与える b/h の影響:
SS-FF, $a/b=1$, $\nu=0.3$

表せない振動モードと振動数パラメータが現れるためと考えられる. したがって, Xiang らの関係式を高次振動解析に適用する場合には, 注意が必要であると思われる.

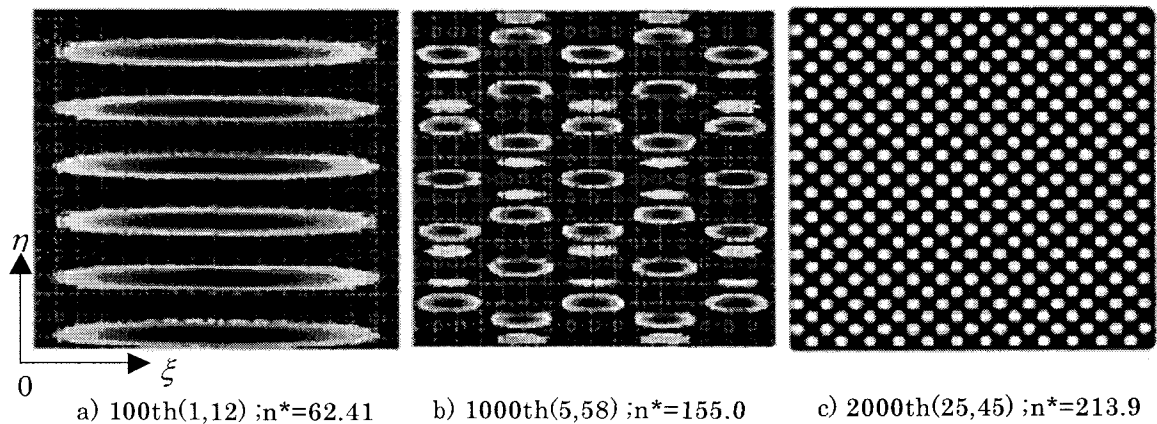


図-11 他の2辺が固定された正方形板のモード形状: SS-CC, $k=5$, $M_y=201$, $b/h=10$

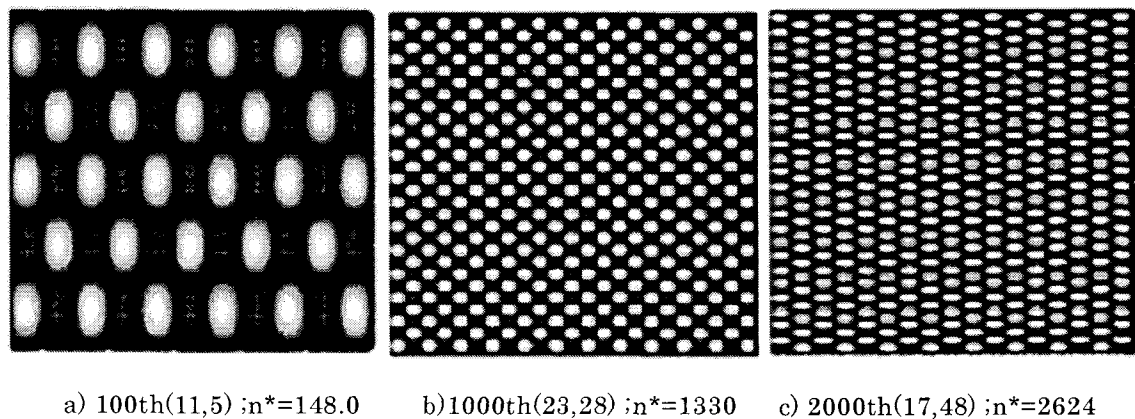
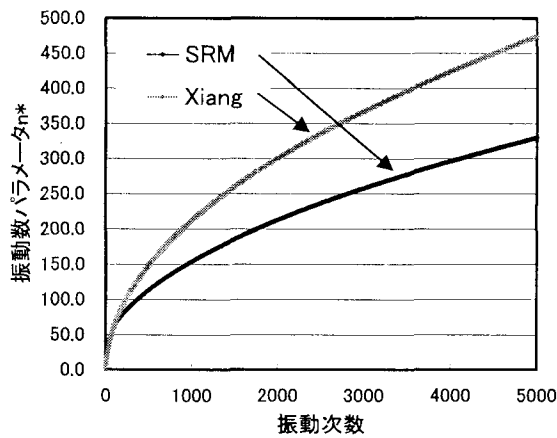
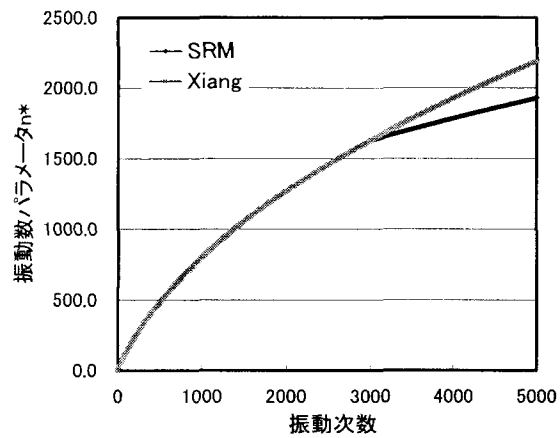


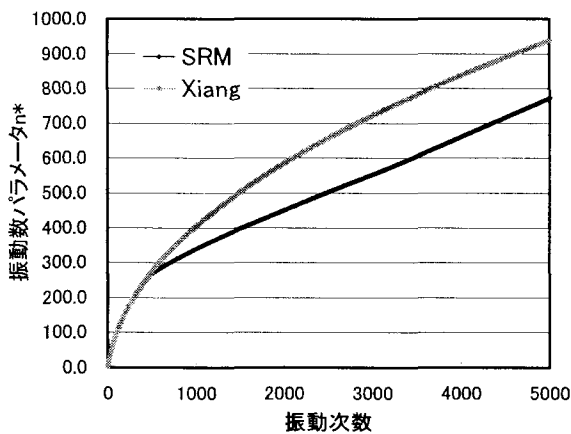
図-12 他の2辺が固定された正方形板のモード形状: SS-CC, $k=5$, $M_y=201$, $b/h=1000$



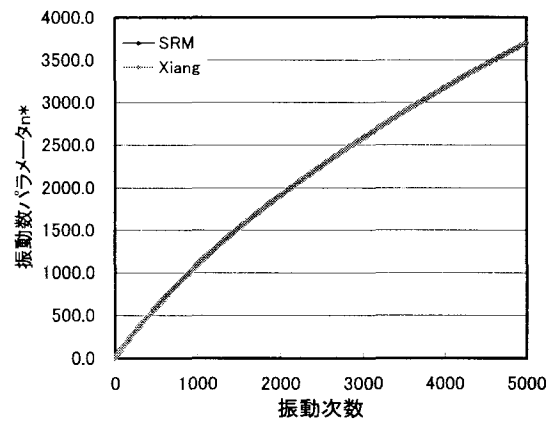
a) $b/h=10$



c) $b/h=50$



b) $b/h=20$



d) $b/h=100$

図-13 振動数パラメータ n^* に対する本手法(SRM)と

Xiangらの解析解との比較:SS-SS, $a/b=1$, $\nu=0.3$

4. あとがき

本論文では, spline-Ritz 法を用いて, 相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺が任意の境界条件を有する Mindlin 板の高次振動解析を行い, 高次振動特性に与える幅厚比 b/h , ポアソン比 ν などの影響について明らかにしている。

本研究で得られた結果をまとめ, 以下の通りである。

- 1) 離散点の数 M_y を増大すると, 高次の振動数パラメータ n^* と振動モード次数 (m, n) が一定値に向かう安定した収束性を示し, また薄板理論に基づく厳密解や他の数値解と一致した解析結果が得られている。
- 2) Spline 次数を高めると, 同じ離散点の数であれば, 高次の振動次数までの高い解析精度が得られる。
- 3) Mindlin 板の高次振動特性に与えるせん断修正係数 κ と ポアソン比 ν の影響は, 幅厚比に依存し, 振動次数が高次になるほど顕著に現れ, また高次の振動モード次数 (m, n) は, せん断修正係数 κ と ポアソン比 ν の数値により, 異なった性状を示す。

4) 高次振動に与える回転慣性の影響は, 幅厚比が小さくなるほど, 顕著に現れる。

5) Xiang らが提案している薄板理論で求めた振動数パラメータと Mindlin 板の振動数パラメータの解析解は, Mindlin 板の振動モード (m, n) が薄板理論で求めた振動モード (m, n) と同一であることを仮定しているが, Mindlin 板では, 横せん断変形の影響により, 連成モード(結合モード)が多数生じてくるので, 薄板理論では表せない振動モードと振動数パラメータが現れるので, Xiang らの関係式を高次振動解析に適用する場合には, 注意が必要である。

6) DSC 法で導入できない自由の境界条件は, 本手法を用いれば容易に取り扱える。

今後の課題として, 振動次数が数百次を越えると, 平板の振動数パラメータの値が近接した数値を示し, また, モード次数 (m, n) の値が, 材料定数や幾何パラメータに非常に敏感になるので, 高次振動の周波数分布の性質について明らかにしたい。また, 扇形板や斜板の高次振動解析への本手法の適用についても検討して行きたい。

最後に, 貴重なご意見を頂いた査読者に対して謝意を表わします。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C.: Achievements and some unsolved problems of the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 47, pp. 9-28, 2000.
- 2) Langley, R.S. and Bardell, N.S.: A review of current analysis capabilities applicable to the high frequency vibration prediction of aerospace structures. *Aeronautical Journal*, Vol. 102, pp. 287-297, 1998.
- 3) Beslin, O. and Nicolas, J.: A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *J. Sound and Vib.*, Vol. 202, pp. 633-655, 1997.
- 4) Bardell, N.S.: Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. *J. Sound and Vib.*, Vol. 151, pp. 263-289, 1991.
- 5) Zhao, Y.B., Wei, G.W. and Xiang, Y.: Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates. *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 39, pp. 65-88, 2002.
- 6) Wei, G.W., Zhao, Y.B. and Xiang, Y.: A novel approach for the analysis of high-frequency vibrations. *J. Sound and Vib.*, Vol. 257, pp. 207-246, 2002.
- 7) Ng, C.H.W., Zhao, Y.B. and Wei, G.W.: Comparison of discrete singular convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, pp. 2483-2506, 2004.
- 8) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- 9) 近藤八重, 高木信治, 水澤富作: Differential Quadrature 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析, *応用力学論文集*, Vol. 3, pp. 193-201, 2000
- 10) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 69, pp. 345-359, 1980.
- 11) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick rectangular plates, I: comprehensive sets of boundary conditions. *Comput. Struct.*, Vol. 49, pp. 1-29, 1993.
- 12) Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates by the spline strip method. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 163, pp. 193-205, 1993.
- 13) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上 隆: 3 次せん断変形理論に基づく Spline 要素法を用いた直交異方性厚板の振動解析, *応用力学論文集*, Vol. 7, pp. 213-224, 2004.
- 14) Xiang, Y., Wang, C.M. and Kitipornchai, S.: Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundation. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 36, pp. 311-316, 1994.
- 15) Leissa, A.W.: *Vibration of plates*. NASA SP-160, Washington, D.C., 1969.
- 16) 水澤富作, 近藤八重, 木村健一, 名木野晴暢: 平板の振動モードの縮退と連成挙動について, *応用力学論文集*, Vol. 6, pp. 311-320, 2003

(2005 年 4 月 15 日受付)