

最適制御理論を用いた管渠内貯留による浸水制御システムの開発

Development of Flooding Control System Based on Optimal Control Theory

倉橋貴彦*・川原睦人**

Takahiko KURAHASHI and Mutsuto KAWAHARA

*正会員 工修 中央大学大学院 理工研究科土木工学専攻 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents the way to control of water level using optimal control theory and finite element method. The shallow water equation is employed for the analysis of the flow behavior. The optimal control theory is utilized to obtain the control value for the objective state value. The Sakawa-Shindo Method is employed as a minimization technique. The Crank-Nicolson method is applied to the temporal discretization. A method for the optimal control of water level has been presented.

Key Words : Optimal Control Theory, Finite Element Method, Sakawa-Shindo Method

1. はじめに

近年、都市域において道路整備や構造物が建設されることにより、浸透域が減少する傾向にある。浸透域の減少は、都市域における浸水ポテンシャルを増加させ、豪雨時には大量の雨水が地表面を流出することとなる。結果として、流下能力の足りない管渠や下流側の水位の状況等により、流入した雨水は、人孔より溢水し道路等が冠水するといった浸水被害を引き起こす。(図-1 参照)

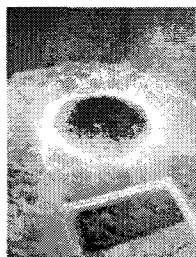


図-1 人孔からの溢水状況 (H15.5.8 新大阪駅付近)

一般的に浸水対策としては、管渠の敷設替えや増補管の敷設などが行われるが、既設管渠の有効利用という観点から、既設管渠をバイパス管渠により結合し既設管渠をネットワーク化することで水位を平準化させるという対策も考えられている。(図-2 参照)

本検討においては、この既設管渠を有効利用した制御方法に着目し、「バイパス管渠」及び「制御装置」を使用した水位の制御方法に関して検討する。本検討の目的は、満水状態の管渠から余裕のある管渠に対して、制御装置（ポンプ等）を用いて適切に通水を行うことで、満水状態にある管渠の水位を目的とする水位に下げ人孔からの溢水を防ぐということである。

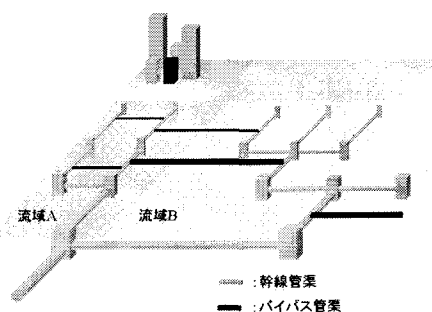


図-2 既設管渠のネットワーク化

本検討で取り扱う流水は、自由表面を持つ流れを仮定し、流れの現象を表す方程式として、平面二次元の浅水長波方程式を適用する。状態方程式の離散化に対しては、空間方向に対して、SUPG(Stream Upwind / Petrov Galerkin) 法¹⁾と等価になることで導出される安定化気泡関数有限要素法^{2),3)}、また時間方向に対してはCrank-Nicolson法を適用することとする。(§.2 参照)

また、バイパス管渠に設置された制御装置からの適切な通水量(最適制御量)を求めるために最適制御理論を本制御システムに対して適用する。(§.3 参照)

ここで、最適制御理論を用いた制御問題を取り扱う場合、全時間及び全接点における状態量の保存が必要となる。解析領域が広く、解析時間の長い問題に対しては計算記憶容量の問題から計算ステップ数に制約が付けられる可能性がある。本検討においては、時間ステップ方向に対して分割を行い、各分割区間ごとに最適制御の計算を順次行い計算記憶容量を削減する「Time Domain Decomposition Method」^{4),5)}を計算記憶容量削減手法として適用する。(§.4 参照)

最適制御理論で取り扱われる逆問題は、計算されたある状態量(ここで示す状態量とは、本検討において

は水位のことを示す。)と目的とする状態量の残差二乗和で構成される評価関数の最小化問題に帰着することができる。⁶⁾ 本検討において、評価関数の最小化手法に対して「Sakawa-Shindo 法」⁷⁾を用いる。(§.5 参照)

数値解析例としては、幹線管渠がバイパス管渠によって結合された管路ネットワークの問題を取り扱い、制御システムの妥当性に関して検証を行う。(§.6 参照)

2. 状態方程式

2.1 状態方程式及び境界条件

本検討においては、流れの現象を表すために平面二次元の浅水長波方程式を用いる。平面二次元の浅水長波方程式は、Navie-Stokes 方程式に対して断面平均流速及び静水圧の仮定より導出され、以下のように記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \nu \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f u = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + f v = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial (h + \eta)}{\partial x} + v \frac{\partial (h + \eta)}{\partial y} + (h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + (h + \eta) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

また、以下に示す離散化における式の煩雑化を防ぐために、上式を総和規約により表現すると、状態方程式は以下のように記述できる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f u_i = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\eta} + \{ (h + \eta) u_i \}_{,i} = 0, \quad (5)$$

ここに u_i は、x-y 平面における流速を表し、 η は水位変動量を表す。浅水長波流れのイメージ図を図-3 に示す。

又、 g は重力加速度を表し、 h は、平均水深を表す。渦動粘性係数は ν によって表され、 ν は以下に示す式で計算される。

$$\nu = \frac{\kappa_l}{6} u_* h,$$

ここに κ_l はカルマン定数を表し、 u_* は摩擦速度を表す。摩擦速度は以下に示す式によって与えられる。

$$u_* = \frac{g n^2 u_k^2}{h^{1/3}},$$

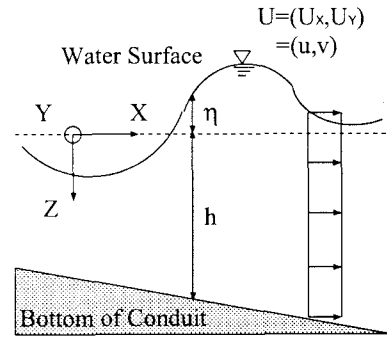


図-3 浅水長波流れのイメージ図

また f は底面摩擦係数を表し、以下に示す式で計算される。

$$f = \frac{g n^2}{(h + \eta)^{4/3}} \sqrt{u_k u_k},$$

ここに n はマニング粗度係数を表す。浅水長波方程式の境界条件は以下のように与えられる。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_d, \quad (6)$$

$$\eta = \hat{\eta} \quad \text{on} \quad \Gamma_d, \quad (7)$$

$$t_i = \nu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_n. \quad (8)$$

ここに t_i はトラクションであり、 n_i は境界における法線ベクトルの方向余弦を表す。また $\hat{\cdot}$ は境界における既知量を表す。

解析領域 Ω における初期条件は以下のように与えられる。

$$u_i = \hat{u}_{i0} \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{at} \quad t = t_0, \quad (9)$$

$$\eta = \hat{\eta}_0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{at} \quad t = t_0. \quad (10)$$

2.2 有限要素方程式

状態方程式の両辺に対して重み関数 w を乗じて、解析領域 Ω で積分すると以下に示す有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w u_j^{adv} u_{i,j} d\Omega + g \int_{\Omega} w \eta_{,i} d\Omega \\ - \nu \left(\int_{\Omega} w u_{i,jj} d\Omega + \int_{\Omega} w u_{j,ij} d\Omega \right) \\ + f \int_{\Omega} w u_i d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \dot{\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w u_i^{adv} h d\Omega + \int_{\Omega} w u_i^{adv} \eta_{,i} d\Omega \\ + \int_{\Omega} w ((h + \eta)^{adv}) u_{i,i} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

また、運動方程式の粘性項に対してグリーンの定理を適用し弱形式を得ると、重み付き残差方程式は以下

のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w u_j^{adv} u_{i,j} d\Omega + g \int_{\Omega} w \eta_{,i} d\Omega \\ & + \nu \left(\int_{\Omega} w_{,j} u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} w_{,j} u_{j,i} d\Omega \right) \\ & + f \int_{\Omega} w u_i d\Omega \\ & = \nu \int_{\Gamma_n} (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \dot{\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w u_i^{adv} h d\Omega + \int_{\Omega} w u_i^{adv} \eta_{,i} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w ((h + \eta)^{adv}) u_{i,i} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

重み付き残差方程式に対しては、安定化気泡関数要素を用いて補間を行うこととする。^{2),3)} 安定化気泡関数要素とは、要素のみに値を持つ関数である C^0 連続性を有する適合型の気泡関数に対して、気泡関数のみでは十分とされない数値的不安定性を回避するために、気泡関数の重心点のみにに対して安定化作用制御項を付加した要素のことである。気泡関数要素における安定化作用制御項は、安定化有限要素法の一つである SUPG(Stream Upwind / Petrov Galerkin) 法¹⁾ と等価になるように導出される。安定化気泡関数要素を用いて補間を行うと、以下に示す有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & M \dot{u}_i + S_j(u_j^{adv}) u_i + g S_i \eta \\ & + \nu (H_{jj}(\nu') u_i + H_{ji}(\nu') u_j) \\ & + f M u_i = T_i, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & M \dot{\eta} + S_i(u_i^{adv}) h + S_i(u_i^{adv}) \eta \\ & + S_i((h + \eta)^{adv}) u_i + A(\nu') \eta = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $M, S_i((u_i^{adv}))$, $S_j(u_j^{adv})$, $S_i((h + \eta)^{adv})$, $H_{ji}(\nu')$, $H_{jj}(\nu')$ および $A(\nu')$ は、安定化気泡関数要素を用い、補間関数により計算された有限要素方程式における係数行列を表し、 ν' は安定化気泡関数要素における安定化作用制御項を表す。また T_i は、流速に対するトラクションベクトルを意味する。

2.3 状態方程式の時間方向に対する離散化

有限要素方程式の時間方向に対する離散化に対しては、Crank-Nicolson 法を適用する。有限要素方程式を時間方向に対して離散化を施すと以下に示す方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & M \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + S_j(u_j^{adv}) u_i^{n+\frac{1}{2}} + g S_i \eta^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \nu (H_{jj}(\nu') u_i^{n+\frac{1}{2}} + H_{ji}(\nu') u_j^{n+\frac{1}{2}}) \\ & + f M u_i^{n+\frac{1}{2}} = T_i, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & M \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + S_i(u_i^{adv}) h^{n+\frac{1}{2}} \\ & + S_i(u_i^{adv}) \eta^{n+\frac{1}{2}} + S_i((h + \eta)^{adv}) u_i^{n+\frac{1}{2}} \\ & + A(\nu') \eta^{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $u_i^{n+\frac{1}{2}}$, $h^{n+\frac{1}{2}}$, $\eta^{n+\frac{1}{2}}$ は以下に示すように n ステップ目と $n+1$ ステップ目の平均値として表される。

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n), \quad (19)$$

$$h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h^{n+1} + h^n) = h, \quad (20)$$

$$\eta^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\eta^{n+1} + \eta^n) \quad (21)$$

また、移流速度 u_i^{adv} 及び $(h + \eta)^{adv}$ に対しては Adams-Bashforce 近似を施し、移流速度に対しては以下に示すように二次精度を有した線形近似として取り扱う。

$$u_i^{adv} = \frac{1}{2}(3u_i^n - u_i^{n-1}), \quad (22)$$

$$(h + \eta)^{adv} = \frac{1}{2}(3(h + \eta)^n - (h + \eta)^{n-1}). \quad (23)$$

3. 最適制御理論

3.1 評価関数

最適制御量は最適制御理論により定式化される。最適制御理論は目的とする状態量になるように、適切な制御量を求めるための方法論である。最適制御理論で取り扱われる逆問題は、評価関数の最小化問題に帰着することができる。⁶⁾ 本検討で用いる評価関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\eta - \eta_{obj})^T Q (\eta - \eta_{obj}) d\Omega dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \bar{u}_i^T R \bar{u}_i d\Omega dt. \end{aligned} \quad (24)$$

ここに、 Q と R は重み定数を表し、 η は計算で求めた水位及び η_{obj} は目的とする水位を表す。また $\bar{u}_i$ は、制御流速を表す。評価関数の第一項は、計算で求められた水位が目的とする水位に近づくことを意味し、評価関数の第二項は最適通水量が過大になるのを防ぐ効果があることを意味する。本検討における目的は、以上に示す評価関数が最小になるような、最適通水量を求めることである。ここに重み定数 Q および R は、評価対象（目的点における水位 η および制御点における制御流速 $\bar{u}_i$ ）のバランスをとるために設定する値であり、制御装置の規模を然程考慮せず目的点における水位の制御に主眼をおく場合は R に比べ Q を大きくとる必要があり、また最終的に得られる制御点における制御流速を過大にしない場合は Q に比べ R を大きくとる必要

がある。ここに目的とする水位は計算前に与えられる値であり、浸水が生じないような水位に定められるものである。

3.2 随伴方程式の導出

ここに示す評価関数は、状態方程式により拘束されていることから、ラグランジュ乗数法を導入することとする。ラグランジュ乗数法は拘束条件付き最小化問題に適した方法である。本検討においては、空間方向において離散化した状態方程式を拘束条件として付加することとした。評価関数はラグランジュ乗数及び状態方程式を付加することにより拡張され、以下に示す拡張評価関数が得られる。

$$\begin{aligned} J^* = J &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} u_i^{*T} (M\dot{u}_i + S_j(u_i^{adv})u_i + gS_i\eta \\ &+ \nu(H_{jj}(\nu')u_i + H_{ji}(\nu')u_j) \\ &+ fMu_i - T_i) d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \eta^{*T} (M\dot{\eta} + S_i(u_i^{adv})h + S_i(u_i^{adv})\eta \\ &+ S_i((h + \eta)^{adv})u_i + A(\nu')\eta) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (25)$$

ここに u_i^* 及び η^* は、流速及び水位におけるラグランジュ乗数を表す。行列 M , S_i , S_j , H_{ii} , H_{ji} 及び H_{jj} は、有限要素法により導出された係数行列である。拡張評価関数は時間微分項及びハミルトニアン H の項に分けることができ、以下のように書き表すことができる。

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (H - u_i^{*T} M\dot{u}_i - \eta^{*T} M\dot{\eta}) d\Omega dt, \quad (26)$$

ここにハミルトニアン H は以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}(\eta - \eta_{obj})^T Q(\eta - \eta_{obj}) + \frac{1}{2}\bar{u}_i^T R\bar{u}_i \\ &+ u_i^{*T} (-S_j(u_i^{adv})u_i - gS_i\eta \\ &- \nu(H_{jj}(\nu')u_i + H_{ji}(\nu')u_j) - fMu_i + T_i) \\ &+ \eta^{*T} (-S_i(u_i^{adv})h - S_i(u_i^{adv})\eta \\ &- S_i((h + \eta)^{adv})u_i - A(\nu')\eta). \end{aligned} \quad (27)$$

拡張評価関数 J^* が停留になるための必要条件として、 J^* の第一変分が 0 になる必要がある。そこで、拡張評価関数 J^* の第一変分を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta J^* = &\int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} - M\dot{u}_i \right) \delta u_i^* \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} - M\dot{\eta} \right) \delta \eta^* \right\} d\Omega dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} + M\dot{u}_i^* \right) \delta u_i \\ &+ \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} + M\dot{\eta}^* \right) \delta \eta \Big\} d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial J^*}{\partial \bar{u}_i} \delta \bar{u}_i d\Omega dt \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ u_i^{*T}(t_0) M\delta u_i(t_0) - u_i^{*T}(t_f) M\delta u_i(t_f) \right. \\ &\left. + \eta^{*T}(t_0) M\delta \eta(t_0) - \eta^{*T}(t_f) M\delta \eta(t_f) \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

ここに $\bar{u}_i$ は制御流速を表す。

又、拡張された評価関数の第一変分より、拡張された評価関数が停留になるための必要条件として、以下のラグランジュ乗数の終端条件が得られる。

$$u_i^* = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{at } t = t_f. \quad (29)$$

$$\eta^* = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{at } t = t_f. \quad (30)$$

また、ハミルトニアン H の状態量に関する勾配を計算すると、以下に示す随伴方程式が得られる。空間方向に離散化した状態方程式を評価関数に対する拘束条件として付加し第一変分を計算した場合、空間方向に離散化された随伴方程式を直接的に得ることができるため、定式化が簡便になるため有用な方法であると考えられる。

$$M\dot{u}_i^* = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad (31)$$

$$M\dot{\eta}^* = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (32)$$

以上に示す随伴方程式をラグランジュ乗数の終端条件が固定されていることから、逆時間に対して解くことで、計算領域におけるラグランジュの未定乗数を算定する。随伴方程式の時間方向の離散化に対しては、状態方程式と同様に Crank-Nicolson 法を適用することとする。

4. Time Domain Decomposition Method

4.1 計算アルゴリズム

最適制御理論を用いて最適制御の計算を行う場合、随伴方程式を解くために、全時間、全接点における状態量を必要とする。長期にわたる非定常問題の最適制御計算を行う場合、沢山の計算記憶容量を必要とし、取り扱う問題によってはこの計算記憶容量の問題が深刻になってくる。そこで、非定常の最適制御の計算を行う際に計算記憶容量を削減する手法として、Time Domain Decomposition Method^{4),5)} が R.Glowinski らによって提案された。

この手法は、ある区間ごとに最適制御の計算を行っていく方法で確実に計算記憶容量を削減する事ができる。しかし、この手法を使用すると1回のイタレーションを計算を行うために2回、状態方程式を解かなければならないため、余計な順解析を行う分、普段の最適制御計算よりも多くの計算時間を要求する。この点の改善も今後必要になってくるであろう。

以下に Time Domain Decomposition Method を使用した非常最適制御計算の計算アルゴリズムを示す。

1. 時間ステップ数 N を決定する。
2. 正の整数である分割数 A と分割区間内における時間ステップ数 B を決定する。ここに $AB = N$ である。
3. 時間区間 $[0, t_f]$ を A 区間に分割する。各区間の長さは $B\Delta t$ である。
4. 状態方程式を解き、 $n = iB$ の点において、全接点における状態量を保存する。ここに $i = 0, 1, \dots, A-1$ である。続いて時間ステップ $n = (A-1)B + j$ に対して状態方程式を解き、全接点における状態量を保存する。ここに $j = 1, 2, \dots, B$ である。(従来の方法との比較も併せ、Time Domain Decomposition Method における分割の仕方、及び状態量を保存する点の詳細を図-4 に示す)
5. 保存しておいた状態量を使用し、時間ステップ $n = N, N-1, \dots, N-B+1$ に対して、随伴方程式を解く。次に $n = N-B+1, N-B+2, \dots, N$ に対して評価関数の制御流速に対する勾配を計算を行う。
6. 時間ステップ $n = (A-2)B+1, (A-2)B+2, \dots, (A-1)B-1$ に対して、状態方程式を解き、全接点における状態量を保存する。
7. 時間ステップ $n = (A-2)B+1, (A-2)B+2, \dots, (A-1)B-1$ に対して保存しておいた状態量を使用し、時間ステップ $n = (A-1)B-1, (A-1)B-2, \dots, (A-2)B+1$ に対して随伴方程式を解く。続いて評価関数の制御流速に対する勾配の計算を行う。
8. $A = A-1$ としてステップ6へ戻る。

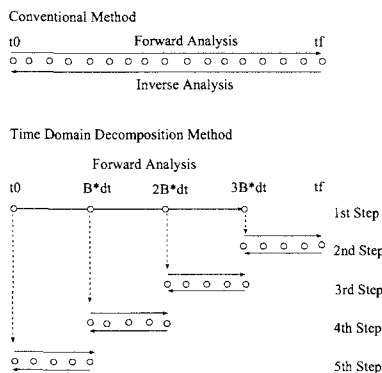


図-4 従来の方法と Time Domain Decomposition Method の比較。

4.2 最小計算記憶容量

ここで、計算記憶容量を最小にする事を考える。本手法を使用すると、計算記憶容量は $A+B$ となる。そこで、目的関数を以下の様に設定する。

$$J = A + B \quad (33)$$

ここに、総時間ステップ数は以下の様になる。

$$N = AB \quad (34)$$

目的関数は総時間ステップ数に拘束されている事から以下の様に拡張される。

$$J^* = A + B + \lambda(N - AB) \quad (35)$$

ここに λ はラグランジュ乗数を表す。そこで、目的関数 (33) が最小になるための分割数 A と分割区間内における時間ステップ数 B を求めるために、拡張された目的関数 (35) の各変数に対する勾配を計算すると以下の様になる。

$$\frac{\partial J^*}{\partial A} = 1 + \lambda B \quad (36)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial B} = 1 + \lambda A \quad (37)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial \lambda} = N - AB \quad (38)$$

ここで、拡張された目的関数の各変数に対する勾配が0にならなければならないので、式 (36), (37) より A, B は以下の様になる。

$$A = -\frac{1}{\lambda} \quad (39)$$

$$B = -\frac{1}{\lambda} \quad (40)$$

この A, B を式 (38) に代入すると、以下の式が得られる。

$$N - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 0 \quad (41)$$

よってラグランジュ乗数 λ は以下の様に求められる。

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (42)$$

求まったラグランジュ乗数 λ を式 (39), (40) に代入すると、目的関数 (33) を最小にする分割数 A と分割区間内における時間ステップ数 B は正の整数という条件より以下の様になる。

$$A = \sqrt{N} \quad (43)$$

$$B = \sqrt{N} \quad (44)$$

計算記憶容量は分割数 A と分割区間内における時間ステップ数 B の和によって表せるので、 $2\sqrt{N}$ となる。結果として N から $2\sqrt{N}$ に削減できた事になる。もし、 $\sqrt{N}$ が整数で無い場合、 A と B はなるべく近い値を取る事により、計算記憶容量を最も削減できる。よって、

長期の大規模な最適化問題に対して、この手法は大変効果を発揮すると考えられる。

数値解析例 (§6.2) に示す例題において TDDM の効果について検証を行った。この数値解析例においては、全タイムステップ数を 2500 と設定している。よって、分割区間数 A 及び分割区間内タイムステップ数 B を変化させることで、実行ファイルの EXE.Size について評価を行った。分割区間数 A 、分割区間内タイムステップ数 B 及び実行ファイルの EXE.Size の関係を表-1 に示す。

表-1 A , B 及び EXE.Size の関係

A	B	EXE.size (MB)	削減率 (%)
1	2500	1844	0.0
2	1250	1075	41.7
5	500	614	66.7
10	250	346	81.2
50	50	343	81.4

本検討結果からも理解できるように、分割区間数 A 及び分割区間内タイムステップ数 B を概ね同値に設定することで計算記憶容量 (EXE.Size) を最小にすることができた。結果として、分割を行わなかった場合と比較し 81.4% の削減に成功した。

よって、長期の大規模領域における最適制御の計算に対しては、有効な手法であると考えられる。

5. 最小化手法

5.1 Sakawa-Shindo 法

本検討においては、Sakawa-Shindo 法⁷⁾ を評価関数の最小化手法として適用する。

本手法では、各イタレーション間における制御流速の差をペナルティ項として付加した修正評価関数を導入する。ペナルティ項を付加した修正評価関数は以下のように書き表される。

$$K = J^{*(l)} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \bar{U}_i^T W^{(l)} \bar{U}_i d\Omega dt, \quad (45)$$

$$\bar{U}_i = \bar{u}_i^{(l+1)} - \bar{u}_i^{(l)}, \quad (46)$$

ここに、 l は評価関数の収束に対するイタレーションカウントを示し、 $\bar{u}_i$ は制御流速、 $W^{(l)}$ は重みパラメータを示す。修正評価関数に対して停留条件を計算すると以下の式が得られる。

$$\delta K = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial J^*}{\partial \bar{u}_i} \right)^{(l)T} + \bar{U}_i^T W^{(l)} \right\} \delta \bar{u}_i d\Omega dt, \quad (47)$$

よって、 $\delta K = 0$ という条件より以下に示すイタレーション更新時における制御流速更新の式が得られる。

$$W^{(l)} \bar{u}_i^{(l+1)} = W^{(l)} \bar{u}_i^{(l)} - \frac{\partial J^{*(l)}}{\partial \bar{u}_i}, \quad (48)$$

最終的に計算により得られた制御流速 $\bar{u}_i$ より、最適通水量 $\bar{Q}$ は以下に示す式により算定される。

$$\bar{Q} = \int_{\Gamma_{con}} (h + \eta) \bar{u}_i d\Gamma. \quad (49)$$

ここに、 Γ_{con} は制御境界を示す。

Sakawa-Shindo 法のアルゴリズムを以下に示す。

1. 初期制御量 $\bar{u}_i^{(l)}$ を決定する。
2. 状態方程式より $u_i^{(l)}$ および $\eta^{(l)}$ を算定し、評価関数 $J^{(l)}$ を計算する。
3. 随伴方程式より $u_i^{*(l)}$ および $\eta^{*(l)}$ を算定する。
4. イタレーション更新時における制御流速 $\bar{u}_i^{(l+1)}$ を制御流速の更新式より算定する。
5. 収束判定を行う。もし $\|\bar{u}_i^{(l+1)} - \bar{u}_i^{(l)}\| < \epsilon$ なら計算を終了し、そうでない場合は step 6 へ進む。
6. 状態方程式より $u_i^{(l+1)}$ および $\eta^{(l+1)}$ を算定し、評価関数 $J^{(l+1)}$ を計算する。
7. 重みパラメータ $W^{(l)}$ の更新を行う。
もし $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ なら、

$$W^{(l+1)} = 0.9W^{(l)} \quad (50)$$

とし、step 3 へ戻る。そうでない場合は、

$$W^{(l+1)} = 2.0W^{(l)} \quad (51)$$

とし、step 4 へ戻る。

なお、重みパラメータの初期設定値 $W^{(1)}$ は、計算によって得られた拡張評価関数の操作量に対する勾配から適切に設定することとする。

6. 数値解析例

6.1 簡易なモデルを用いた検証例題

本節においては、簡易なモデルを用いて、制御プログラムの妥当性に関する検証を行う。解析例として用いる計算モデルを図-5 に示す。また、本検討で用いる有限要素メッシュ図を図-6 に示す。総接点数は 603 であり、総要素数は 800 である。

流入水は管渠の左端から与えられるものとする。まず、図-7 のように流入水を境界条件として仮定し、順解析を行うと図-8 に示すように目的点において、水位の時系列変化が得られる。

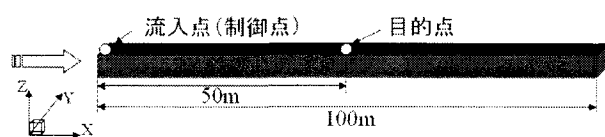


図-5 計算モデル

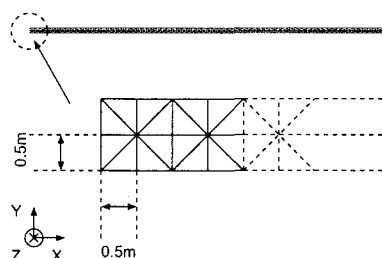


図-6 有限要素メッシュ図

ここで、もし図-8 に示す水位を最適制御計算における目的水位 η_{obj} とし、流入境界を制御境界として定義すると、図-7 に示すような流入水の時系列変化が制御流量 $\bar{Q}$ として求まるはずである。そこで、上に示す最適制御の問題を行うことでプログラムの妥当性に関して検証を行うこととする。

本研究で用いた計算条件を表-2 に整理する。

表-2 計算条件

タイムステップ数	1500
時間増分 Δt (秒)	0.04
カルマン定数 κ_l	0.41
マンニングの粗度係数 n ($\text{sec}/\text{m}^{1/3}$)	0.013
重み定数 Q	1.0
重み定数 R	0.0001

検証を行った結果、図-9 に示すような評価関数が得られ、単調に減少し概ねゼロに収束していることが確認できる。また、最適制御の計算を行うことで、図-10 に示す流入水（制御流量）の時系列変化、及び図-11 に示す目的点における水位の時系列変化が得られた。ここに格子点で示す値は、計算前に仮定した流入水及び目的点における水位を示し、破線は最適制御の計算を行うことで得られた流入水（制御流量）及び目的点における水位の時系列変化を示す。

これらの結果より、最適制御計算を行う前に仮定したデータと最適制御の計算を行うことで得られた結果の間に若干の差異は見受けられるが、波形の時系列変化及びピーク値等より概ね一致していると考えられる。

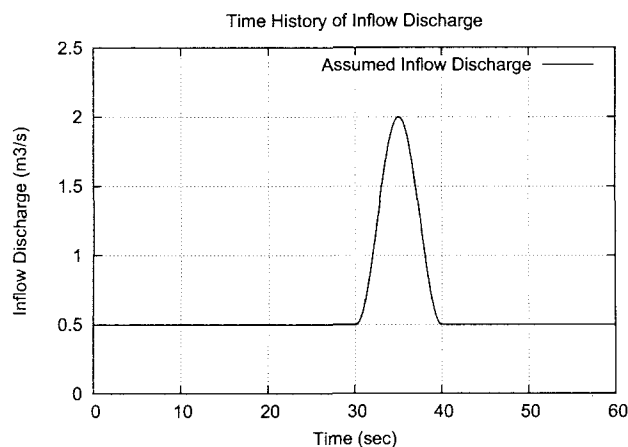


図-7 流入水量の時系列変化

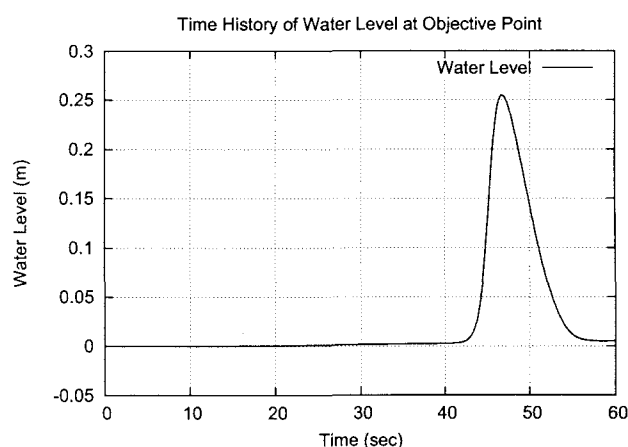


図-8 目的点における水位の時系列変化

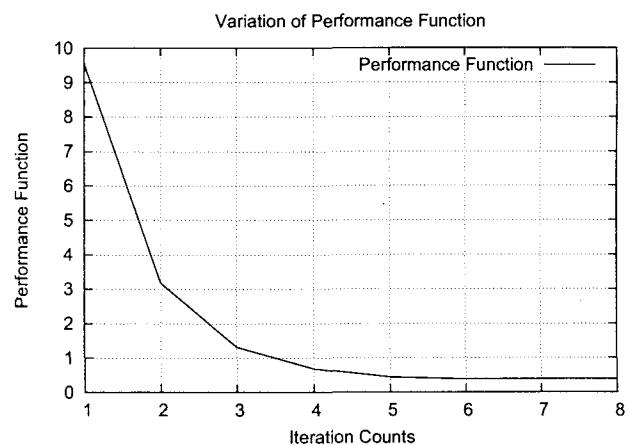


図-9 評価関数の収束状況

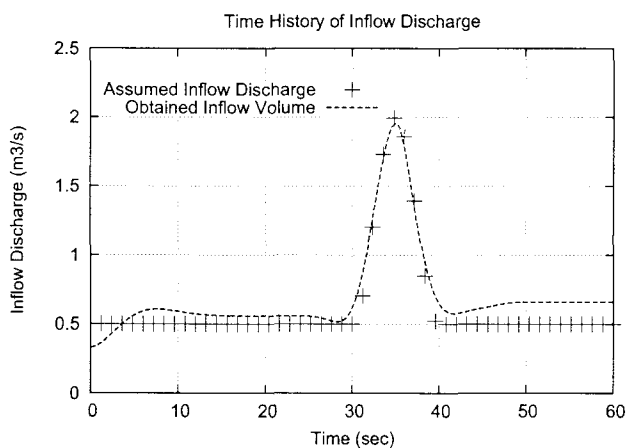


図-10 制御流量の時系列変化

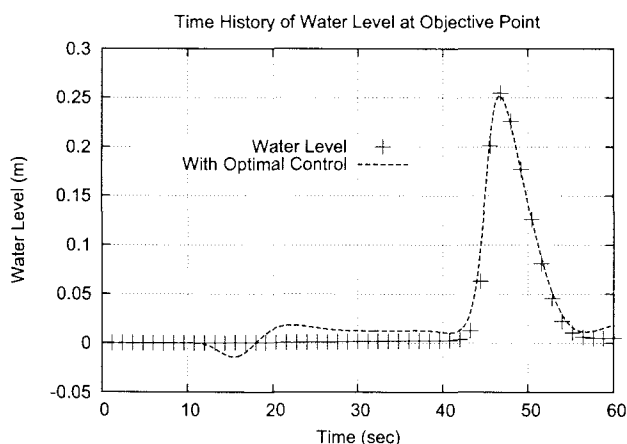


図-11 目的点における水位の時系列変化

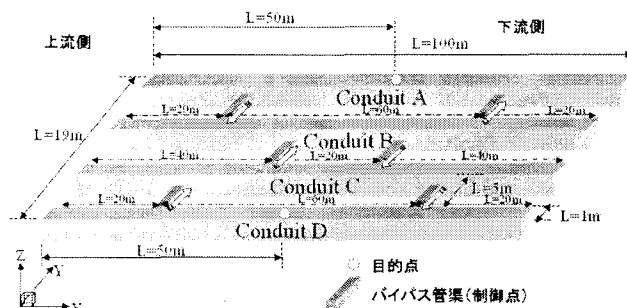


図-12 計算モデル

以上のことを踏まえ、管渠 A 及び D の中央に目的点を設定し、目的点における水位を目的とする水位 η_{obj} となるような、各バイパス管渠からの適切な通水量を求めることとする。

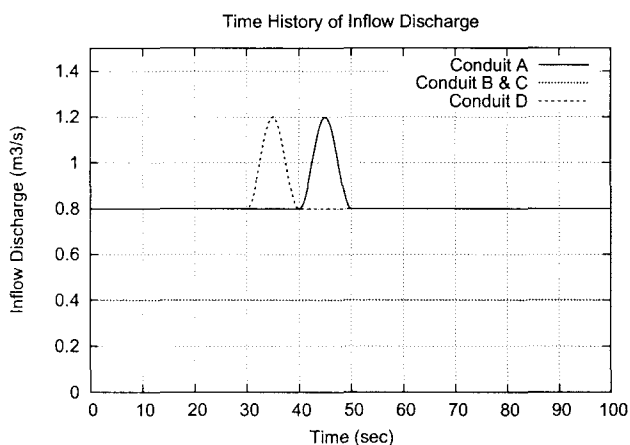


図-13 流入境界条件

6.2 複数管路の問題への適用

(1) 計算モデル

複数管路の問題への適用として、図-12 に示すような管路ネットワークの問題を考える。管路ネットワークは、4 本の幹線管渠及び 6 本のバイパス管渠によって構成されており、各幹線管渠へ通水可能なように各幹線管渠に対して 2 本のバイパス管渠を接続している。また、幹線管渠の延長を 100m と設定し、幹線管渠に接続しているバイパス管渠の延長は 5m とする。

各幹線管渠の流入境界条件を図-13 に示す。管渠 A 及び D においては、ピーク流量が時間差で現れるものと仮定し、管渠 B 及び C においては、定常の流量を与えるものとする。

また、初期水位の条件を図-14 に示す。管渠 B 及び C の初期水位は、管渠 A 及び D における水位の半分に設定し、管渠内において若干余裕があるものと想定する。よって、多量の流入水があった場合、管渠 A 及び D における水位は、管渠 B 及び C に通水することで目的とする水位にすることが可能である。

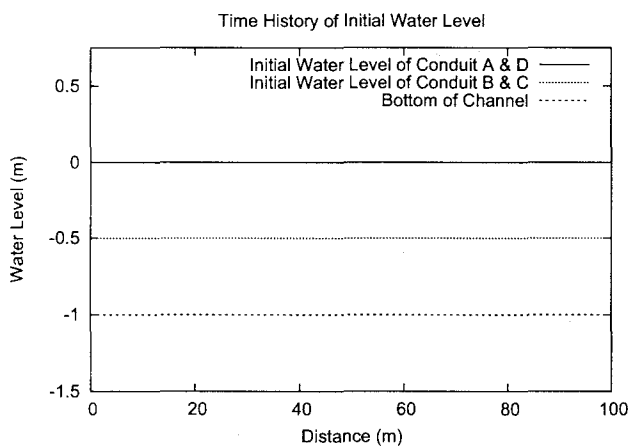


図-14 各幹線管渠における初期水位の条件

(2) 制御境界の取り扱い及び有限要素メッシュ図

制御装置により通水されるバイパス管渠及び幹線管渠の間は、制御装置及びゲートにより仕切られているため水面が不連続となることや、制御流量は制御装置

により強制的に通水されるため圧力状態となることより、以下のことを考慮しなければならない。

- 幹線管渠及びバイパス管渠の間において水面が不連続となっていることから、要素によって結合することができない。
- バイパス管渠内部は、制御装置により通水された制御流量により圧力状態となるため、浅水流の仮定が成り立たなくなる。

以上の事を踏まえ、本研究ではバイパス管渠および幹線管渠間における水面の不連続性の回避、また解析における浅水流の仮定を満足させるために、バイパス管渠のメッシュは生成しないものとし、バイパス管渠の流出側における境界条件の定義を管渠内が圧力状態ということから「制御境界 Γ_{con1} 及び Γ_{con2} において制御流量の境界条件が連続している。」とすることで解析を行うこととする。ここに、制御境界における境界条件を図-15 のように定義する。

よって、本節において用いる有限要素メッシュ図はバイパス管渠のメッシュを生成しないため幹線管渠のみのものとなり、図-16 に示すものを用いることとする。また、有限要素メッシュの接点数は 2520 であり、要素数は 3320 である。

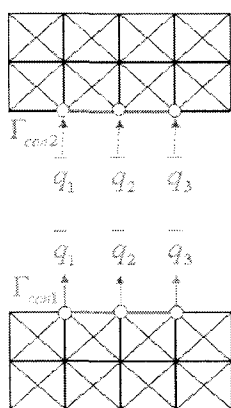


図-15 制御境界の取り扱い

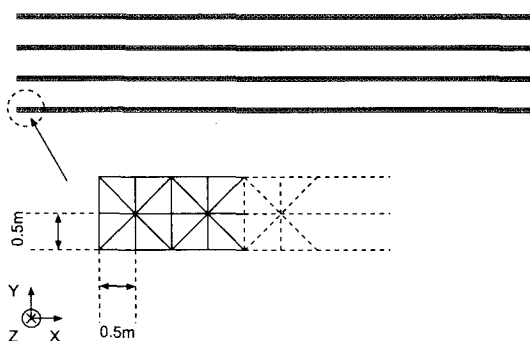


図-16 有限要素メッシュ図

(3) 計算条件及び計算結果

本検討における条件を、表-3 に整理する。評価関数の重み定数 Q は、目的点において 1.0 と設定しそれ以外

の点においては 0.0 と設定する。同様に評価関数の重み定数 R は、制御点において 0.0001 と設定し、それ以外の点では 0.0 と設定する。また、マンニング粗度係数に関しては、コンクリートの管渠を想定し、 $0.013 \text{ sec/m}^{1/3}$ と設定する。目的とする水位の設定は -0.10 m として設定した。

表-3 計算条件

タイムステップ数	2500
時間増分量 Δt (sec)	0.04
カルマン定数 κ_l	0.41
マンニングの粗度係数 n ($\text{sec/m}^{1/3}$)	0.013
重み定数 Q	1.0
重み定数 R	0.0001
目的水位 η_{obj} (m)	-0.10

ここに、制御点及び目的点の番号を図-17 に示す。実際のポンプの装置を考慮し、制御流量の通水方向は一方方向に固定している。

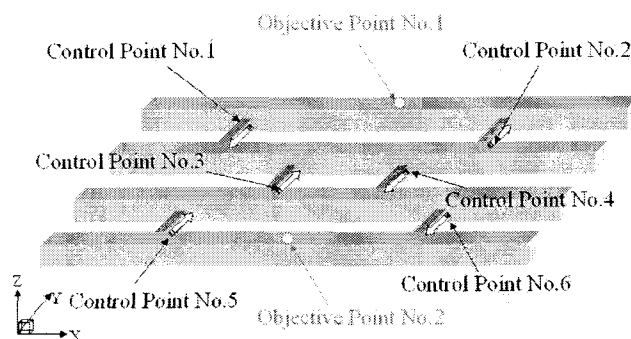


図-17 制御点及び目的点の番号

以上の計算条件のもとに最適制御の計算を行い、得られた計算結果を図-18 から図-22 に示す。

図-18 は評価関数の収束状況を示す。

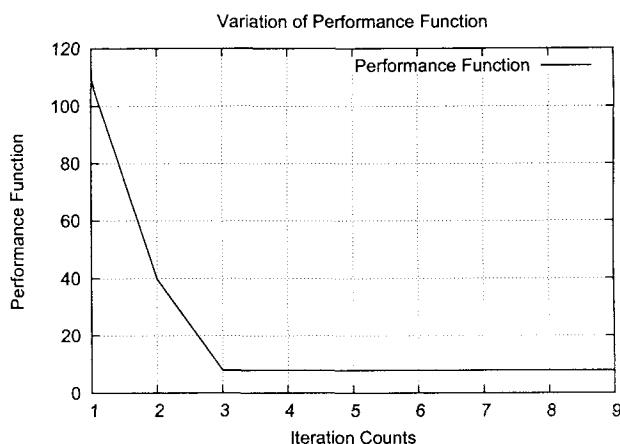


図-18 評価関数の収束状況

評価関数は単調に減少し収束していることが確認できる。よって、この事は最適制御の計算で得られた水

位が目的とする水位に近づいていることを表している。

また、制御流量の時刻歴を図-19及び図-20に示す。結果として、No.1及びNo.5の制御装置は稼動したが、No.2～No.4及びNo.6は稼動する必要はないという結果が得られた。この結果は、評価関数の停留条件より自動的に求まるものであり、本検討においては、目的点は幹線管渠A及びDのみに設定していることから、幹線管渠B及びCから幹線管渠A及びDに対して通水を行う必要がないため、計算結果の妥当性もうかがえる。

次に、図-21及び図-22に目的点No.1及びNo.2における水位の時刻歴を示す。ここに実線は制御を行わなかった場合、破線は制御を行った場合を示し、-0.10mに示す線は目的とする水位 η_{obj} を示す。これらの図より、両方の目的点において、目的とする水位に近づけられていることが確認できる。

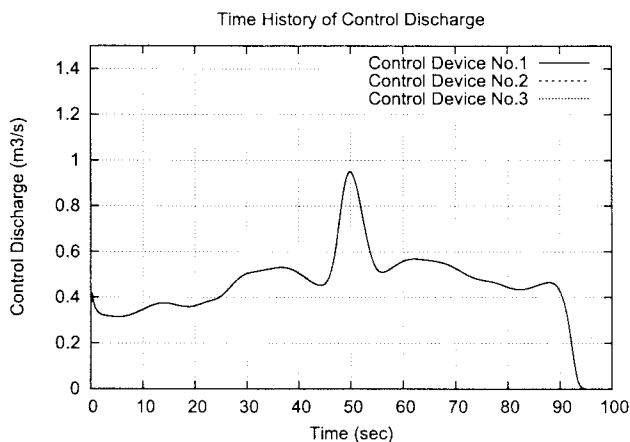


図-19 制御装置 No.1～No.3における制御流量の時系列変化

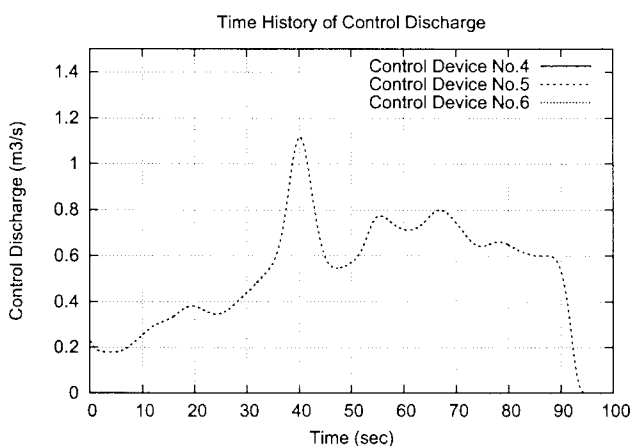


図-20 制御装置 No.4～No.6における制御流量の時系列変化

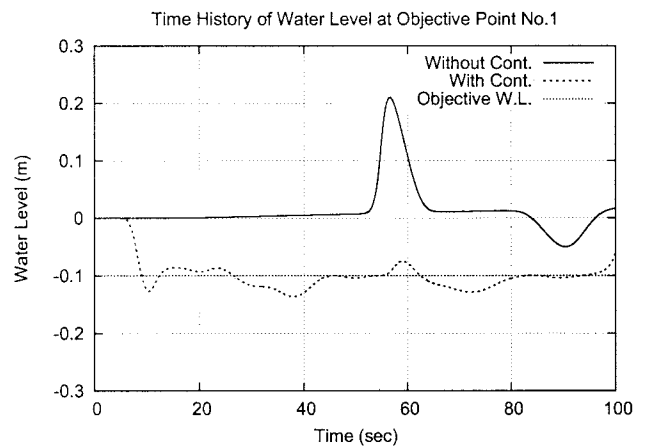


図-21 目的点 No.1における水位の時系列変化

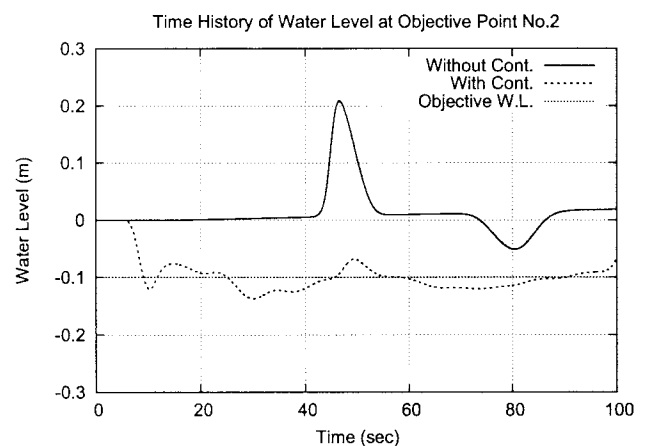


図-22 目的点 No.2における水位の時系列変化

7. おわりに

本検討においては、バイパス管渠及び制御装置を用いた満水管渠における水位の制御システムを想定し、最適制御理論による最適通水量の決定方法に関して提案を行った。

状態方程式としては平面二次元の浅水長波方程式、離散化手法としては、空間方向に安定化気泡関数有限要素法、時間方向に対してはCrank-Nicolson法を用いた。また、最小化手法としては、Sakawa-Shindo法を適用した。最適制御理論を用いた本制御システムにより、目的とする水位近傍に水位を落ち着かせるような最適通水量が求まった。

本研究で得られた知見を以下に整理する。

1. 適切な制御流量を最適制御理論を適用することにより求めることができた。
2. 本研究で示したアプローチは、バイパス管渠や制御装置の要否を判定することに対しても利用できる。
3. 本研究で示した制御システムを構築する時に、事前に必要とされる制御流量を推測することができ、

制御装置（導水ポンプ等）やバイパス管渠の設計に対しても有効である。

4. 「バイパス管渠」及び「制御装置」を用いることで管渠内における水位を制御することができることが確認できた。よって、管渠内に余裕がある場合は、導水システムを構築することで、都市域の浸水被害の軽減に対しても有効であると考えられる。

また、本研究においては、Time Domain Decomposition Method を最適制御の計算に適用した。よって、計算記憶容量を大幅に削減することができた。しかし、本手法は以上に示した長所以外に短所も併せもっており、計算記憶容量を削減するために状態方程式を2回解く必要がある。この事により多くの計算時間が、通常の最適制御計算と比較して必要とされることから、この短所を改善するためにも評価関数の収束性の早い最小化手法の適用が望まれる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar. Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations. *ADVANCES IN APPLIED MECHANICS*. 1992; VOL-UME 28: 1-42.
- 2) J.Matsumoto, A.A.Khan, S.S.Wang, and M.Kawahara. Shallow Water Flow Analysis with Moving Boundary Technique Using Improved Bubble Element. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2002; 16(2): 129-134.
- 3) J.Matsumoto, T.Umetsu and M.Kawahara. Stabilized Bubble Function Method for Shallow Water Long Wave Equation. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2003; 17 (4): 319-325.
- 4) J.W.He and R.Glowinski. Neumann control of unstable parabolic systems: numerical approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1998; 96: 1-55.
- 5) M.Berggren. Numerical solution of a flow-control problem: velocity reduction by dynamic boundary action. *SIAM J. Sci. Comput.*. 1998; 19: 829-860.
- 6) T.Kurahashi and M.Kawahara. Water Quality Control by Bank Placement Based on Optimal Control and Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2003; 41: 319-338.
- 7) Y.Sakawa and Y.Shindo. On Global Convergence of An Algorithm for Optimal Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*. December 1980; Vol. ac-25 No.6: 1149-1153

(2005 年 4 月 15 日 受付)