

厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響

Influence of Lateral Load Effect on Bending Analyses of Thick Plates

末武義崇*

Yoshitaka Suetake

*正会員 工博 足利工業大学教授 工学部都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

Many high-order theories for plate bending have been presented, in which the transverse shear deformation is included. Although those refined plate theories retain high accuracy for plate analyses, their governing equations are usually quite complicated and are not suitable for practical use. In addition, few researchers carefully discuss influence of estimation of lateral loads. In this paper, we pay attention to constitution of lateral loads of plates. Especially we formulate the new theory for plate bending, in which the effect of a body force is distinguished from that of surface tractions. As a result, we can establish a quite simple plate theory including not only transverse shear deformation but also transverse normal stress effect. It follows from the present numerical examples that the new theory presented here is as accurate as Lo-Christensen-Wu's theory for thick plate bending.

Key Words: thick plate theory, transverse shear deformation, load effect, transverse normal stress, body force

キーワード: 厚板理論, 横せん断変形, 荷重効果, 板厚方向垂直応力, 物体力

1. はじめに

横せん断変形の影響を考慮した平板の曲げ理論については, Reissner¹⁾およびMindlin²⁾以来, 数多くの研究報告がなされている。しかしながら, 異方性の強い平板や変動の激しい荷重を受ける平板については, 古典的なReissner-Mindlin理論に基づいた解析であっても, 必ずしも良好な精度の解が得られないことも明らかにされている。こうした背景を踏まえ, 1970年代後半から1980年代初頭にかけて, 解析精度の向上を図る目的で, 種々の高次理論が考案された。すなわち, 変位や応力の板厚方向分布を, 板厚方向座標 z の高次項を含む形で仮定して平板理論を構築する理論である。例えば, Levinson³⁾あるいはReddy⁴⁾は, たわみを板厚方向で一定としつつ, 面内変位の分布に関し z の3次項まで考慮して支配方程式を誘導している。

一方, Lo, ChristensenおよびWu⁵⁻⁷⁾は, 面内変位について板中央面の伸縮を含む3次, たわみについて2次の変位分布を仮定し, 高次理論を構築している。得られた高次理論は, 11個の未知量と11個の支配方程式からなっている。Lo-Christensen-Wuの理論⁹⁾(以下, "LCW理論")では, 停留ポテンシャルエネルギーの原理に従って定式化を行っているため, z の高次項に対応した合応力の導入が必要となる。名木野ら⁸⁾も指摘しているように, 形式的に定義されたこれらの合応力は, 物理的な意味が必ずしも明確でない。また, 著者⁹⁾自らが述べているように, LCW理論は, 古典的な厚板理論に比べてかなり複雑であり, 実用上

の問題点が残されている。

上記の平板理論は変位仮定に基づく高次理論であるが, 応力仮定に基づく高次理論についても多くの研究報告がなされている。Ambartsumyan⁹⁾は, 横せん断応力分布および板厚方向垂直応力分布を仮定することから出発し, 平板理論を誘導している。仮定した横せん断応力については, 板上下面における境界条件を満足するような未定関数を導入して表現している。板厚方向垂直応力分布は, 力の釣り合い条件を積分して求めている。また, 板のたわみについては, 板厚方向に変化しないものと仮定している。

同様の考え方に沿って構築された高次理論としては, Reissnerの理論^{10), 11)}, Voyiadjis-Baluchの理論¹²⁾, あるいはRehfieldらの理論^{13), 14)}などが挙げられる。これらの高次理論においては, たわみの板厚方向変化が考慮されている。Reissnerの理論^{10), 11)}およびVoyiadjis-Baluchの理論¹²⁾は, 横せん断応力に関して2次, 板厚方向垂直応力に関して3次の板厚方向応力分布を仮定しており, 基本的に同一の分布仮定から出発している。両者とも, 変位-ひずみ関係を積分することで, 面内変位について5次, たわみについて4次の変位分布を導いている。Voyiadjis-Baluchの理論¹²⁾は, 動的問題への適用も可能である。

一方, Rehfieldらの理論^{13), 14)}の場合, 一旦板厚方向に線形分布する面内応力を仮定し, 変位-ひずみ関係を積分することで, 面内変位について3次, たわみについて2次の変位分布を導いている。得られた変位分布から逆算し, 結果として3次の面内応力分布を仮定し, 異方性板に対する

高次理論を定式化している。

Reissner^{10), 11)}, Voyiadjis-Baluch¹²⁾およびRehfieldら^{13), 14)}の理論においては、支配方程式の誘導にあたって、いずれも通常の合応力の釣り合い式を用いている。従って、LCW理論と比較すると、物理的な意味が不明確な合応力は導入されていないものの、理論構成に必ずしも一貫性がない。

これに対し、Reissner¹⁵⁾は、面内応力について3次、横せん断応力について4次、板厚方向垂直応力について5次の分布を仮定し、上述の理論とは別個の高次理論を構築している。支配方程式の誘導にあたっては、Reissnerの原理を用いており、一貫性のある高次理論を定式化している。しかしながら、LCW理論と同様に、 z の高次項に対応した合応力の導入が不可欠である。

上述の高次理論をその特別な場合として抱合する平板理論として、平島ら^{16), 17)}は一般化高次理論を定式化した。そして、代表的な平板理論と新たな一般化高次理論とを比較して、各種平板理論の解析精度を詳細に論じている^{18), 19)}。

このように、解析精度を向上させるために、理論の高次化が次々と図られてきた一方で、横荷重の影響については必ずしも慎重に評価されていない。例えば、物体力の影響を横荷重として加味した研究はほとんど見当たらない。また、横荷重に占める表面力と物体力の構成比率の影響評価も試みられていない。筆者は、この点に着目し、板の横荷重に占める物体力および表面力の構成比率を明示する形で古典的な厚板理論の修正を図った²⁰⁾。特に、等分布荷重については、せん断補正係数に関する簡易算定式を提案した。そして、得られた修正理論に基づく解析結果を三次元弾性解析結果と比較することにより、荷重が表面力として与えられるのか、物体力なのか、あるいは両者の混合なのかを明確に区別しなければならないことを明らかにした。実際、横荷重の構成を明確にすれば、古典理論程度の低次の厚板理論であっても、比較的良好に三次元弾性解析結果を近似し得ることが分かった。

本研究では、等分布荷重以外の荷重についても荷重構成を正確に表現し得るように、古典的なReissner理論の再修正を図った。変位の板厚方向分布については、Levinson³⁾およびReddy⁴⁾と同様に、3次の面内変位の分布と一定のたわみ分布を仮定した。さらに、Reissner¹⁾と同様に、力の釣り合い条件を積分することで板厚方向の垂直応力分布を求めた。その際、板上下面における表面力と物体力とを明確に区別し、両者の影響を正確に考慮した垂直応力分布を導いた。結果的に、荷重構成の影響をできる限り正確に評価し得る、横せん断変形を考慮した最も低次の厚板曲げの基礎方程式を誘導することができた。加えて本研究では、誘導した新たな修正理論と代表的な高次理論とを比較するために、LCW理論に基づき、荷重構成の影響を評価し得る厚板曲げの基礎方程式を再定式化した。

簡単な矩形板の曲げ解析を通じ、新たに定式化した低次の修正理論の妥当性を検証した。得られた数値計算結果から、修正理論は三次元弾性解析結果を比較的良好に近似していることが明らかになった。特に、板厚が幅の2分の1程度までは、修正理論がLCW理論と同程度の解析精度を

保持していることが明らかになった。

本論文では、続く第2章で、荷重構成に着目した古典的Reissner理論の修正について詳細に述べる。第3章では、物体力の影響を加味したLCW理論の再定式化について述べる。第4章では、修正Reissner理論とLCW理論に基づくFourier解析について説明する。第5章においては、解析対象とした矩形板の材料定数など、数値計算における諸条件を示した後、具体的な数値計算例を示す。最後に、第6章で本研究によって得られた結論を述べる。

2. 修正Reissner理論

2.1 変位-ひずみ関係

本論文では、Levinson³⁾およびReddy⁴⁾と同様に、次式のような変位分布を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} U &= -\psi_x z - \frac{4}{3t^2} \varphi_x z^3 ; \varphi_x \equiv \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ V &= -\psi_y z - \frac{4}{3t^2} \varphi_y z^3 ; \varphi_y \equiv \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \\ W &= w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 U, V, W は x, y, z 3方向の変位、 ψ_x および ψ_y は x, y 方向の回転角、 w は中央面のたわみ、 t は板厚である。座標系については、板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向に z 軸を設けることとした。式(1)は、変形後の断面のゆがみを許容する、最も単純な変位分布である。

式(1)で与えられる変位分布を変位-ひずみ関係に代入する。面内ひずみの板厚方向分布は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_x}{\partial x} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z^3 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z^3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) z^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

一方、横せん断ひずみの分布については、板上下面におけるせん断応力ゼロの条件を満足する次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \varphi_x \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi_y \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2.2 応力-ひずみ関係

本研究では、三次元等方体のHookeの法則において板厚方向垂直ひずみ ε_z を消去し、板厚方向垂直応力 σ_z の影響を

加味する。すなわち、次式を用いる²⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (5)$$

ここで、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である。また、 $G(=E/\{2(1+\nu)\})$ はせん断弾性係数である。

式 (4) における板厚方向垂直応力 σ_z については、Reissner¹⁾ と同様に力の釣り合い条件から求める。すなわち、 z 方向の釣り合い式に式 (3) および (5) を代入して z に関して積分し、 σ_z の分布を次式のように定めた²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{Gt}{3}(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y})(1 - \frac{3}{t}z + \frac{4}{t^3}z^3) \\ &\quad + \frac{\bar{p}_0}{2}(1 - \frac{2}{t}z) + \bar{p}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) は下面 ($z=t/2$) における境界条件 $\sigma_z(x, y, t/2) = \bar{p}_2(x, y)$ を満足している。また、 $\bar{p}_0(x, y)$ は自重のような z 方向の物体力 $\bar{Z}$ に対応しており、 $\bar{Z} = \bar{p}_0/t$ となる。さらに、上面 ($z=-t/2$) における境界条件 $\sigma_z(x, y, -t/2) = -\bar{p}_1(x, y)$ を適用すれば、次式が得られる²⁰⁾。

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \nabla^2 w + \frac{3}{2Gt}\bar{p}; \quad \bar{p} \equiv \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \quad (7)$$

式 (7) を考慮して式 (6) を書き換えれば、次式が得られる。

$$\sigma_z = -\frac{\bar{p}}{2}(1 - \frac{3}{t}z + \frac{4}{t^3}z^3) + \frac{\bar{p}_0}{2}(1 - \frac{2}{t}z) + \bar{p}_2 \quad (8)$$

放物線分布の横せん断応力および一定の物体力を仮定する限り、式 (8) は力の釣り合いおよび上下面の力学的境界条件を満足する。なお、既往の研究では、物体力 $\bar{p}_0$ を加味して σ_z の分布を定めたものはほとんど見当たらない。

2. 3 厚板の基礎方程式

微小変位問題における x, y 方向の釣り合い式を板厚方向に積分することで、曲げおよび振りモーメントの釣り合い条件として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、面内の物体力は無視した。

式 (2)・(3) および式 (8) を考慮し、式 (4) および式 (5) を板厚方向に積分すれば、曲げ・振りモーメントおよびせん断力の表示として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \{ \bar{p}_0 + 6(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \{ \bar{p}_0 + 6(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\ &= -\frac{D}{2}(1-\nu) \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性である。本論文では、3つの荷重関数 $\bar{p}_i$ を独立に評価しているため、文献20)と比較すると、式 (10) における下線部が異なってくる。

式 (10) および式 (11) を式 (9) に代入すれば、次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \right\} + \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ - \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial x} + 6 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \right\} + \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \\ - \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial y} + 6 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式 (7) を考慮し、式 (12) および式 (13) から回転角を消去すれば、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \frac{1}{D} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ &\quad - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 \{ \frac{12-\nu}{10} \bar{p}_0 + \frac{3}{5} (2-\nu)(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \}] \end{aligned} \quad (14)$$

一方、たわみ w を消去すれば次式が得られる。

$$(\nabla^2 - \frac{10}{t^2}) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (15)$$

式 (15) は、簡単のために $\partial\psi_x/\partial y = \partial\psi_y/\partial x$ と仮定すればあらかじめ満足させることができる。この時、式 (7) および (14) より、断面回転角 ψ_x および ψ_y に関する基礎方程式として次式が得られる。

$$\nabla^4 \psi_x = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2] + \frac{t^2}{60(1-\nu)} \nabla^2 \{(3+\nu)\bar{p}_0 + 3(1+2\nu)(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)\} \quad (16)$$

$$\nabla^4 \psi_y = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial y} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2] + \frac{t^2}{60(1-\nu)} \nabla^2 \{(3+\nu)\bar{p}_0 + 3(1+2\nu)(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)\} \quad (17)$$

式 (14) ・ (16) および式 (17) における下線部が、文献20)において定式化した基礎式と異なっている部分である。この結果、等分布荷重以外であっても、横荷重を構成する表面力と物体力の影響を区別して評価することができる。

式 (14) において物体力 $\bar{p}_0(x, y)$ と下面の表面力 $\bar{p}_2(x, y)$ を無視すれば、古典的Reissner理論¹⁾の基礎方程式と一致する。そこで、本研究で定式化した厚板の曲げ理論を“修正Reissner理論”と呼ぶことにする。特に、得られたたわみの基礎方程式 (14) は、4階の偏微分方程式であり、古典的厚板理論と同程度の簡明さを保持している。比較のために、Mindlin理論²⁾におけるたわみの基礎式²¹⁾を以下に示す。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left\{ 1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)\kappa} \nabla^2 \right\} \bar{p} \quad (18)$$

ここに、 κ はせん断補正係数であり、 $\kappa = 5/\{3(2-\nu)\}$ の時Reissner理論¹⁾の基礎式と一致する²¹⁾。また、 σ_z の影響を無視し、放物線分布の横せん断応力を仮定すれば、 $\kappa = 5/6$ となることが知られている。

3. 物体力を考慮した LCW 理論

3.1 LCW理論⁹⁾ の概要

本論文で定式化した修正Reissner理論の比較対象の一つとして、ここではLo-Christensen-Wuの高次理論 (LCW理論)⁹⁾を取り上げる。この節では、LCW理論の概略について述べる。

LCW 理論においては、変位場として面内変位について3次、たわみについて2次の次式を仮定している。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z + \zeta_x z^2 + \phi_x z^3 \\ V &= v - \psi_y z + \zeta_y z^2 + \phi_y z^3 \\ W &= w + \psi_z z + \zeta_z z^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

LCW 理論の場合、式 (19) における z のべきの係数11個を未知量としている。

式 (19) のように仮定した変位場および三次元等方体の Hooke 則を用い、停留ポテンシャルエネルギーの原理に従って定式化を行えば、合応力に関する11個の釣り合い式を導くことができる。その際、LCW 理論では、 z の高次項に対応した合応力を定義している。曲げに関する合応力についてのみそれらの定義を示せば、次式のようになる。

$$[\bar{M}_x \quad \bar{M}_y \quad \bar{M}_{xy}] = \int_{-t/2}^{t/2} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}] z^3 dz \quad (20)$$

$$[S_x \quad S_y] = \int_{-t/2}^{t/2} [\tau_{xz} \quad \tau_{yz}] z^2 dz \quad (21)$$

$$M_z = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z z dz \quad (22)$$

また、停留ポテンシャルエネルギーの原理に基づいて導かれた11個の釣り合い式のうち、曲げに関するもののみを列挙すると、式 (9) および次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - 3S_x &= 0 \\ \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - 3S_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + \bar{p}_0 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - 2M_z + n + \bar{s}_0 = 0 \quad (25)$$

ここに、 q および n は上下面に作用する垂直応力から定義される量であり、本論文の記号を用いれば次式のように書くことができる。

$$q = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad n = \frac{t^2}{4} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \quad (26)$$

また、 $\bar{p}_0$ および $\bar{s}_0$ は物体力 $\bar{Z}$ に対応する項で、文献5)では考慮されていない。本論文では $\bar{Z} = \bar{p}_0/t$ と考えているから、 $\bar{s}_0$ は次式で与えられる。

$$\bar{s}_0 = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \bar{Z} dz = \frac{t^2}{12} \bar{p}_0 \quad (27)$$

なお、文献5)においては、板上下面におけるせん断応力に関する項が釣り合い式に付加されているが、ここでは省略した。

式 (19) のように仮定した変位場から導かれるひずみ分布を三次元等方体の Hooke 則に代入し、各合応力の定義に従って板厚方向に積分すれば、全ての合応力を変位の未知量で表現することができる。個々の合応力の具体的な表示については、文献5)に示されているので省略する。得られた表示を式 (9) および式 (23) ~ (25) に代入すれば、基礎方程式を変位の未知量で記述できる。特に曲げに関しては、6つの未知量 w , ψ_x , ψ_y , ζ_x , ϕ_x , ϕ_y に関する6個の偏微分方程式が得られる。

因みに、面内の伸縮に関しては、曲げとは独立に、5つの未知量 u , v , ζ_x , ζ_y , ψ_z に関する5個の偏微分方

程式が得られることになる。

3. 2 LCW 理論におけるたわみの基礎方程式

一方、本研究で定式化した修正 Reissner 理論との比較、Fourier 解析の便を考慮すると、中央面のたわみ w のみを未知量とする基礎方程式の誘導が望ましい。文献 5) においては明示されていないが、曲げに関する上記 6 つの未知量のうち 5 つを消去すれば、 w のみを未知量とする基礎方程式として、次の 8 階の偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{(1-\nu)^2 t^4 \nabla^4 - 120(1-\nu) t^2 \nabla^2 \\ & \quad + 8400(1-2\nu)\} \nabla^4 w \\ & = \frac{1}{4D(1-\nu)} \left[\frac{\{33600(1-\nu)(1-2\nu) - 40(180 - 353\nu - 2\nu^2) t^2 \nabla^2\}}{+10(1-\nu)(7+4\nu) t^4 \nabla^4 - \frac{2}{3}(1-\nu)^2 t^6 \nabla^6\}} \bar{p}_0 \right. \\ & \quad + \{33600(1-\nu)(1-2\nu) - 120(60 - 141\nu + 46\nu^2) t^2 \nabla^2 \\ & \quad \left. + 140\nu(1-\nu) t^4 \nabla^4 + (1-\nu)^2 t^6 \nabla^6\} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、下線部は物体力に関する部分であり、通常の LCW 理論では考慮されていない。

式 (28) から明らかなように、LCW 理論におけるたわみの基礎方程式は、極めて複雑な形を有している。修正 Reissner 理論や古典的な Reissner-Mindlin 理論の基礎方程式が 4 階の偏微分方程式であることを想起すれば、式 (28) は実用的な基礎方程式とは言えないことがわかる。

4. Fourier 解析

4. 1 修正 Reissner 理論に基づく解析

本論文では、解析対象として周辺単純支持された矩形平板を用いる。そこで、たわみ w の表示として、次の三角級数表示を仮定する。

$$w = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (29)$$

また、荷重関数 $\bar{p}_i(x, y)$ ($i=0 \sim 2$) は、次式のように Fourier 二重級数展開できるものとする。

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \sum_n \sum_m \bar{P}_{mn}^{(i)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ ; \bar{P}_{mn}^{(i)} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{p}_i(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、対象とした矩形平板は x および y 方向の辺の長さが、それぞれ a および b であり、板の領域を $(0, a) \times (0, b)$ とした。

式 (29) および式 (30) を修正 Reissner 理論の基礎方程式 (14) に代入すれば、単純な係数比較によって、

直ちに未定係数 W_{mn} を定めることができる。すなわち、次式である。

$$\begin{aligned} W_{mn} &= \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_{mn}^2 t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \right) (\bar{P}_{mn}^{(0)} + \bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\nu}{12(1-\nu)} \lambda_{mn}^2 t^2 \bar{P}_{mn}^{(0)} \right\} / D \lambda_{mn}^4 \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (32)$$

4. 2 LCW 理論に基づく解析

式 (29) および (30) を LCW 理論の基礎式 (28) に代入すれば、未定係数 W_{mn} は次式のように定まる。

$$\begin{aligned} W_{mn} &= \left[\{33600(1-\nu)(1-2\nu) + 40(180 - 353\nu - 2\nu^2) \lambda_{mn}^2 t^2 \right. \\ & \quad + 10(1-\nu)(7+4\nu) \lambda_{mn}^4 t^4 + \frac{2}{3}(1-\nu)^2 \lambda_{mn}^6 t^6 \} \bar{P}_{mn}^{(0)} \\ & \quad + \{33600(1-\nu)(1-2\nu) - 120(60 - 141\nu + 46\nu^2) t^2 \nabla^2 \\ & \quad + 140\nu(1-\nu) \lambda_{mn}^4 t^4 \\ & \quad \left. - (1-\nu)^2 \lambda_{mn}^6 t^6\} (\bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}) \right] \\ & \quad / \left[4D(1-\nu) \lambda_{mn}^4 \{8400(1-2\nu) \right. \\ & \quad \left. + 120(1-\nu) \lambda_{mn}^2 t^2 + (1-\nu)^2 \lambda_{mn}^4 t^4 \} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

比較のために、Mindlin 理論の基礎方程式 (18) を用いて定めた W_{mn} を以下に示す。

$$W_{mn} = \frac{1}{D \lambda_{mn}^4} \left\{ 1 + \frac{\lambda_{mn}^2 t^2}{6(1-\nu)\kappa} \right\} (\bar{P}_{mn}^{(0)} + \bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}) \quad (34)$$

式 (33) を式 (31) あるいは式 (34) と比較すれば、比較的単純な問題であっても、LCW 理論に基づいて算定されるたわみの係数は、きわめて複雑な形になることが分かる。一方、修正 Reissner 理論に基づくたわみの Fourier 解析は、Mindlin 理論による解析と同程度であり、Kirchhoff 理論による解析と比較しても、付加項を考慮するだけの単純なものであることが分かる。

5. 数値計算例

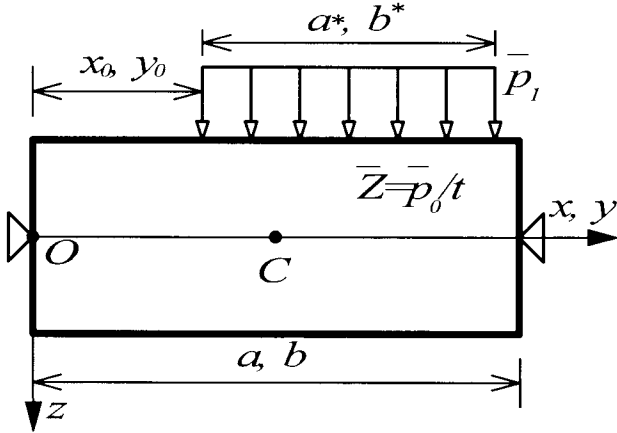
5. 1 解析モデル

本論文で解析対象としたモデルは、周辺単純支持された矩形平板である。解析モデルの形状は、縦横比を $\gamma = b/a = 1$ で一定とし、幅厚比を $\mu = t/a = 0.001 \sim 1.0$ の範囲で種々変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。横荷重については、図 1 に示したように、板上面に作用する部分等分布荷重と物体力によって構成されているものとする。この場合、荷重の

Fourier 係数 $\bar{P}_{mn}^{(i)}$ は、次式で与えられる。

$$\bar{P}_{mn}^{(0)} = \begin{cases} \frac{16\hat{p}_0}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \quad (35)$$

$$\bar{P}_{mn}^{(1)} = \frac{4\hat{p}_1}{\pi^2 mn} \left\{ \cos \frac{m\pi x_0}{a} - \cos \frac{m\pi(x_0+a^*)}{a} \right\} \times \left\{ \cos \frac{n\pi y_0}{b} - \cos \frac{n\pi(y_0+b^*)}{b} \right\} \quad (36)$$



図－１．横荷重の構成

実際に作用させた横荷重としては、１）板全体に等分布荷重が作用する場合（“全面等分布”）、２）対称な部分等分布荷重と物体力が混合して作用する場合（“対称部分等分布”）、３）非対称な部分等分布荷重と物体力が混合して作用する場合（“非対称部分等分布”）の３種類の荷重を想定した。さらに、１）の全面等分布については、上面にのみに等分布荷重が作用する“表面力モデル”、一定の物体力のみが作用する“物体力モデル”、表面力と物体力との両者が作用する“混合モデル”の３者を区別して計算を行った。

上記３種類の横荷重に関するパラメーターの数値設定は以下の通りである。

１）全面等分布

下面の作用荷重はゼロとし、上面における等分布荷重について $x_0 = y_0 = 0$ 、 $a^*/a = b^*/b = 1$ とした。モデル、等分布荷重の大きさは、３つの荷重構成に応じて、以下のよう設定した。

- ・ 表面力モデル： $\hat{\chi}_0 = \hat{\chi}_2 = 0$ 、 $\hat{\chi}_1 = 1$
- ・ 物体力モデル： $\hat{\chi}_0 = 1$ 、 $\hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_2 = 0$
- ・ 混合モデル： $\hat{\chi}_0 = \hat{\chi}_1 = 0.5$ 、 $\hat{\chi}_2 = 0$

なお、 $\hat{\chi}_i$ ($i=0 \sim 2$) は、荷重の大きさを表す無次元化パラメーターであり、次式で定義される。

$$\hat{\chi}_i = \frac{\hat{p}_i a^3}{\mu D} = \frac{12(1-\nu^2)}{E\mu^4} \hat{p}_i ; \quad \mu = \frac{t}{a} \quad (37)$$

２）対称部分等分布

表面力について $\hat{\chi}_1 = 1.25$ 、 $\hat{\chi}_2 = 0$ 、 $x_0/a = y_0/b = 0.3$ 、 $a^*/a = b^*/b = 0.4$ 、物体力について $\hat{\chi}_0 = 0.8$ とした。

３）非対称部分等分布

表面力について $\hat{\chi}_1 = 40$ 、 $\hat{\chi}_2 = 0$ 、 $x_0/a = y_0/b = 0.2$ 、 $a^*/a = b^*/b = 0.1$ 、物体力について $\hat{\chi}_0 = 0.6$ とした。

Fourier 解析に際しては、式（２９）・（３０）における二重級数の項数を $200 \times 200 = 40000$ として計算した。この場合、平板中央点のたわみについて、有効数字６桁以上の精度で解が収束する。

本論文では、解析結果の整理にあたり、三次元弾性論に基づく解析結果を比較の基準とした。用いた三次元解析²⁰⁾においては、板の周面における z 方向変位をゼロとした。また、 x 軸を法線とする周面の y 方向変位、および y 軸を法線とする周面の x 方向変位をそれぞれゼロとした。

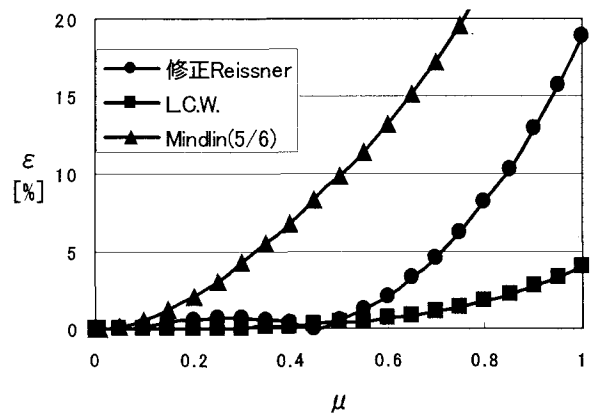
５．２ 全面等分布荷重に対するたわみ解析

この節では、板全体に等分布荷重が作用する場合のたわみ解析の結果について述べる。解析結果を図－２～図－４に示す。図は、いずれも図－１に示した平板の中央点 C におけるたわみに関し、解析精度に及ぼす幅厚比の影響を示したものである。

図中、横軸には平板の幅厚比 μ を、縦軸には三次元弾性論に基づく Fourier 解析解を基準としたときの誤差の絶対値 ε をとって示した。また、いずれの図においても、丸は式（１４）の修正 Reissner 理論に基づく結果、四角は式（２８）の LCW 理論による結果、三角は式（１８）の Mindlin 理論において $\kappa = 5/6$ とした時の結果、ひし形は古典的な Reissner 理論に基づく結果をそれぞれ示している。

なお、古典的 Reissner 理論による結果は、Mindlin 理論の式（１８）において、 $\kappa = 5/\{3(2-\nu)\}$ と置くことで求められる。また、図－５に結果を示した“表面力モデル”では、荷重は上面のみにしか作用していない。すなわち、式（１４）において $\bar{p}_0 = \bar{p}_z = 0$ とした場合に相当する。この場合、式（１４）すなわち修正 Reissner 理論から導かれる基礎式は、古典的 Reissner 理論の基礎式²¹⁾と一致する。

図－２から明らかのように、荷重が全て上面に作用する等分布荷重からなっている場合、Reissner 理論は、幅厚比が $\mu \leq 0.5$ 程度の比較的厚い板の範囲まで LCW 理論と同程度の精度を保持している。一方、Mindlin 理論によって 5% 未満の比較的良好な精度を維持できるのは、 $\mu \leq 0.3$



図－２ 全面等分布荷重が作用する平板のたわみ誤差（表面力モデル）

程度、中等厚板の範囲までであることも分かる。

次に、図-3に示した結果を見ると、かなり幅厚比 μ の大きな領域まで、修正 Reissner 理論および Mindlin 理論が LCW 理論に追随していることが分かる。図の結果をやや細かく検討してみると、幅厚比が $\mu \leq 0.5$ 程度の範囲であれば、Mindlin 理論の精度が本論文の修正 Reissner 理論の精度を上回っている。言い換えれば、横荷重に占める物体力と表面力の寄与を明確に区別して評価すれば、古典的な厚板理論を用いたとしても、高精度の解析が期待できる。

図-4に示した結果は、横荷重が物体力と表面力の両方で構成されている場合のものである。図から明らかなように、修正 Reissner 理論は、幅厚比が $\mu \leq 0.6$ 程度の範囲まで LCW 理論と同程度の高い精度の解を与えている。古典的な Reissner 理論や Mindlin 理論についても、幅厚比 $\mu \leq 0.5$ の範囲であれば、解析誤差は5%未満であり、比較的良好な精度の解が得られている。しかしながら、修正 Reissner 理論および LCW 理論の精度と2つの古典理論の精度とを比較すると、その差は明確である。つまり、横荷重が物体力と表面力の両者によって構成されている問題に対しては、本研究の修正 Reissner 理論が優れていると考えられる。

以上の結果を総合すると、荷重が表面力ならば Reissner 理論、物体力ならば Mindlin 理論が優れており、修正理論は、どの荷重構成に対しても優れていることが分かった。

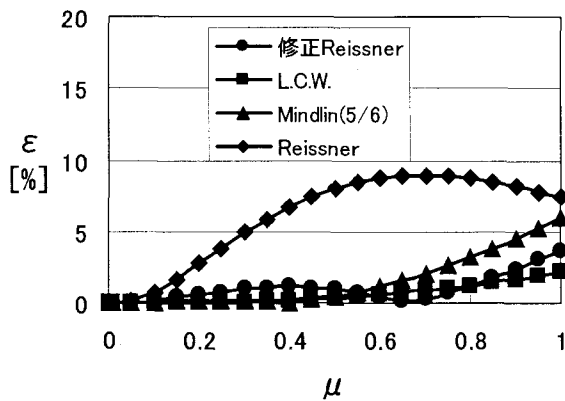


図-3 全面等分布荷重が作用する平板のたわみ誤差 (物体力モデル)

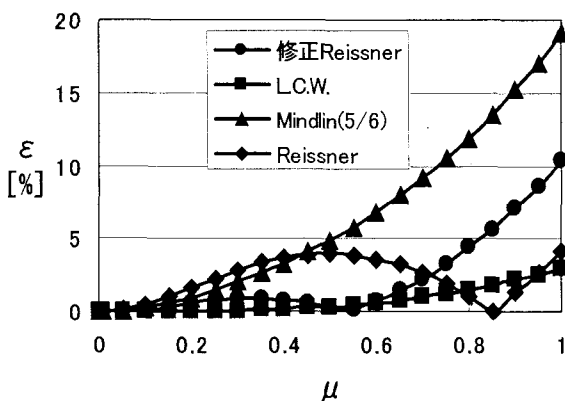


図-4 全面等分布荷重が作用する平板のたわみ誤差 (混合モデル)

5.3 対称な部分等分布荷重に対するたわみ解析

上面における対称な部分等分布荷重と一定の物体力との両者が作用する平板の解析結果を図-5に示す。図を見ると、前節で述べた全面等分布の混合モデルと同様な傾向が認められる。すなわち、幅厚比が $\mu \leq 0.5$ の範囲であれば、本研究の修正 Reissner 理論によって、LCW 理論と同程度の極めて精度の高い解が得られている。幅厚比が $\mu \leq 0.4$ の範囲においては、2つの古典理論の間に誤差の類似が見られる。

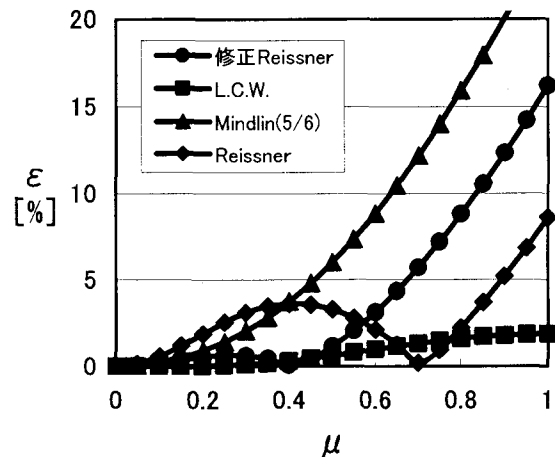


図-5 対称部分等分布荷重が作用する平板の解析誤差

5.4 非対称な部分等分布荷重に対するたわみ解析

図-6に示した結果は、上面に作用する部分等分布荷重が非対称な場合のものである。やはり、前節と同様に、一定の物体力を仮定している。表面力が非対称となった場合、低次理論では、LCW 理論ほどの高精度の解が得られていない。しかしながら、修正 Reissner 理論の解析誤差は、概ね数パーセントの範囲に留まっており、古典的な厚板理論より良好な精度を保っている。この計算例では、中等厚板の範囲で、修正 Reissner 理論と Mindlin 理論との間に誤差の類似性が認められる。

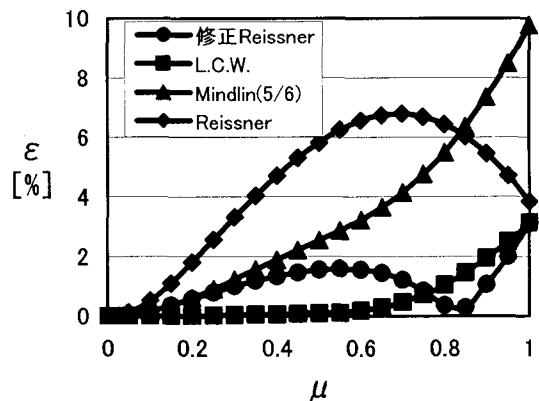


図-6 非対称部分等分布荷重が作用する平板の解析誤差

6. 結論

本研究の解析結果から、以下の結論が得られた。

- 1) 横荷重の構成に着目した、厚板の曲げ解析に対する平板理論の定式化を行った。構築した平板理論は、表面力と物体力とを区別して評価することができる。また、物体力を無視すれば、誘導した修正理論は古典的な Reissner 理論と一致する。
- 2) 横荷重を形成する物体力および表面力の構成は、平板の曲げ解析の精度に著しい影響を及ぼす。本論文の修正 Reissner 理論の場合、物体力と表面力とが混在する場合など、古典理論では荷重構成を的確に表現しにくい問題に対し、比較的良好な精度で三次元弾性解析結果を近似することができる。
- 3) 荷重に対称性がある場合には、幅厚比が 0.5 程度のかかなり厚い平板であっても、修正 Reissner 理論は代表的な高次理論と同程度の解析精度が期待できる。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 2) Mindlin, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 3) Levinson, M.: An Accurate, Simple Theory of the Static and Dynamics of Elastic plates, Mechanics Research Communications, Vol.7, Issue 6, pp.343-350, 1980.
- 4) Reddy, J. N.: A Simple High-Order Theory for Laminated Composite Plates, J. of Appl. Mech., Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 5) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – I. Homogeneous Plates, J. Appl. Mech., Vol.44, pp.663-668, 1977.
- 6) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – II. Laminated Plates, J. Appl. Mech., Vol.44, pp.669-676, 1977.
- 7) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: Stress Solution Determination for High Order Plate Theory, Int. J. Solid and Struct., Vol.14, pp.655-662, 1978.
- 8) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: 3 次せん断変形理論に基づく spline 要素法を用いた直交異方性厚板の振動解析, 応用力学論文集, Vol.7, No.1, pp.213-224, 2004.
- 9) S. A. アムバルツミヤン (神谷紀生 訳): 異方弾性板の理論, 森北出版, 1975.
- 10) Reissner, E.: On Transverse Bending of Plates including the Effects of Transverse Shear Deformation, Int. J. Solid and Struct., Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 11) Reissner, E.: A Note on Bending of Plates including the Effects of Transverse Shearing and Normal Strains, J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP), Vol.32, pp.764-767, 1981.
- 12) Voyiadjis, G. Z., and Baluch, M. N.: Refined Theory for Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Sound Vib., Vol.76, pp.57-64, 1981.
- 13) Rehfield, L. W., and Murthy, P. L. N.: Tward a New Engineering Theory of Bending: Fundamentals, AIAA Journal, Vol.20, No.5, pp.693-699, 1982.
- 14) Rehfield, L. W., and Valisetty, R. R.: A Simple, Refined Theory for Bending and Stretching of Homogeneous Plates, AIAA Journal, Vol.22, No.1, pp.90-95, 1984.
- 15) Reissner, E.: A Twelfth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates, ZAMM, Vol.63, pp.285-289, 1983.
- 16) 平島健一, 村松正重: 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, 土木学会論文報告集, Vol.304, pp.33-46, 1980.
- 17) 平島健一, 根岸嘉和: 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 第 3 6 回土木学会年次学術講演会概要集・第 1 部, pp.29-30, 1981.
- 18) 平島健一, 根岸嘉和: 板厚方向の成分を考慮した代表的な 2 次元化平板理論の精度に関する考察, 土木学会論文報告集, Vol.330, pp.1-14, 1983.
- 19) 平島健一, 根岸嘉和: 数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究, 土木学会論文報告集, Vol.333, pp.21-34, 1983.
- 20) 末武義崇, 友田富雄: 厚板解析における横荷重の影響に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.7, No.1, pp.47-56, 2004.
- 21) 土木学会: 構造力学公式集, 第 2 版, 1999.

(2005 年 4 月 15 日 受付)