

非構造分野における有限要素法の発展と今後の展望

- 随伴方程式法および有限要素法による逆解析への展開 -

Development and future view of finite element method in fluids
- On backward analysis using adjoint equation and finite element method -

川原睦人*

Mutsuto KAWAHARA

*正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents the development of the finite element method in the field of fluids and an overview of the adjoint equation method applied to the backward analysis in the continuum mechanics. Generally, the behavior of the continuum can be determined solving the state equation specifying the initial and boundary conditions. Contrary to this, there are some cases that a behavior of the continuum at some points or some parts can be measured and known, however, the initial and boundary conditions are not known. Sometimes, the coefficient in the state equation or the boundary configuration is not known. To solve those problems, it is referred to as the backward analysis, which consists of the main part of the synthesis. Roughly, the backward analysis can be classified into two categories, one is the sensitivity method and the other is the adjoint method. In this paper, overall concept of the adjoint method is developed and applied to Data Assimilation, Boundary Control, Parameter Identification and Shape Optimization. The optimal shape determination of the body located in the transient viscous flow is discussed for the application of the present formulation.

Key Words : *finite element method flow problem, adjoint equation method, backward analysis, data assimilation, boundary control, parameter identification, shape optimization*

1. 緒言

本論文では、非構造分野における有限要素法の発展と今後の展望について述べるとともに、最近の話題として随伴方程式を用いた逆解析手法について解説する。

1.1 非構造分野における有限要素法の発展

有限要素法の非構造分野への適用は、1966年に発表された Zienkiewicz ら¹⁾の論文に始まると言って良いであろう。その後、1972年に第1回の「流体解析における有限要素法国際会議, International Conference on Finite Element Method in Fluids」が開催され、今日までこの国際会議がこの分野の研究の中心的役割を果たしてきた。この会議の歴史を展望すると表-1のようになる。有限要素法の非構造分野の研究の歴史は、この会議の開催以前(～1972年)、第1回から第7回まで(1972年～1989年)、第8回以降(1990年～現在)の三つに分けて議論することができる。以下にその概要を示す。

(1) 1972年以前

有限要素法を非構造分野に適用した最初の研究は、Zienkiewicz ら¹⁾による浸透流に関するものである。また、最初に流体(ポテンシャル流れ)解析に適用した研究は Martin²⁾によって発表されている。Oden³⁾は

1970年のASCEの論文集中、Navier-Stokes方程式の有限要素近似について発表した。当時は、構造解析における、いわゆる材料的非線形問題、幾何学的非線形問題への応用が研究の最前線であり、Odenはこれをさらに拡張して、連続体力学への適用が可能であることを指摘した。当時はまだ、有限要素法の定式化は構造解析特有の方法に立脚していた。すなわち、ポテンシャルエネルギーの定理に基づいた、Ritz法によるものであった。これに対して、OdenはNavier-Stokes方程式において Galerkin法による定式化が行えることを提案した³⁾。しかし、この論文では、数値解析結果は示されておらず、さらには現在ではNavier-Stokes方程式の直接解法において常識となっている混合補間(Mixed Interpolation)ではなく、同次補間(Normal Interpolation)が用いられていた。

(2) 1972年から1989年まで

1972年に、それ以降の流体解析における有限要素法研究の中心的役割を果たすことになる「流体解析における有限要素法国際会議」がZienkiewicz教授を中心として、当時から有限要素法研究のメッカであったWales大学Swansea校で開催された。この会議の名称は、現在では「Finite Element Method in Fluids」と呼ばれているが、第1回から第6回前後まではin Fluidsではなく、in Flow Problemが用いられていた。これは第

1 回の開催企画時に、果たして in Fluids という会議名で、発表論文が集まるであろうかという危惧があり、in Flow Problem と対象を広くしたためである。すなわち、第 1 回から第 6 回前後の会議までは、単独で学問として成立する分野なのかどうかと、手探りの状態で進められて来たのである。案の定、第 1 回の会議では、発表論文総数約 80 編のうち、70 % はポテンシャル流れに基づいた浸透流解析に関するもので、粘性流体解析に関するものは 20 編程度であった。その中でも、実際に計算結果を示したものは少なく、代表的なものとしては Taylor ら⁴⁾ や Kawahara ら⁵⁾ による論文が挙げられる。この会議以降、発表論文の中から選抜された論文による論文集 (Finite Elements in Fluids, Wiley) が発行されることになるが、第 1 回の論文集では定式化に関する理論の展開が中心で、数値解析例がほとんど示されていない論文が多い。第 2 回の会議は、1976 年イタリアの St. Margherita にて開催され、Hughes⁶⁾ による Penalty function method が注目を集めた。後にこれは、混合補間法と同じ原理によるものであることが判明することになる。

さらに、この会議では、Zienkiewicz 教授の特別講演があり、ここで上流法 (Upwind method) による解析例が示され、後に Heinrich ら⁷⁾ の論文として発表された。これは、移流項の卓越に対する安定性の向上に関する研究であり、これ以後、上流化法は、Hughes⁸⁾、Brooks ら⁹⁾、Kawahara¹⁰⁾、Gresho ら¹¹⁾ など多くの研究者の注目を集めることになる。

1980 年代の第 3 回から第 7 回の会議になると解析手法も目覚ましい進歩を遂げて、多くの解析例が発表されるようになってきている。特に熱流体まで含めた解析法の安定性を述べた Lee ら¹²⁾ や、これらの発展である Gresho ら¹³⁾ の研究論文が注目されている。さらには Glowinsky ら¹⁴⁾ による Domain decomposition や、Hayashi ら¹⁵⁾ による Operator splitting method、Ramaswamy ら¹⁶⁾ による ALE 法なども発表されている。また、Gupta ら¹⁷⁾ によるプラズマ解析、Astley ら¹⁸⁾ による音響問題への応用もこの時期に発表されている。

(3) 1990 年以後から現在

流体解析における有限要素法国際会議の論文集であった Finite Elements in Fluids の発行は第 6 回の会議をもって終了した。これは、会議の内容の多様化が進んだことと、出版費用がかさむことによるものであり、これ以降、国際雑誌の特集号として、論文集が刊行されることになった。この時期においては、Glowinsky ら¹⁷⁾ による Fictitious domain method、Tezduyar ら¹⁸⁾ による EDICT method を始めとする移動境界を含む 3 次元 Navier-Stokes 方程式の解析法、Hughes ら¹⁹⁾ による Multiscale method の開発などが提案された。また、Okumura ら²⁰⁾ や Matsumoto ら²¹⁾ の Bubble

function interpolation も注目を集めた。これらは、要素の開発に関する研究であり、気泡関数の導入により安定性と精度を高めようとするものである。表-2 には、2005 年 4 月に開催された、第 13 回流体解析における有限要素法国際会議の特別講演の題目をあげている。これより、最近の傾向の一端をつかむことができる。このように、有限要素法による流れ解析が多様化し、かつ、多くの応用分野で実用的に用いられるようになった背景にはコンピュータのハードウェアの進歩がある。とりわけ、流体解析は構造解析に比べて多大な計算自由度を必要とするため、並列計算機の利用は日常的である。表-3 は、マンハイム大学などによって公表されているスーパーコンピュータの TOP500²²⁾ の上位を示している。昨年までトップの座を 2 年以上守り続けた日本の地球シミュレータは 4 位に後退し、その 4 倍以上の性能をもつコンピュータが出現した。これを見てもコンピュータの発展はいまだ衰えずほぼ線形的に進歩していることが理解できる。

1.2 今後の展望および「総合 (Synthesis)」について

前節にも述べたように、解析技術はここ数十年において飛躍的な進歩を遂げ、流れ解析は多様化する傾向にある。今後は、解析技術進歩の中で生まれた手法をもとに、解析結果の信頼性の向上へと研究は進展していくであろう。解析あるいは計算結果の信頼性を向上させるにあたり、解析された情報に基づき、総合的に構造を構成する必要がある。例えば、解析を行うことで得られた情報を用い、従来の状態や現象をより安定したものへ推移させることを目的とする「制御 (Control)」、またその情報をもとに、新たな情報を予測する「推定 (Estimation) および同化 (Assimilation)」、さらには解析に用いた計算領域内における設計変数、あるいは物理定数を定める「同定 (Identification)」が挙げられる。これらは「総合 (Synthesis)」と称せられ、現在世の中で広く行われている順解析の分野において、現象の再現計算時に特に有用であると考えられる。現象の再現性を考えた場合、計算時に設定する物理定数や、各種設定条件によって計算結果は大きく左右される。現状では、そのような計算条件については、試行を繰り返すことで現象の再現が行われている。これに対し、随伴方程式法等の方法論を用い、計算における適切な諸条件を決定する方法がある。これは、解析の諸条件を決定する試行を、人間の手によって行うのではなく、計算機内で行わせることで、自動的に解析条件を算定するというものである。この際に行う解析は、一般的に「逆解析 (Backward analysis)」と呼ばれ、逆問題の分野で発展している。計算機の発達により、様々な計算が行えるようになった現代においては、従来研究されてきた有限要素法を逆解析の問題へ適用し、以前では計算記憶容量及び計算時間等の問題から、うことが困難であった計算を実行することで、ここ数十

表-1 流体解析における有限要素法国際会議
「 International Conference on Finite Element Method in Fluids 」

回	開催地	開催年	主催者	中心的な話題
1	Swansea, U.K.	1972	O.C.Zienkiewicz et. al.	Mixed Interpolation
2	St.Margarita, Italy	1976	M.M.Cecchi	Penalty Function Method
3	Banff, Canada	1980	H.Norrie	Upwind Formulation
4	Tokyo, Japan	1982	T.Kawai	Operator Splitting Method, Streamline Upwind Method
5	Austin, TX, U.S.A	1984	J.T.Oden	Bubble Function Method
6	Antibe, France	1986	R.Glowinsky	ALE Formulation
7	Huntsville, AL, U.S.A	1989	T.J.Chung	Space-Time Formulation, Synthesis, General Purpose Program
8	Barcelona, Spain	1993	E.Onate	EDICT Method
9	Venice, Italy	1995	M.M.Cecchi	Fictitious Domain Method
10	Tucson, AR, U.S.A	1998	J.Heinrich	Multiscale Method
11	Austin, TX, U.S.A	2000	G.Carey	Miscellaneous
12	Nagoya, Japan	2003	M.Kawahara	"
13	Swansea, U.K.	2005	K.Morgan	"
14	Santa Fe, TX, U.S.A	2007	D.Gartling	

表-2 第 13 回流体解析における有限要素法国際会議の特別講演題目

Speaker	Title
T.J.R.Hughes	Multiscale Methods in Turbulent Flow
J.SS Hesthaven	Some Time-Integration Techniques for DGFEM of Fluid Flows
A.Jameson	Efficient Aerodynamic Shape Optimization
M.Giles	Aeroacoustic analysis using a hybrid finite element method
A.Huerta	Can we trust/check our finite element computations? bounds of outputs and certificates

表-3 TOP 500 の上位機種 (2005 年 6 月現在)

Rank	Site Country/year	Computer/Processors Manufacturer	Rmax Rpeak
1	DOE/NNSA/LLNL United States/2005	BlueGene/L eServer Blue Gene Solution/65536 IBM	136800 183500
2	IBM Tomas J.Watson Research Center United States/2005	BGW eServer Blue Gene Solution/40960 IBM	91290 114688
3	NASA/Ames Research Center/NAS United States/2004	Columbia SGI Altix 1.5GHz, Voltaire Infiniband/10160 SGI	51870 60960
4	The Earth Simulator Center Japan/2002	Earth-Simulator/5120 NEC	35860 40960

年において開発された有限要素法に立脚した方法を、有益なものにでき、さらには有限要素法の分野の新規開拓にもつながると考えられる。ここに記したように、各種計算に対して逆解析を行うことで、計算条件である未知定数を定量的に決定できるとともに、物理現象を良好に再現できることから、有限要素法のみならず、各種数値計算法により解析される様々な問題に対して逆解析の導入が望まれる。

1.3 随伴方程式による逆解析について

一般に連続体力学においては、状態変数に関する微分方程式とその初期条件、境界条件を与えて、これらの解を求めることが行われる。これは「順解析 (Forward analysis)」と呼ばれている。自然現象をなるべく忠実に表現する場合、高度な非線形方程式となることが多い。

多くの工学の問題においては、数ヶ所から数十ヶ所におよぶ観測点を設定し、この点における状態変数を観測することが行われる。しかし、状態方程式の係数や、初期条件、境界条件、さらには境界の形状などが未知の場合であることが多い。このとき、最も状態変数が観測値に近くなるように、前述の諸量を定める問題 (制御・推定・同化・同定問題) が設定される。これらは、逆解析と呼ばれ、観測値と計算された状態変数がどの程度近いかは、評価関数を定義することにより計算が可能となる。

先にも述べたように、計算力学の研究動向は、「解析 (Analysis)」から「総合 (Synthesis)」へと向かう方向にあると言える。総合には広く、多くの分野が存在するが、その中でも逆解析は、重要な分野の一つである。逆解析の研究の歴史は古く、多くの方法が提案されている。大別すると、感度係数法 (Sensitivity coefficient method) と随伴方程式法 (Adjoint equation method) に分けることができる。感度係数法は、評価関数を直接、微分して勾配を求める方法である。もし成功すると収束が速い場合が多い。この方法には、今後、自動微分 (Automatic differentiation) の利用が有効といえる。

随伴方程式法は、状態方程式に対して、随伴方程式を誘導して、解析を進める方法である。従来、逆解析には、データ同化 (Data assimilation)、境界制御 (Boundary control)、パラメータ同定 (Parameter identification)、最適形状決定 (Shape optimization) などがあり、これらは別個に発展の道をたどってきた。このため、ともすると相互にまったく関係のない問題であるかのように考えられていた。しかし、随伴方程式法によれば、これらを統一して考察することが可能となり、ほとんど同一の解析手法で扱うことができる。

本論文においては、次節以降、随伴方程式を用いた様々な設計変数を決定する逆解析の定式化を述べることにする。ここでは説明の簡単のため、線形方程式により説明したが、非線形問題への拡張は、直接的に行うことができる。最後に非圧縮粘性流体中における物体の最

適形状決定^{23)~27)}について述べる。

2. 問題の設定

以下、添字つき表記法 (Indecial notation) および、同一項にくり返して表れる添字に対する総和規約 (Summation convention) を用いて表すこととする。連続体の状態方程式は以下のように表される。

$$\dot{x}_i = ax_{i,jj} \quad \text{in } V \quad (1)$$

ここに、 x_i は状態変数を表し、 a は係数とする。例えば、 x_i は、温度、流速、圧力、水位、汚濁濃度などを表しており、説明の簡単のため線形方程式であるとする。また係数 a は定数であるとする。 V は考えている領域を、 S はその境界を表す。式 (1) に対して、初期条件を

$$x_i(0) = \hat{x}_i^0 \quad (2)$$

とする。ここに $\hat{\cdot}$ は、一般に状態変数があらかじめ与えられていることを示している。境界条件としては、次の2種類を考える。すなわち、状態変数そのものが、

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

と与えられる境界 S_1 と、状態変数のフラックスが

$$t_i = ax_{i,j}n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

と与えられる境界 S_2 とがあるものとする。ここに t_i はフラックスを表し、 n_j は境界にたてた法線ベクトルの成分である。一般に、連続体は、式 (1)-(4) で表される状態方程式によって表記されることが多い。もちろん、実際問題では、非線形方程式となるが、この論文における議論については、線形方程式で十分本質を説明できるので、線形方程式により、理論を展開する。通常、境界においては、

$$\begin{aligned} \overline{S_1 \cup S_2} &= S \\ S_1 \cap S_2 &= \Phi \end{aligned} \quad (5)$$

となる場合が多い。ここに S は全境界で、 Φ は空集合である。すなわち、境界 S_1 と境界 S_2 を合わせたものが全境界であり、また、境界 S_1 と S_2 は、重なり合う境界がないとしておく。さて、連続体の状態変数 x_i の一部が観測などにより、あらかじめ判明していることが多い。ここではこれを観測量と呼び、 η_i と定義する。さらに、上記の初期状態や境界状態、あるいは状態係数の一部あるいは全部が不明の場合がある。そこで、次の評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt \quad (6)$$

を導入する。ここに W_{ij} は重みで、あらかじめ与えられているものとする。問題は、式 (6) で与えられる評価関

数 J を最小になるように、初期状態、境界状態、あるいは状態係数を定めるといものである。ここに定めるべき量を制御量 A_i と呼ぶことにすると、問題は

$$\text{Find } A_i \text{ so as to minimize } J \text{ under} \quad (7)$$

$$\text{the constraints of eqs.(1), (2), (3), (4)}$$

とすることができる。ここに A_i は必ずしも、制御量と呼ぶにはふさわしくないかも知れないが、従来からの慣例で、そのように呼ばれている。また、この A_i をどのようにとるかによって、第4節以降に述べるように、それぞれ個々の問題が設定されることになる。

3. 解法

式(7)で表される問題は、典型的な変分問題である。すなわち、式(1)を拘束条件とする、式(6)の最小値を決定する最小値決定問題である。最小値決定のためには、まず制御変数 A_i に対する評価関数 J の勾配を求める必要がある。このためにはラグランジュ係数法(Lagrange parameter method)が用いられるのが一般的である。拡張された評価関数 J^* を次のように表すことにする。

$$J^* = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_V \lambda_i (\dot{x}_i - a x_{i,jj}) dV dt \quad (8)$$

ここに λ_i はLagrange関数である。さて、式(8)の変分を計算すると、

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i) \delta x_j dV dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_V \lambda_i (\delta \dot{x}_i - a \delta x_{i,jj}) dV dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_V \delta \lambda_i (\dot{x}_i - a x_{i,jj}) dV dt \quad (9)$$

となる。また、式(9)の最後の項は式(1)より恒等的に0となる。式(9)の第2項に注目する。第1項を部分積分を用いて変形すると、

$$\int_0^{t_f} (\lambda_i \delta \dot{x}_i) dt = \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} (\lambda_i \delta x_i) dt - \int_0^{t_f} (\dot{\lambda}_i \delta x_i) dt$$

$$= \left[\lambda_i \delta x_i \right]_{t=0}^{t=t_f} - \int_0^{t_f} (\dot{\lambda}_i \delta x_i) dt \quad (10)$$

であり、第2項は同様に、2回部分積分を行うと、

$$\int_V (\lambda_i a \delta x_{i,jj}) dV = \int_S (\lambda_i a \delta x_{i,j}) n_j dS$$

$$- \int_V (\lambda_{i,j} a \delta x_{i,j}) dV$$

$$= \int_S (\lambda_i a \delta x_{i,j}) n_j dS$$

$$- \int_S (\lambda_{i,j} a \delta x_i) n_j dS$$

$$+ \int_V (\lambda_{i,jj} a \delta x_i) dV \quad (11)$$

となる。式(10)、(11)を式(9)に代入して整理すると、次のようにすることができる。

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i) \delta x_j dV dt$$

$$+ \int_V \left[(\lambda_i \delta x_i) \right]_{t=0}^{t=t_f} dV - \int_0^{t_f} \int_V (\dot{\lambda}_i \delta x_i) dV dt$$

$$- \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_i a \delta x_{i,j}) n_j dS dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_{i,j} a \delta x_i) n_j dS dt$$

$$- \int_0^{t_f} \int_V (\lambda_{i,jj} a \delta x_i) dV dt \quad (12)$$

式(12)をさらに変形すると、

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_V \{ W_{ij}(x_i - \eta_i) - \dot{\lambda}_j - a \lambda_{j,kk} \} \delta x_j dV dt$$

$$+ \int_V \left[\lambda_i \delta x_i \right]_{t=0}^{t=t_f} dV - \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_i \delta t_i) dS dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_V (s_i \delta x_i) dS dt \quad (13)$$

となる。ここに、

$$\delta t_i = \delta(a x_{i,j} n_j) \quad (14)$$

$$s_i = a \lambda_{i,j} n_j \quad (15)$$

である。

評価関数 J が最小となるためには、その変分 δJ^* 、すなわち、式(13)が0とならねばならない。

$$\delta J^* = 0 \quad (16)$$

式(16)は、個別に各項が0となれば、満足させることができる。このことについては、問題ごとに考えていくことになるので、第4節以降に述べることにする。

式(16)より、各制御変数 A_i に対する勾配を求めることができる。この勾配を

$$\text{grad}(J^*)_i \quad (17)$$

と表すことにする。この勾配を用いることにより、現在までに多く提案されている最小化手法を適用することにより、最小となる制御変数 A_i と状態変数 x_i を求めることができる。最小化手法としては最急降下法、共役勾配法、準ニュートン法、ニュートン法などが良く用いられている。この計算は、非常に不安定である場合が多く、式(17)の勾配をそのまま用いると、計算が発散してしまう場合が多い。そこで、

$$\text{grad}_c(J^*)_i = \text{grad}(J^*)_i + c_{ij}(A_j - \hat{A}_j) \quad (18)$$

などのようにとり、計算を意識的に遅らせることが行なわれている。ここに c_{ij} は緩速係数で、 $\hat{A}_j$ はあらかじめ推察されたオーダーを表す量である。

4. データ同化 (Data assimilation)

ある時間 t における観測は容易に行うことができるが、初期状態が不明であるという問題がある。これは、気象学の分野でよく表れる問題である。次のように定式化することができる。基礎方程式は、次のようになる。

$$\dot{x}_i = ax_{i,jj} \quad (1)$$

$$x_i(0) = C_i \quad (19)$$

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$t_i = ax_{i,j}n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{S_1 \cup S_2} &= S \\ S_1 \cap S_2 &= \Phi \end{aligned} \quad (5)$$

評価関数 J は,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt \quad (6)$$

となる. この問題は, 次のようである.

Find C_i so as to minimize J under the constraints of eqs.(1), (19), (3), (4) (20)

この問題は、式 (16) から、次のようにして勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ を求めることができる. まず式 (13) の第 1 項が 0 であるためには、

$$\dot{\lambda}_j = W_{ij}(x_i - \eta_i) - a\lambda_{j,kk} \quad (21)$$

でなければならない. これを随伴方程式と呼んでいる. 式 (13) の第 2 項は,

$$\lambda_i(t_f)\delta x_i(t_f) - \lambda_i(0)\delta x_i(0) \quad (22)$$

であるので、この第1項が0であることにより、

$$\lambda_i(t_f) = 0 \quad (23)$$

なる関係が得られる。これは随伴方程式 (21) の終端条件を与えている。さらに、式 (13) の第 3, 4 項を考えると、

$$\delta t_i = 0 \quad \text{on} \quad S_2 \quad (24)$$

であるから,

$$\lambda_i = 0 \quad \text{on} \quad S_1 \quad (25)$$

また、

$$\delta x_i = 0 \quad \text{on} \quad S_1 \quad (26)$$

であるから、

$$s_i = a\lambda_{i,j}n_j = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (27)$$

である. 以上を整理すると 状態方程式 (1), (19), (3), (4), および随伴方程式 (21), (23), (25), (27) を解くことにより, 式 (13) は,

$$\delta J^* = - \int_V (\lambda_i(0) \cdot \delta C_i) dV \quad (28)$$

となる. これから, J^* の C_i に対する勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ は,

$$\text{grad}(J^*)_i = -\lambda_i(0) \quad (29)$$

と求めることができる.

ここで、注意すべきことは、式 (1) に対しては、式 (19) のごとく初期条件が与えられるのに対して、随伴方程式 (21) は、式 (23) のごとく終端条件が与えられることになる。このため、式 (21) は式 (23) から出発して、時間に逆向きに解かなければならない。また、式 (21) は線形方程式であるが、状態変数 x_i を含むので、本質的に非線形である。

5. 境界制御 (Boundary control)

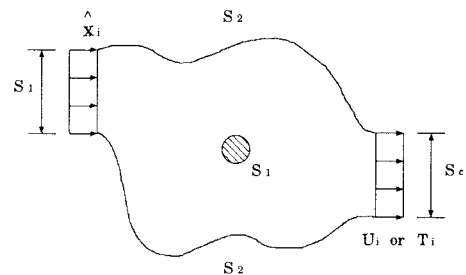


図-1 境界制御モデル

例えば、図-1 に示すように、ある境界の一部 S_c における状態変数 U_i を制御することにより、着目点においては、あらかじめ与えられた量 η_i に最も近くなるようにするには、どのようにすれば良いかが問題となる。このような問題は、境界制御問題と呼ばれている。これは、また、境界の状態変数 U_i そのものを制御する場合と状態変数のフラックス T_i を制御する場合とがあり、それぞれ I 型、II 型と呼ばれている。I 型の基礎方程式は次のように表される。

$$\dot{x}_i = ax_{i,jj} \quad (1)$$

$$x_i(0) = \hat{x}_i^0 \quad (2)$$

$$x_i = U_i \quad \text{on} \quad S_c \quad (30)$$

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$t_i = ax_{i,j}n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{(S_c \cup S_1)} \cup S_2 &= S \\ (S_c \cup S_1) \cap S_2 &= \Phi \\ S_c \cap S_1 &= \Phi \end{aligned} \quad (31)$$

また、評価関数は、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt \quad (6)$$

となる。この問題は、次のように表される。

$$\begin{aligned} &\text{Find } U_i \text{ so as to minimize } J \text{ under} \\ &\text{the constraints of eqs.(1), (2), (30), (3), (4)} \end{aligned} \quad (32)$$

この問題も、式 (16) から次のようにして、勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ を求めることができる。式 (13) の第 1 項から随伴方程式

$$\dot{\lambda}_j = W_{ij}(x_i - \eta_i) - a\lambda_{j,kk} \quad (21)$$

が得られ、第 2 項から

$$\lambda_i(t_f) = 0 \quad (23)$$

が得られる。この場合、式 (22) 第 2 項は、式 (2) より

$$\delta x_i(0) = 0 \quad (33)$$

であるから、恒等的に 0 となる。式 (23) は随伴方程式 (21) の終端条件である。式 (3), (4) により、下式が成り立つ。

$$\lambda_i = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (\delta t_i = 0 \quad \text{on } S_2) \quad (25)$$

$$s_i = a\lambda_{i,j}n_j = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (\delta x_i = 0 \quad \text{on } S_1) \quad (27)$$

以上を整理すると、状態方程式 (1), (2), (30), (3), (4), および随伴方程式 (21), (23), (25), (27) を解くことにより、式 (13) は、

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_{S_c} (s_i \cdot \delta U_i) dS dt \quad (34)$$

となる。これから J^* の U_i に対する勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ は、

$$\text{grad}(J^*)_i = s_i \quad \text{on } S_c \quad (35)$$

と求められる。

II 型の基礎方程式は次のように表される。

$$\dot{x}_i = ax_{i,jj} \quad (1)$$

$$x_i(0) = \hat{x}_i^0 \quad (2)$$

$$t_i = ax_{i,j}n_j = T_i \quad \text{on } S_c \quad (36)$$

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$t_i = ax_{i,j}n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{(S_c \cup S_2) \cup S_1} &= S \\ \overline{(S_c \cup S_2) \cap S_1} &= \Phi \\ S_c \cap S_2 &= \Phi \end{aligned} \quad (37)$$

評価関数は、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt \quad (6)$$

である。この問題は、次のように表される。

$$\begin{aligned} &\text{Find } T_i \text{ so as to minimize } J \text{ under} \\ &\text{the constraints of eqs.(1), (2), (36), (3), (4)} \end{aligned} \quad (38)$$

この場合には、型の問題とまったく同様にして、随伴方程式が、

$$\dot{\lambda}_j = W_{ij}(x_i - \eta_i) - a\lambda_{j,kk} \quad (21)$$

終端条件が

$$\lambda_i(t_f) = 0 \quad (23)$$

と求められる。境界条件についても同様で以下のように書き表すことができる。

$$\lambda_i = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (25)$$

$$s_i = a\lambda_{i,j}n_j = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (27)$$

以上を整理すると、状態方程式 (1), (2), (36), (3), (4), および随伴方程式 (21), (23), (25), (27) を解くことにより、式 (13) は、

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_{S_c} (\lambda_i \cdot \delta T_i) dV dt \quad (39)$$

となる。これから J^* の T_i に対する勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ は

$$\text{grad}(J^*)_i = \lambda_i \quad \text{on } S_c \quad (40)$$

と求められる。

6. パラメータ同定 (Parameter identification)

ある連続体におけるシステムが与えられたとき、数ヶ所ないし数十ヶ所の観測点において、その状態変数が観測され、既知であることが多い。一方、係数 a は未知である場合がある。この未知パラメータを求める問題がパラメータ同定と呼ばれている。

この問題では、基礎方程式は次のように表すことができる。

$$\dot{x}_i = ax_{i,jj} \quad (1)$$

$$x_i(0) = \hat{x}_i^0 \quad (2)$$

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$t_i = ax_{i,j}n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{S_1 \cup S_2} &= S \\ S_1 \cap S_2 &= \Phi \end{aligned} \quad (5)$$

また、評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) dV dt \quad (6)$$

となる。この場合、第2節の方程式とまったく変わらないが、係数(パラメータ) a が、未知数であり、これを求めることが問題となる。すなわち、次のようになる。

$$\text{Find } a \text{ so as to minimize } J \text{ under} \quad (41)$$

the constraints of eqs.(1), (2), (3), (4)

この場合には、式(9)の a が変化することを考えて、

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \int_0^{t_f} \int_V W_{ij}(x_i - \eta_i) \delta x_j dV dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_V \lambda_i (\delta \dot{x}_i - a \delta x_{i,jj} - x_{i,jj} \delta a) dV dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_V \delta \lambda_i (\dot{x}_i - a x_{i,jj}) dV dt \end{aligned} \quad (42)$$

と変更される。以下同様に計算を進めて、式(13)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \int_0^{t_f} \int_V \{W_{ij}(x_i - \eta_i) - \dot{\lambda}_j - a \lambda_{j,kk}\} \delta x_j dV dt \\ &+ \int_V \left[\lambda_i \delta x_i \right]_{t=0}^{t=t_f} dV \\ &- \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_i \delta t_i) dS dt + \int_0^{t_f} \int_S (s_i \delta x_i) dS dt \\ &- \int_0^{t_f} \int_V (\lambda_i x_{i,jj} \delta a) dV dt \end{aligned} \quad (43)$$

評価関数 J^* が最小であるためには

$$\delta J^* = 0 \quad (16)$$

でなければならない。これより

$$\dot{\lambda}_j = W_{ij}(x_i - \eta_i) - a \lambda_{j,kk} \quad (21)$$

$$\lambda_i(t_f) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (25)$$

$$s_i = a \lambda_{i,j} n_j = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (27)$$

なる随伴方程式とその終端条件、境界条件を得ることができる。

以上を整理すると、次のようになる。すなわち状態方程式(1), (2), (3), (4), および随伴方程式(21), (23), (25), (27)を解き、 x_i, λ_i を式(43)に代入すると

$$\begin{aligned} \delta J^* &= - \int_0^{t_f} \int_V (\lambda_i x_{i,jj} \delta a) dV dt \\ &= - \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_i x_{i,j} n_j) \delta a dS dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_V (\lambda_{i,j} x_{i,j}) \cdot \delta a dV dt \end{aligned} \quad (44)$$

である。式(44)の最終行第1項は、境界条件より0となるから、 J^* の a に対する勾配 $\text{grad}(J^*)$ は

$$\text{grad}(J^*) = \lambda_{i,j} x_{i,j} \quad (45)$$

と求めることができる。

7. 最適形状決定 (Shape optimization)

よく知られるように、流体中に置かれた物体は、抗力、揚力、モーメント力などの流体力を受ける。このとき、これらの力が最小になるような物体の形状は如何なるものであろうか。この問題は古くから多くの研究者によって扱われてきたものであり、かつ翼の形状決定をはじめとして多くの実用上の問題を提起しているものである。図-2に示すように、制御境界 S_c は物体の表面

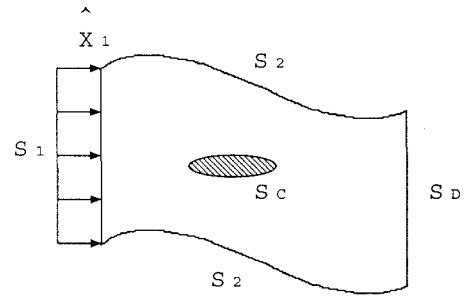


図-2 最適形状決定モデル

となり、制御量は物体の座標 X_i であるとする。状態方程式は、

$$\dot{x}_i = a x_{i,jj} \quad (1)$$

初期条件は、

$$x_i(0) = \hat{x}_i^0 \quad (2)$$

である。ここに x_i は流速であり、 a は粘性係数であるとする。このように解釈すると式(1), (2)は、非常に粘性の大きな流体の流れを支配する方程式となる。流体中の物体の表面の座標 X_i は、 Z_i なる量で与えられるとする。

$$X_i = Z_i \quad \text{on } S_c \quad (46)$$

境界条件は

$$x_i = \hat{x}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$t_i = a x_{i,j} n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

となる。ここに式(4)の t_i は表面力である。また、

$$\begin{aligned} \overline{(S_1 \cup S_c) \cup S_2} &= S \\ (S_1 \cup S_c) \cap S_2 &= \Phi \\ S_1 \cap S_c &= \Phi \end{aligned} \quad (47)$$

である。評価関数は、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)(F_j - \hat{F}_j)dt \quad (48)$$

と与えられる。ここに F_i は流体力である。 $\hat{F}_i$ は目標とする流体力で、与えられた量であるとする。また q_{ij} は重み関数で、 F_i は、

$$F_i = - \int_{S_c} t_i dS \quad (49)$$

により求められる。問題を次のように整理する。

$$\begin{aligned} &\text{Find } Z_i \text{ so as to minimize } J \text{ expressed} \\ &\text{by eq.(48) under the constraints} \quad (50) \\ &\text{of eqs.(1), (2), (46), (3), (4)} \end{aligned}$$

この問題では、拡張された評価関数 J^* は、

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)(F_j - \hat{F}_j)dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_V \lambda_i(\dot{x}_i - ax_{i,jj})dV dt \quad (51) \end{aligned}$$

となる。ここに、 λ_i は Lagrange 関数である。さて、式 (51) の変分を計算すると、第 1 項 J_1^* は、

$$\begin{aligned} \delta J_1^* &= \int_0^{t_f} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)\delta F_j dt \\ &= - \int_0^{t_f} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)\delta \int_{S_c} t_i dS dt \\ &= - \int_0^{t_f} \int_{S_c} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)\delta t_i dS dt \quad (52) \end{aligned}$$

と変形することができる。第 2 項は第 3 節に述べた変形とまったく同じであるので、式 (13) に対応して、結局次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \delta J^* &= - \int_0^{t_f} \int_{S_c} q_{ij}(F_i - \hat{F}_i)\delta t_j dS dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_V (-\dot{\lambda}_j - a\lambda_{j,kk})\delta x_j dV dt \\ &+ \int_V [\lambda_i \delta x_i]_{t=0}^{t=t_f} dV \\ &- \int_0^{t_f} \int_S (\lambda_i \delta t_i) dS dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_S (s_i \delta x_i) dS dt \quad (53) \end{aligned}$$

式 (53) を 0 とするためには、

$$-\dot{\lambda}_j - a\lambda_{j,kk} = 0 \quad (54)$$

$$\lambda_i(t_f) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (25)$$

$$s_i = a\lambda_{i,j}n_j = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (27)$$

$$s_j = q_{ij}(F_i - \hat{F}_i) \quad \text{on } S_c \quad (55)$$

なる随伴方程式を解けば良いことが解る。

以上を整理すると、状態方程式 (1), (2), (3), (4), および随伴方程式 (54), (23), (25), (27), (55) を解くことにより、式 (53) は

$$\delta J^* = \int_0^{t_f} \int_{S_c} (s_i \cdot \delta x_i) dS dt \quad (56)$$

と変形される。一方

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}(s_i \delta X_i) dt &= \int_0^{t_f} (\dot{s}_i \delta X_i) dt \\ &+ \int_0^{t_f} (s_i \delta \dot{X}_i) dt \quad (57) \end{aligned}$$

であるから、

$$\left[s_i \delta X_i \right]_{t=0}^{t=t_f} = 0 \quad (58)$$

を用いると、式 (56) は

$$\delta J^* = - \int_0^{t_f} (\dot{s}_i \cdot \delta Z_i) dt, \quad (59)$$

と変形できるため、 J^* の Z_i に対する勾配 $\text{grad}(J^*)_i$ は

$$\text{grad}(J^*)_i = -\dot{s}_i, \quad (60)$$

と求めることができる。

8. 非圧縮粘性流体中における物体の最適形状決定

非圧縮粘性流体の非定常流れの支配方程式は、図-3 を参照して、次のように表すことができる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (61)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (62)$$

ここに u_i と p は流速と圧力であり、 ν は動粘性係数である。境界条件は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} u_i &= (U_0, 0) & \text{on } S_1 \\ t_1 = 0, \quad u_2 &= 0 & \text{on } S_2 \\ u_i &= 0 & \text{on } S_B \\ t_i &= 0 & \text{on } S_D \end{aligned} \quad (63)$$

ここに

$$t_i = \{-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})\}n_j \quad (64)$$

で、 n_j は境界上の単位法線ベクトルを表す。

物体が受ける物体力は F_i と表され、 F_1 は抗力、 F_2 は揚力である。これらは

$$F_i = - \int_{S_B} t_i dS \quad (65)$$

で与えられる.

評価関数 J は,

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2) dt \quad (66)$$

である. これは抗力及び揚力が最も小さくなる状態を求めることを目的とする. 物体形状は, 全ての計算過程で面積一定条件の下に, 最適化しなければならない.

$$\sum_{e=1}^m (a_e(x_i)) - A_0 = 0 \quad (67)$$

ここに, $a_e(x_i)$ は各要素の面積を, A_0 は初期状態の面積を表す. 問題は次のように整理される. 物体の表面の座標を X_i とし

$$\text{Find } X_i \text{ so as to minimize } J \text{ under the constraints of eqs. (61), (62), (67)} \quad (68)$$

式 (61), (62) は有限要素法により離散化し, 停留条件を求めると J の X_i に対する勾配を求めることができる. 有限要素法の離散化に対しては, 流速に対して気泡関数を用いた, 圧力に対して線形関数を用いた, 内挿補間による混合補間法を用いている. 計算された勾配は, メッシュ依存性が強く, 数値振動の影響を受ける. このためスムージングを行う必要がある.

最小化手法としては, 最急降下法を用いた. 第 k 回目の繰り返し回数の物体表面座標 $X_i^{(k)}$ を用いて

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} - \alpha \cdot \text{grad}(J^*)_i^{(k)} \quad (69)$$

なるアルゴリズムで計算を進めるものである. ここに α は計算を安定させるための係数である.

図-3 に解析領域を図-4 に有限要素分割を示す. こ

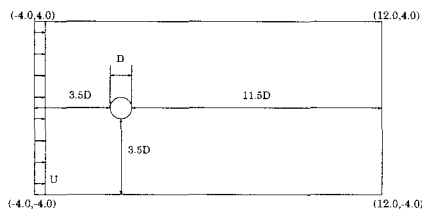


図-3 解析領域

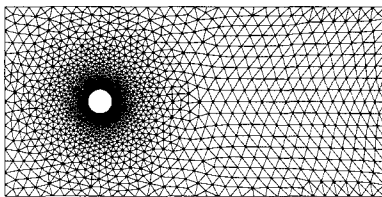


図-4 有限要素分割

こで, 随伴方程式法を用い最適形状を決定するにあたり, $Re = 250$ と設定し検証を行うこととする.

まず, 図-5 に示す円柱を初期形状として最適形状の決定に関して検討を行った. 面積一定の条件下で抗力

のみを最小にする形状を求めたところ, 図-6 に示す最適形状が得られた. (図中においては, 最適形状は繰り返し計算により求められているため, 最終的に求めた形状ということで最終形状と記すこととする.)

次に, $Re = 1$ の場合に得られた最適形状を初期形状として設定し, 最適形状の決定に関して検討を行った. 図-7 に初期形状の有限要素メッシュを示す. 検討を行った結果, 図-8 に示す結果が得られ, 図-6 に示す結果と良い一致を示していることから, 解析結果の妥当性がうかがえる.

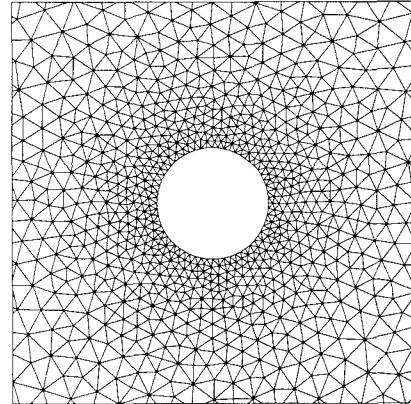


図-5 初期状態の物体形状

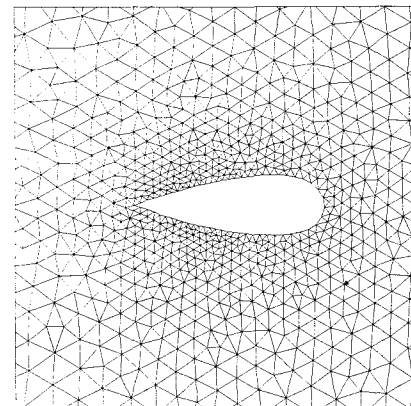


図-6 最終形状

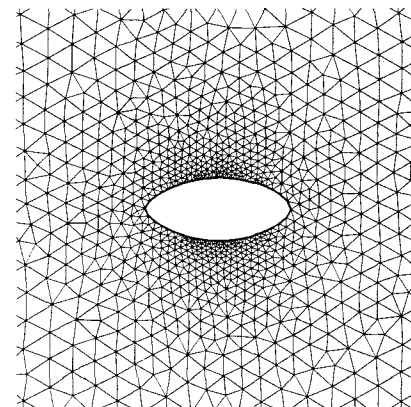


図-7 初期状態の物体形状 ($Re=1$ の場合の最終形状)

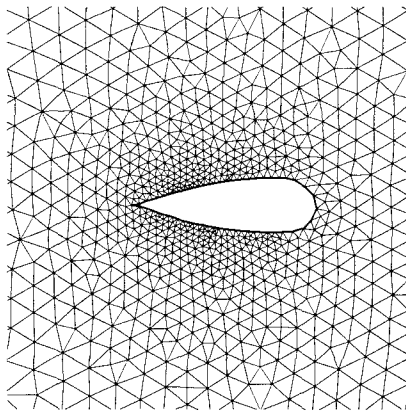


図-8 最終形状

9. 結言

本論文において、非構造分野における有限要素法の発展と今後の展望を示すとともに、最近の話題として、随伴方程式を用いた逆解析手法について解説した。緒言にも示したように、有限要素法による流体解析はここ数十年で飛躍的な進歩を遂げ、研究の方向性は多様化する傾向にある。現在までに開発された、有限要素法に準拠する様々な方法論の進展性、また新規分野開拓への適用の一端として、逆問題への適用の可能性について示した。

随伴方程式を用いることにより、評価関数の制御変数に対する勾配を求める部分が統一的に扱えることを示すため、様々な逆問題に対して定式化を行い概説した。また、有限要素法を用いた逆解析適用事例として、非圧縮粘性流体中における物体の最適形状決定に関して示した。結果として、有限要素法を用いた逆解析により最適形状を算定できることを示した。以上より、今後は設計の分野への応用も考えられ、今後より一層他の問題への拡張が期待されるところである。

有限要素法を適用した逆解析の問題において、現在までの研究経過として解決されている部分は数多くあるが、依然として検討すべき課題点も多く残されている。以下にその課題点を整理して示す。

● 2 次の随伴方程式を用いた解法の検討

いわゆるニュートン法に立脚する場合、ヘッセ行列 (Hessian) による方法が用いられる。この方が解が得られるときには収束が早い。

● 状態方程式及び随伴方程式の解析

結局のところ、この解析が中心の課題となる。この部分を正確かつ高速に解析する方法の研究も期待される。

● 最小化手法の検討

ここでは、最小化手法については詳しく立入らなかった。本来、随伴方程式と最小化手法とは密接な関係をもっており、今後の研究課題のうちの一つである。

● 大域的最小を求める方法の開発

現在用いられている最小化手法は局地的最小を求める方法である。大域的最小を求める方法が必要となる。

● 解の収束性や安定性に関する研究

実際に計算をする上には、収束や安定に関する性質を知ること大切である。

以上のように「総合 (Synthesis)」に代表される逆解析の分野は、今後の研究課題を多く残す分野であり、新しい研究者の参入が大いに待たれているものである。

参考文献

- 1) O.C.Zienkiewicz, P.Mayer and Y.K.Cheung : *Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements*, Proc. ASCE, Vol. 92, No. EM1, Feb. 1966.
- 2) H.C.Martin : *Finite Element Analysis of Fluid Flows*, Proc. Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-68-150, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, Oct. 1968.
- 3) J.T.Oden : *Finite Element Analog of Navier-Stokes Equation*, Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM4, Aug. 1970.
- 4) C.Taylor and P.Hood : *A Numerical Solution of the Navier Stokes Equation Using the Finite Element Technique*. Comp. Fluid, Vol. 1, No. 1, 1973.
- 5) M.Kawahara, N.Yoshimura, K.Nakagawa and H.Ohsaka : *Steady Flow Analysis of Incompressible Viscous Fluid by the Finite Element Method*, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Y. Yamada and R. H. Gallagher. eds, University of Tokyo Press, 1973.
- 6) T.T.R.Hughes, R.L.Taylor and J.F.Levy : *High Reynolds Number, Steady, Incompressible Flow by A Finite Element Method*, R. H. Gallagher et.al. eds., *Finite Elements in Fluids*, Vol.3, pp55 ~ 72, 1978.
- 7) J.C.Heinrich, P.S.Huyakorn, O.C.Zienkiewicz and A.R.Mitchell : *An 'Upwind Finite Element Scheme' for Two-dimensional Convective Transport Equation*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.11, pp134 ~ 143, 1977.
- 8) T.J.R.Hughes : *A Simple Scheme for Developing 'Upwind' Finite Elements*, Int. J. NUM. Meth. Engng., Vol.12, pp1359 ~ 1365, 1978.
- 9) A.N.Brooks and T.J.R.Hughes : *Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis of the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.32, pp199 ~ 259, 1982.
- 10) M.Kawahara : *Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid*, R. H. Gallagher et.al., eds., *Finite Elements in Fluids*, Vol.3, Wiley, pp23 ~ 54, 1978.
- 11) P.Gresho, R.Lee and R.Sani : *Advection-dominated Flows, with Emphasis on the Consequences of Mass Lumping*, R. H. Gallagher et.al., eds., *Finite Elements in Fluids*, Vol.3, Wiley, pp335 ~ 350, 1978.
- 12) R.L.Lee, P.M.Gresho, S.T.Chang, R.L.Sani and M.J.P.Cullon : *Conservation Laws for Primitive Variable Formulations of the Incompressible Flow Equation Using the Galerkin Finite Element Method*, R. H. Gallagher et.al., eds., *Finite Elements in Fluids*, Vol.4, Wiley, pp21 ~ 45, 1982.
- 13) P.Gresho, S.chan, R.Lee and C.Upon : *A Modified Finite Element Method for Solving Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equation, part 1 & 2*, Int. J. Num. Meth. Fluid., Vol.4, pp557 ~ 598 & 619

- ~ 640, 1984.
- 14) R.Glowinsky, Q.V.Dinh and J.Periaux : *Domain Decomposition for Elliptic Problem*, Finite Element in Fluids, R. H. Gallagher et.al., eds., Vol.5, pp46 ~ 106, 1984.
 - 15) M.Hayashi, K.Hatanaka and M.Kawahara : *Lagrangian Finite Element Method for Free-surface Navier-Stokes Flow Using Fractional Step Method*, Int. J. Num. Meth. Fluid., Vol.13, pp805 ~ 840, 1991.
 - 16) B.Ramaswamy and M.Kawahara : *Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method for Unsteady Convective, Incompressible Viscous Surface Flow*, R. H. Gallagher et.al., eds., Finite Elements in Fluids, Vol.7, Wileys, pp65 ~ 87, 1988.
 - 17) R.Glowinsky, T-W Pan and J.Periaux : *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 111, pp283 ~ 303, 1994.
 - 18) T.E.Tezduyar : *Finite Element Methods for Flow Problem with Moving Boundaries and Interfaces*, Archives Comp. Meth. Engng., Vol.8, No.2, pp83 ~ 130, 2001.
 - 19) T.J.R.Hughes : *Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichletto Neumann formulation, sub-grid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol.127, pp387 ~ 401, 1995.
 - 20) H.Okumura and M.Kawahara : *A New Stable Bubble Element for Incompressible Fluid Flow Based on a Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Formulation*, Int. J. Comp. Fluid. Dyn., Vol.17, No.4, pp275 ~ 282, 2003.
 - 21) J.Matsumoto and M.Kawahara : *Shape Identification for Fluid-structure Interaction Problem Using Improved Bubble Element*, Int. J. Comp. Fluid. Dyn., Vol.15, pp33 ~ 45, 2001.
 - 22) <http://www.top500.org>.
 - 23) H.Okumura and M.Kawahara : *Shape optimization of body located in incompressible Navier-Stokes flow based on optimal control theory*. Comp. Meth. Engng, Sci, Vol.1, No.2, pp71 ~ 77, (2000).
 - 24) H.Okumura and M.Kawahara : *Shape optimization for the Navier-Stokes equations based on optimal control theory*. ECCOMAS, Barcelona, (2000).
 - 25) Y.Ogawa and M.Kawahara : *Shape optimization of a body located in incompressible viscous flow based on optimal control theory*. Int.J, Comp. Fluid Dyn, Vol.17, No.4, pp243 ~ 251, (2003).
 - 26) H.Yagi and M.Kawahara : *Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow*. Int.J, Num. Meth. Fluids, in print, (2005).
 - 27) H.Yagi and M.Kawahara : *Numerical determination of optimal shape located in incompressible viscous flow*. J. Fluid Mech. (submitted).

(2005 年 4 月 15 日 受付)